



# Моделирование систем

Лекция 2

**Имитационные модели:  
дискретные и на базе  
дифференциальных  
уравнений**

# Дискретная модель распространения эпидемии

- Содержательное описание модели:
- 1. Каждый заболевший на следующий день заражает в среднем « $a$ » человек.
- 2. Каждый заболевший выздоравливает через « $b$ » дней.
- 3. Все население региона равно « $c$ ».
- 4. В первый день заболело « $d$ » человек.
- 5. Выздоровевшие обладают иммунитетом к этой болезни.

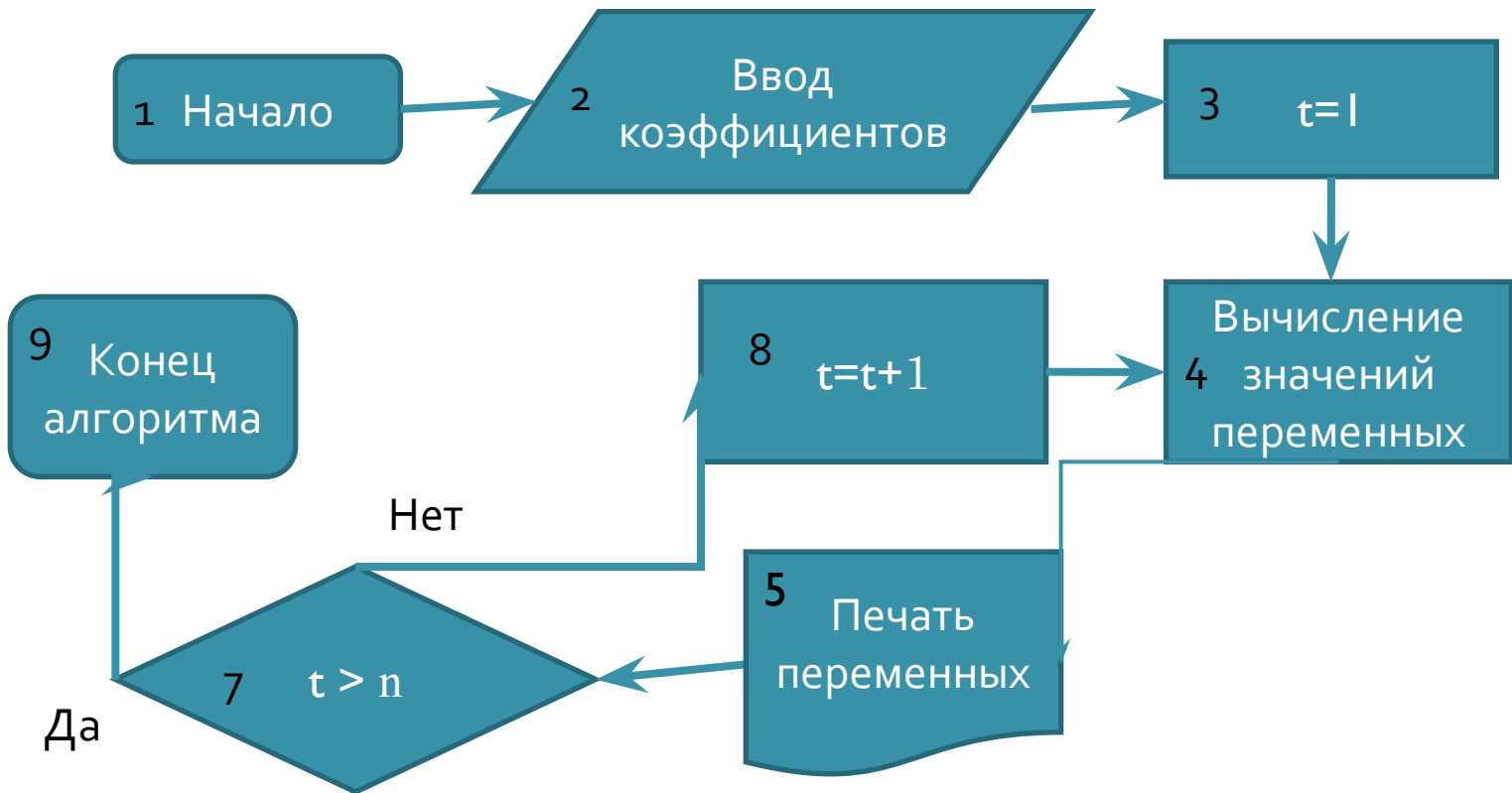
# Обозначения

- $x(t)$  – число больных .
- $z(t)$  – число заболевших в  $t$ -й день;
- $y(t)$  – число здоровых в  $t$ -й день.

