

ЛЕКЦИЯ 2.

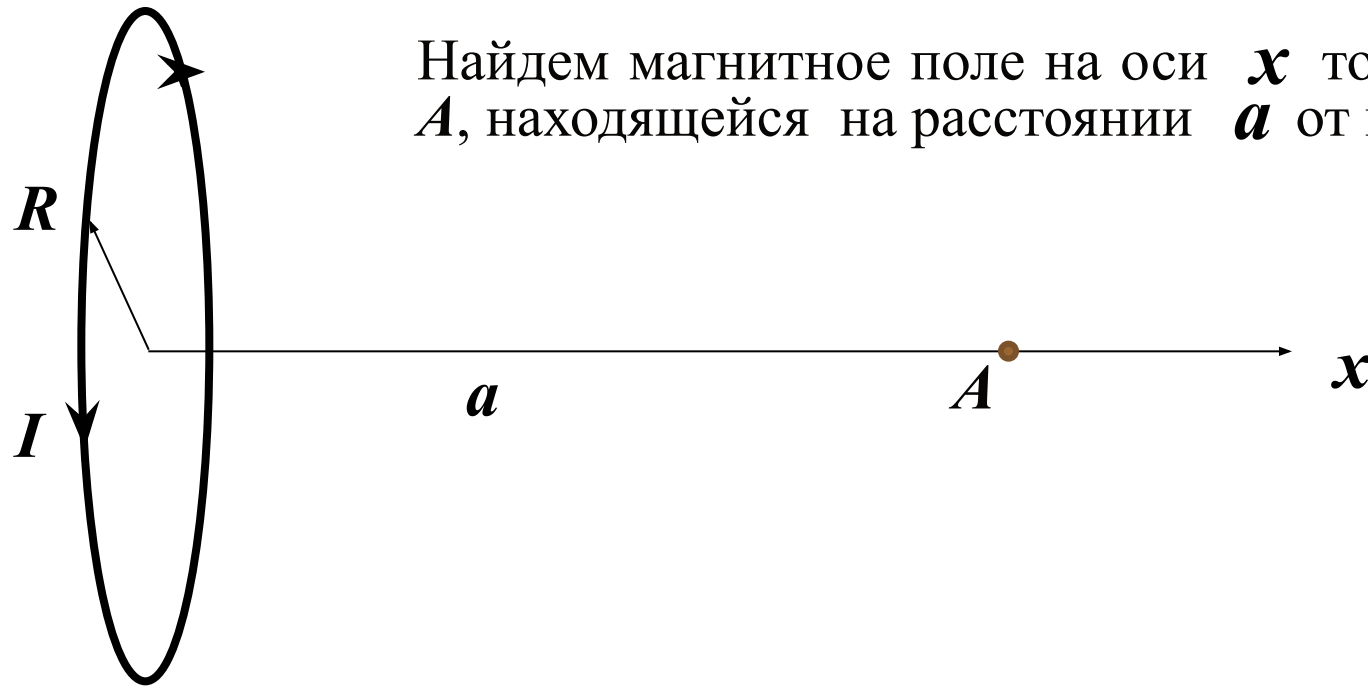
ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1. Примеры расчета магнитных полей:
- магнитное поле на оси кругового тока.*
- 2. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$*
- 3. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$*
- 4. Примеры расчета магнитных полей:
- магнитное поле соленоида.
- магнитное поле тороида (**самостоятельно**).*

Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока

Пусть электрический ток силой I течет по проводнику радиусом R .