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t) = a \cdot z(t-1); \\ x(t) = \sum_{q=t-b}^{q=t} z(q); \\ y(t) = c - \sum_{q=t-b}^{q=t} x(q); \\ z(1) = d. \end{array} \right.$$

# Алгоритм исследования модели I

- Ниже полагаем, что время  $t$  меняется в диапазоне  $1 - n$  с шагом 1.

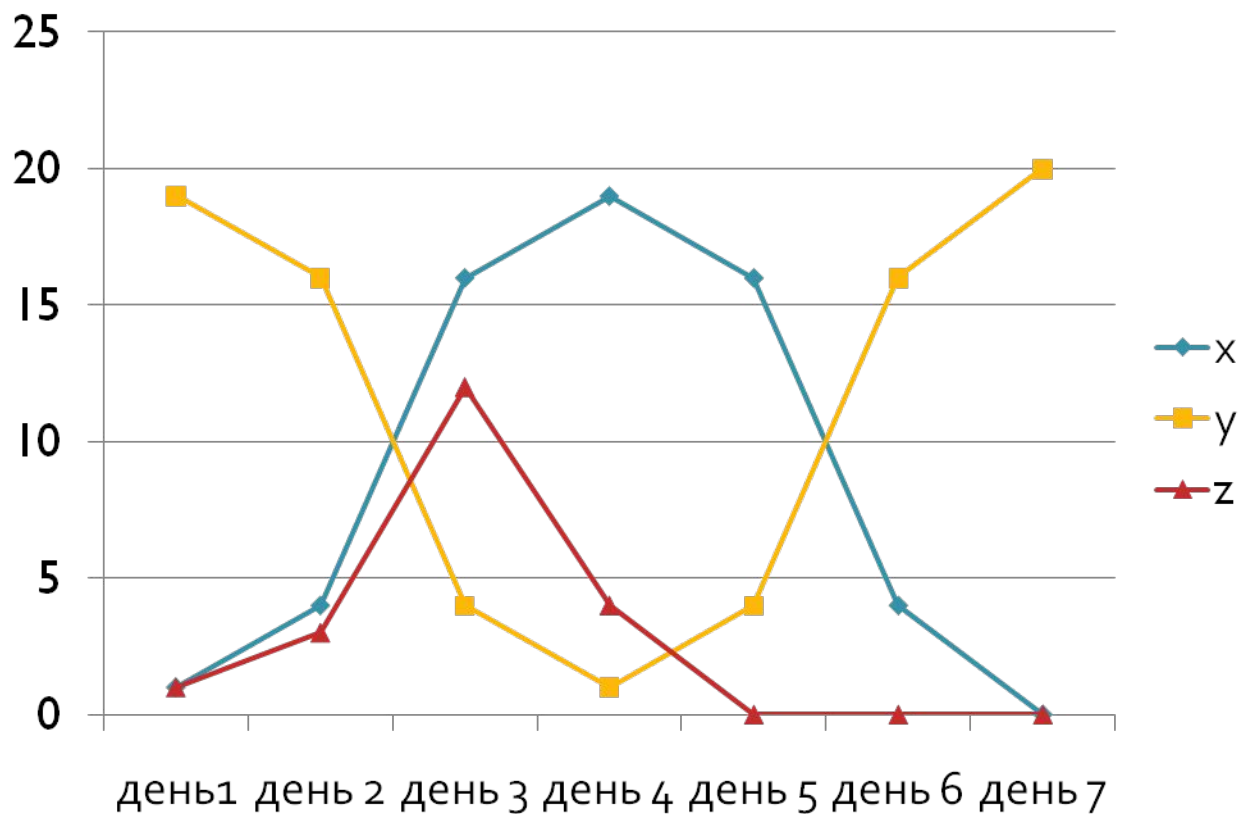


# Динамика эпидемии

- Таблица, отображающая динамику эпидемии, при условии, что  $a=3$ ,  $b=3$ ,  $c=20$ ,  $d=1$  :

| t | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 1  | 4  | 16 | 19 | 16 | 4  | 0  |
| y | 19 | 16 | 4  | 1  | 4  | 16 | 20 |
| z | 1  | 3  | 12 | 4  | 0  | 0  | 0  |