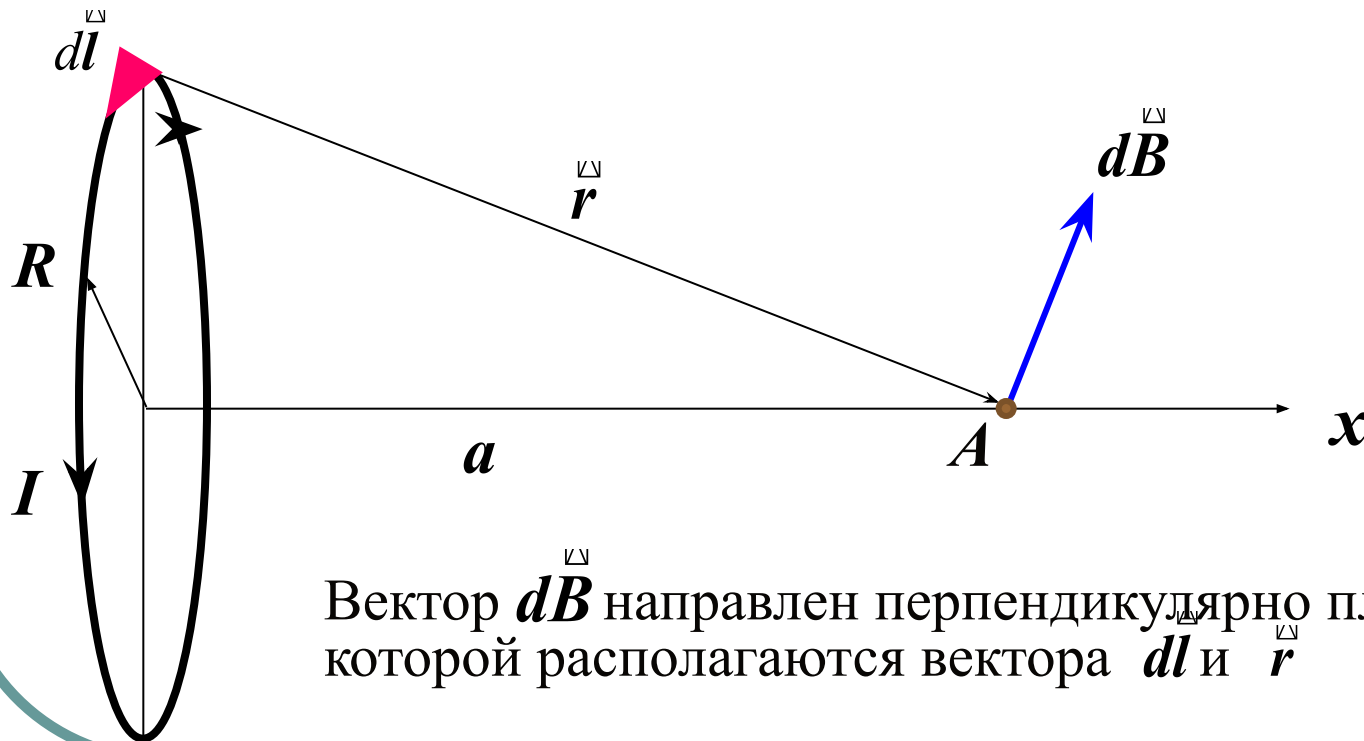
Найдем магнитное поле на оси x тока в точке A , находящейся на расстоянии a от центра

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока

Разобьем круговой ток на элементы тока длиной $d\vec{l}$ и проведем от произвольного элемента тока радиус-вектор $\vec{r}$ в точку A .

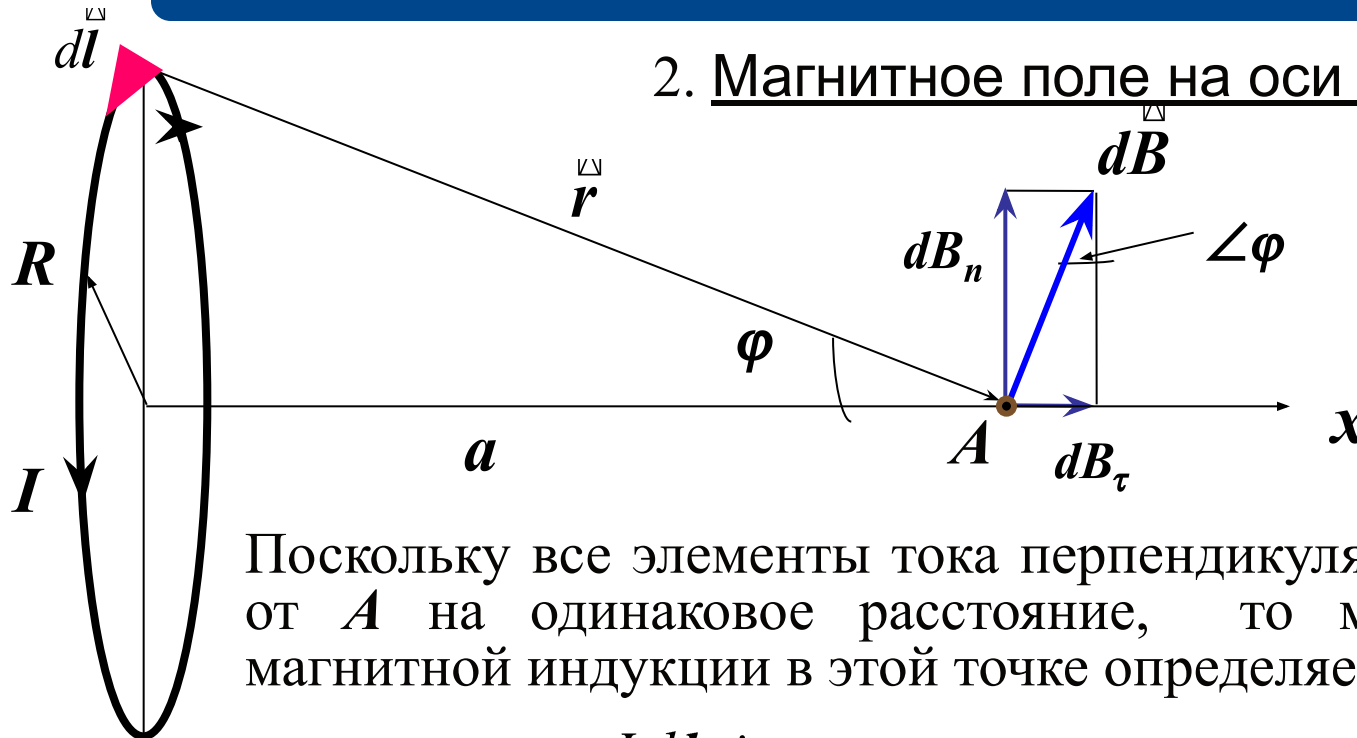


Вектор $d\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой располагаются вектора $d\vec{l}$ и $\vec{r}$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока



Поскольку все элементы тока перпендикулярны и удалены от A на одинаковое расстояние, то модуль вектора магнитной индукции в этой точке определяется выражением