# Графическое представление результатов



# Самостоятельно 1

**Определить динамику  
эпидемии в течение 10  
дней, если известно,  
что:**

$$a=4, b=2, c=30, d=4 .$$

## Самостоятельно 2

Дать формальное описание модели, содержательное описание которой приводится ниже:

- 1. Каждый заболевший на следующий день заражает в среднем «а» человек.
- 2. Каждый заболевший либо выздоравливает или гибнет через «b» дней.
- 3. Отношение числа погибших к числу заболевших «b» дней назад равно  $\eta$ .
- 3. Все население региона равно «с».
- 4. В первый день заболело «d» человек.
- 5. Выздоровевшие обладают иммунитетом к этой болезни.

## **Самостоятельно 3**

**Определить динамику  
эпидемии в течение 10  
дней, если известно, что:  
 $a=2$ ,  $b=3$ ,  $c=24$ ,  $d=2$ ,  $\eta = 25\%$**

# Содержательная постановка задачи №2

- Остров населен мхами, оленями и волками. Известны функции, связывающие эти параметры между собой. Требуется определить такое соотношение между количеством мха, числом оленей и числом волков, которое бы гарантировало устойчивость биоценоза.

# Обозначения, допущения и определения

- $X_1$  - количество мха на острове;
- $X_2$  - количество оленей на острове;
- $X_3$  - количество волков на острове;
- $X_1 = A + B \cdot \sin(t) - L \cdot X_2 + d X_1/dt$ ;
- $X_2 = C \cdot X_1 - D \cdot X_3 + d X_2/dt$ ;
- $X_3 = H \cdot X_2 + d X_3/dt$ ;
- Если  $X_1 < A + B \cdot \sin(t)$ , то  $d X_1/dt = W \cdot X_1$ , в противном случае  $d X_1/dt = 0$ ;
- $d X_2/dt = G \cdot X_2$ ;
- $d X_3/dt = K \cdot X_3$ .

# Замечания

- $X_2$  и  $X_3$  - целые неотрицательные числа;
- Если одно из переменных  $X_2$  и  $X_3$  принимает значение  $q$ , меньшее, чем 2, то эта переменная не может в дальнейшем превысить величину  $q$ ;
- Для всех  $i > 1$  справедливо:  
$$X_i = X_i \cdot \text{signum}(X_{i-1}).$$
- Все коэффициенты далее полагаем известными.