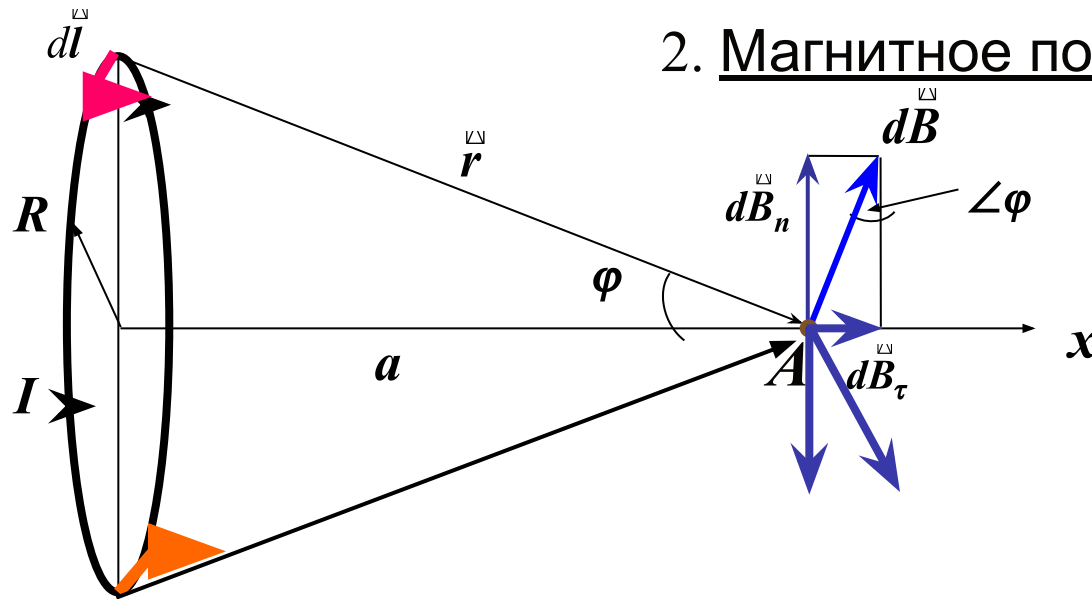
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} \quad (\alpha = 90^\circ, \sin 90^\circ = 1)$$

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: dB_τ и dB_n

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока



Любые два противоположных элемента тока создают поле, составляющие dB_n которых равны по величине и противоположно направлены.

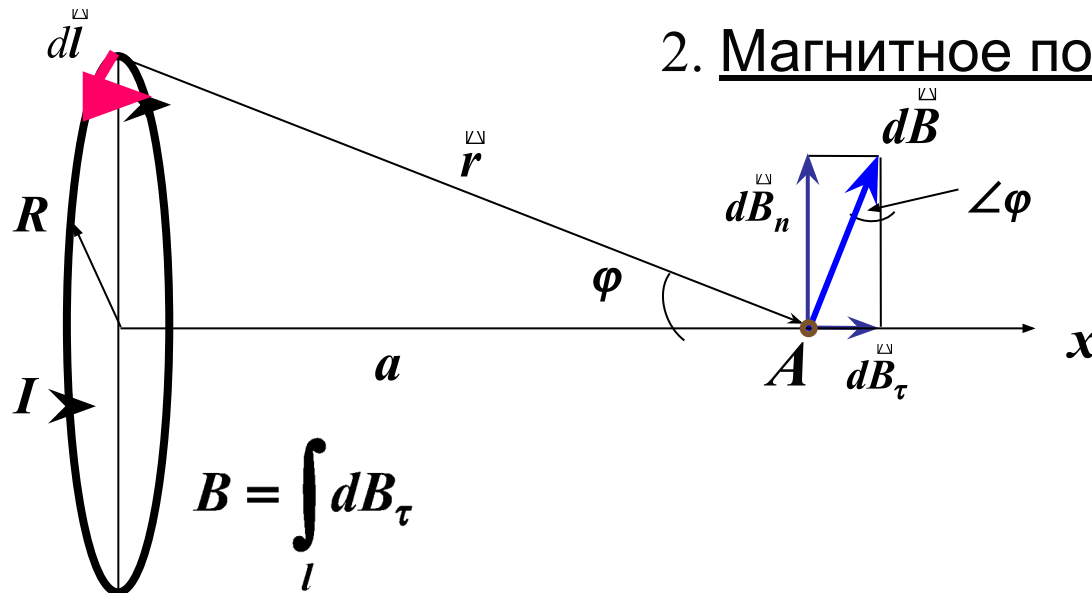
Следовательно, эти составляющие уничтожают друг друга.

Поэтому вектор магнитной индукции можно определить, просуммировав составляющие модулей вектора dB_τ (этот вектор направлен вдоль положительной нормали к контуру с током).

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B}_\tau$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin \varphi = \frac{R}{r}$,
 $r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \sin \varphi$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

2. Магнитное поле на оси кругового тока

В центре кругового тока $a = 0$,
индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вдали от контура на оси x ($a \gg R$):

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3}$$

Если умножить числитель и знаменатель
этого выражения на π , получим:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi a^3}$$

где $S = \pi R^2$ - площадь, охватываемая круговым током.

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

2. Магнитное поле на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu_0 IS}{2\pi a^3}$$

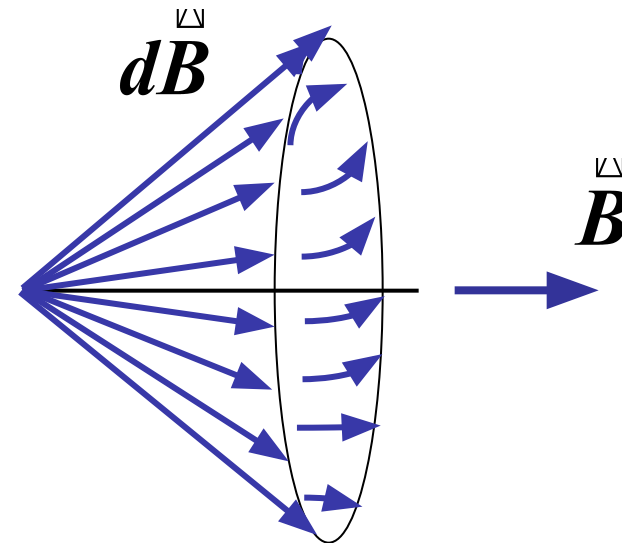
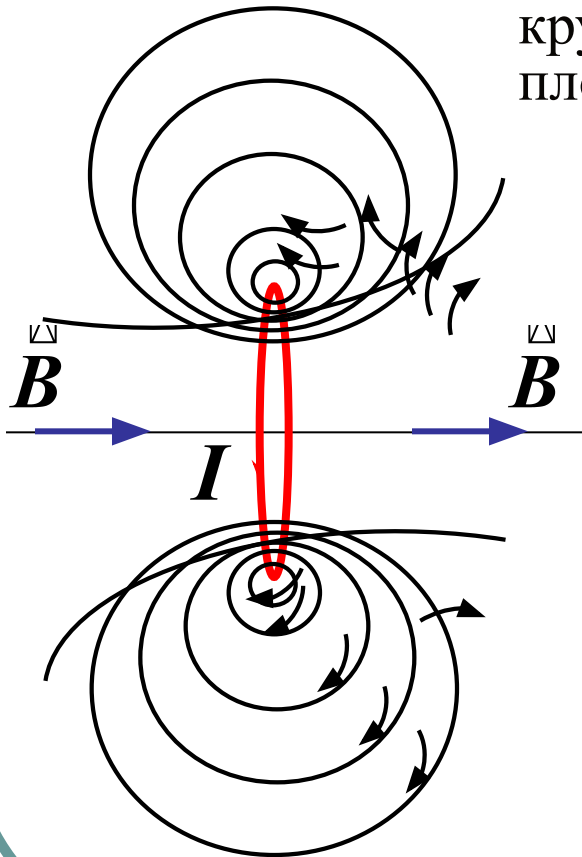
IS - магнитный момент контура.

Принимая, что вдали от кругового тока $a \approx r$, выражение для индукции магнитного поля, созданного замкнутым круговым током вдали от тока, запишется в виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$$

Графическое изображение магнитного поля кругового тока

Покажем линии магнитной индукции поля кругового тока, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось тока.



Направления векторов индукции магнитного поля в точке, лежащей на оси, которая проходит через центр кругового тока.

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Магнитный поток через элемент $d\vec{S}$ поверхности S соответственно, выражается формулой

$$d\Phi_B = (\vec{B}, d\vec{S}) = B dS \cos \alpha$$

$d\vec{S} = dS \vec{n}$, $\vec{n}$ - орт вектора нормали.