# Формальное описание острова

$$X_1 = A + B \cdot \sin(t) - L \cdot X_2 + d X_1 / dt;$$

$$X_2 = C \cdot X_1 - D \cdot X_3 + d X_2 / dt;$$

$$X_3 = H \cdot X_2 + d X_3 / dt;$$

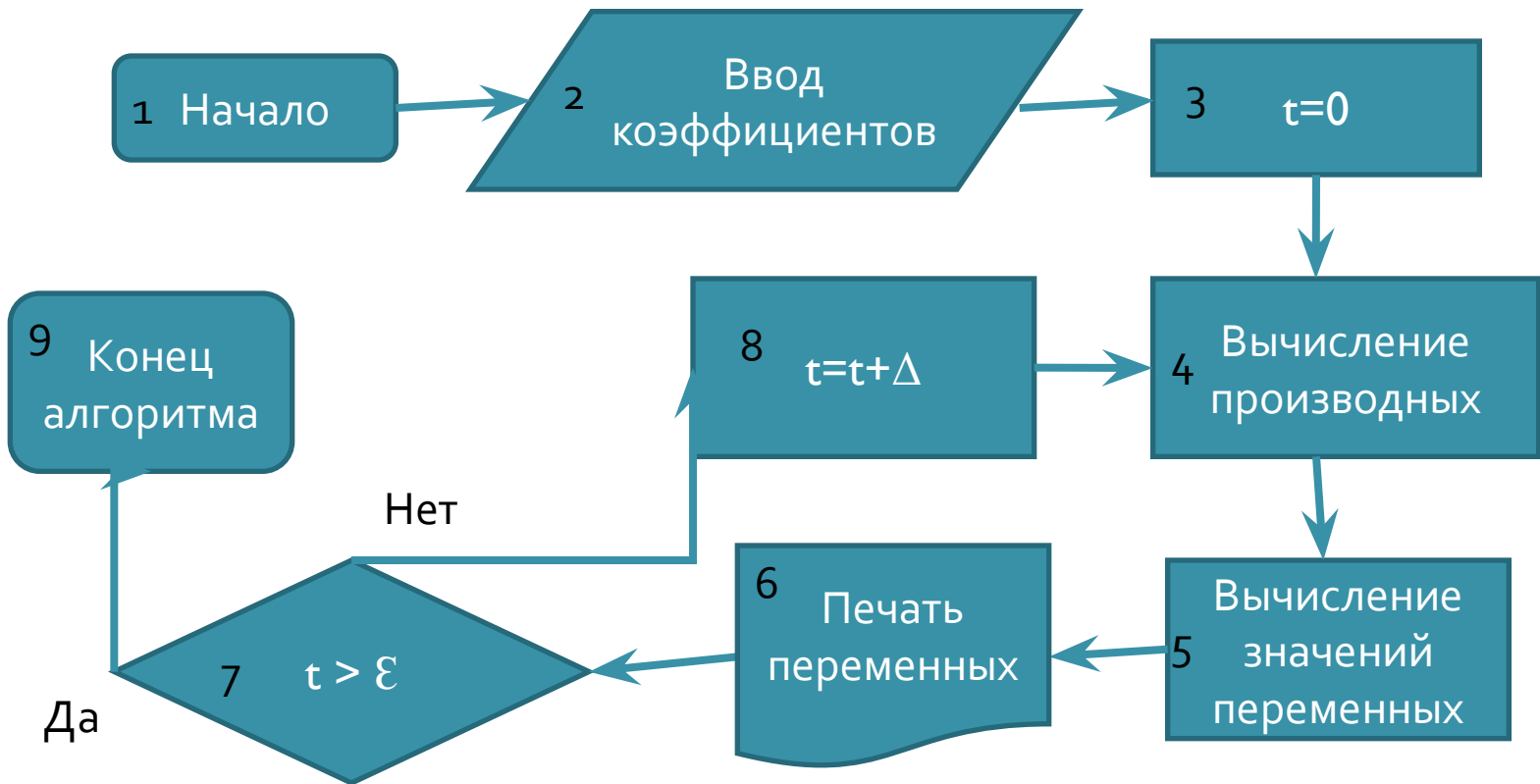
$$\frac{dX_1}{dt} = WX_1 \text{signum}(1 - \text{signum}(X_1 - A - B \cdot \sin(t)));$$