Полный поток через поверхность S равен сумме потоков через все элементы поверхности:

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

α - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции, B_n - проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль к площадке.

Магнитный поток $\vec{B}$ через площадку может быть как положительным, так и отрицательным.

Для замкнутой поверхности:

$$\Phi_B = \oint_S B_n dS = \oint_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\mathbf{B}$

Силовые линии магнитного поля замкнуты. Следовательно, любая линия пересекает замкнутую поверхность дважды (четное число раз), причем один раз в положительном направлении, другой раз – в отрицательном. Поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность S , всегда равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{теорема Гаусса-Остроградского для магнитного поля.}$$

Поток вектора напряженности магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$

Единица магнитного потока в СИ - вебер (Вб).

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Важное следствие из теоремы Гаусса:

поток вектора $\vec{B}$ через замкнутую поверхность S не зависит от формы этой поверхности.

Уравнение Гаусса в дифференциальной форме: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Из векторного анализа: ... дивергенция характеризует интенсивность (обильность) истоков и стоков векторного поля.

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$, следовательно магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии $\vec{B}$ замкнутые. Магнитное поле имеет соленоидальный или вихревой характер.

Физическая причина соленоидальности магнитного поля - отсутствие свободных магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L называется интеграл вида

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl$$

где $d\vec{l}$ — вектор элемента длины контура, $B_l = B \cos \alpha$, α — угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру L равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

Это закон (теорема) о циркуляции вектора $\vec{B}$. Иначе: закон полного тока для магнитного поля в вакууме.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

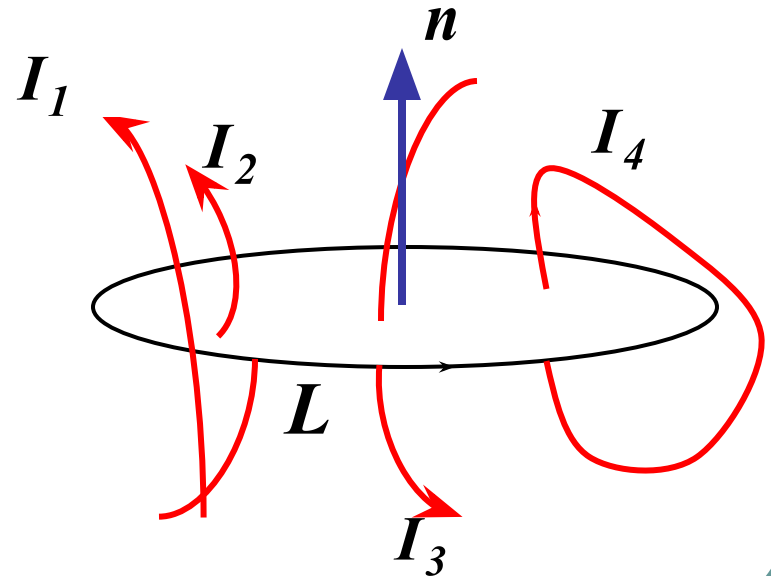
Ток I это алгебраическая сумма токов I_k , охватываемых контуром L : $I = \sum I_k$

Ток положительный, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления - отрицательный.

Пример

Токи I_1 , I_2 и I_4 - положительные, ток I_3 - отрицательный. Сумма токов:

$$I_k = 0 \cdot I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = I_2 - I_3 + I_4$$



Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Если ток I распределен по объему, где расположен контур L , то этот ток можно представить как

$$I = \int \vec{j} dS$$

Интеграл берется по произвольной поверхности S , «натянутой» на контур L .