$$\frac{dX_2}{dt} = G \cdot X_2;$$

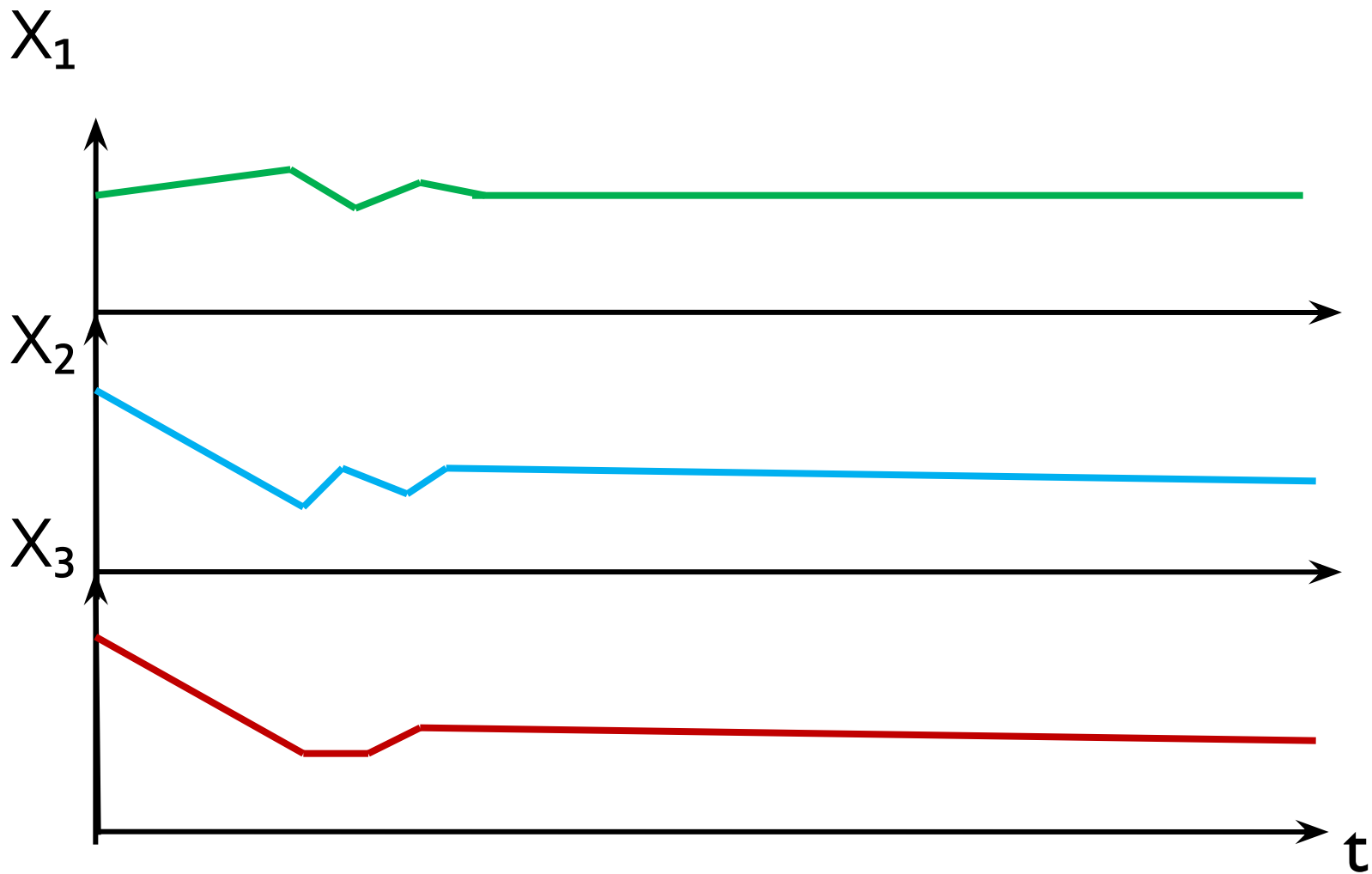
$$\frac{dX_3}{dt} = K \cdot X_3.$$

# Алгоритм исследования модели

- Ниже полагаем, что время  $t$  меняется в диапазоне  $0 - \varepsilon$  с шагом  $\Delta$ .



# Результаты моделирования



## Значения коэффициентов, использованные в программе

- $A = 2200; B = 1000; L=1;$   
 $C= 0,01; D = 4; G = 0,2;$   
 $H=0,1; K= 0,05; \Delta = 1;$   
 $X_2=150; X_3 = 2; B_1= 0,1; \quad \varepsilon$   
 $= 40.$

# Самостоятельно:

1. Реализовать программно алгоритм имитирующий жизнь острова.
2. Определить соотношение олени/волки, при которой численность оленей будет максимальной и стабильной.
3. Построить графики, иллюстрирующие динамику массы мха, числа оленей и волков.

# Модель озера (задача № 3)

- Учитываемые параметры (переменные):
- $X_s$  – энергия солнечной радиации;
- $X_p$  – растения;
- $X_k$  – травоядные;
- $X_c$  – плотоядные животные и рыбы;
- $X_o$  – органические осадки, выпадающие на дно озера;
- $X_e$  – энергообмен между средой и биоценозом.

# Формальное описание модели

- Модель задается системой:

$$dX_p/dt = X_s - k_1 X_p;$$

$$dX_k/dt = k_2 X_p - k_3 X_k;$$

$$dX_c/dt = k_4 X_k - k_5 X_c;$$

$$dX_o/dt = k_6 X_p + k_7 X_k - k_8 X_c;$$

$$dX_e/dt = k_9 X_p + k_{10} X_k + k_{11} X_c;$$

$$X_s = k_{12}(k_{13} + k_{14} \sin 2\pi t)$$

Начальные условия (значение переменных при  $t=0$ ):  $X_p(0)$ ;  $X_k(0)$ ;  $X_c(0)$ ;  $X_o$ ;  $X_e(0)$ .

# Конкретные значения коэффициентов модели

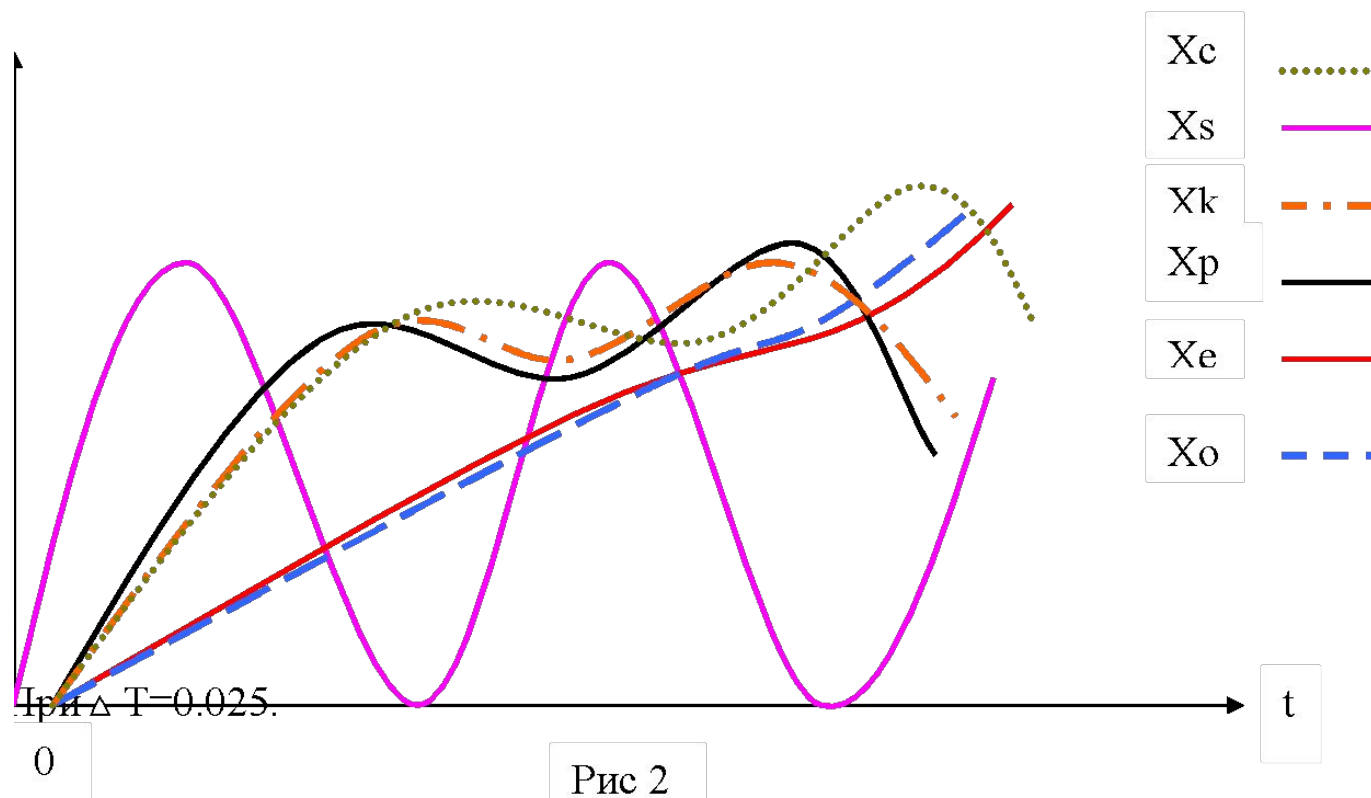
- Модель задается системой:

$$\begin{cases} dX_p/dt = X_s - 4.03X_p; \\ dX_k/dt = 0.48X_p - 17.87X_k; \\ dX_c/dt = 4.85X_k - 4.65X_c; \\ dX_o/dt = 2.55X_p + 6.12X_k - 1.95X_c; \\ dX_e/dt = X_p + 6.9X_k + 7.7X_c; \\ X_s = 95.2(1 + 0.635\sin 2\pi t) \end{cases}$$

Начальные условия (значение переменных при  $t=0$ ):  $X_p(0)=0.83$ ;  
 $X_k(0)=0.003$ ;  $X_c(0)=0.0001$ ;  $X_o(0)=0$ ;  $X_e(0)=0$ ;

# Графическое представление результатов

Модель озера Сидарбог: результаты имитации



# Самостоятельно:

1. Разработать алгоритм, имитирующий жизнь озера.
2. Реализовать программно алгоритм имитирующий жизнь озера.
3. Определить соотношение между плотоядными и травоядными обитателями озера, при котором их численность будет максимальной и стабильной.
4. Построить графики, иллюстрирующие динамику всех переменных.