Общий вид теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \int \vec{j} dS$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ не равна нулю. Следовательно, магнитное поле не потенциально.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

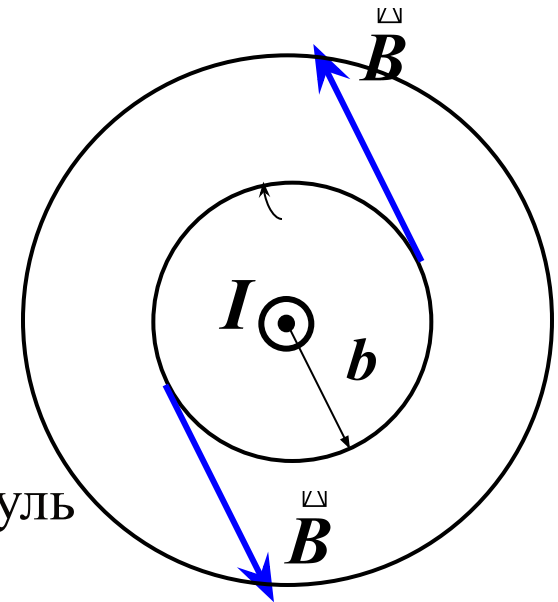
Применение теоремы.

Пример. Магнитное поле прямого тока.

Пусть ток направлен перпендикулярно плоскости рисунка, к нам.

Линии вектора $\vec{B}$ имеют вид окружностей с центром на оси тока.

Во всех точках на расстоянии b от центра модуль вектора $\vec{B}$ одинаков.



Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для выбранного круглого контура L :

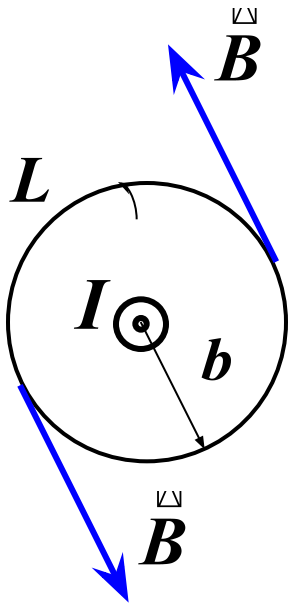
$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) =$$

$$B 2\pi b = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

Формула совпадает с выражением, полученным в лекции 1.



Примеры расчета магнитных полей

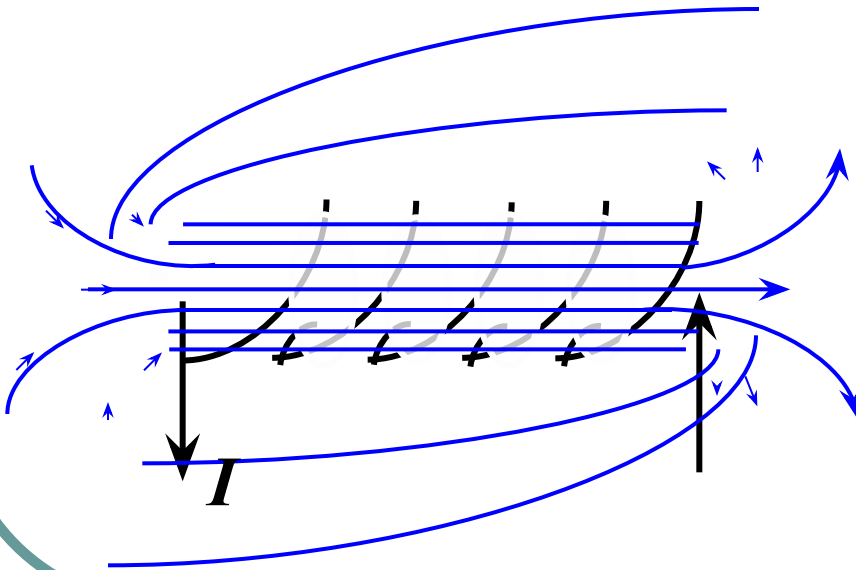
Самостоятельно: *расчет магнитного поля соленоида, тороида.*

Соленоид – это проводник, намотанный по винтовой линии на поверхность цилиндрического каркаса.

Используем теорему о циркуляции для расчета магнитного поля соленоида.

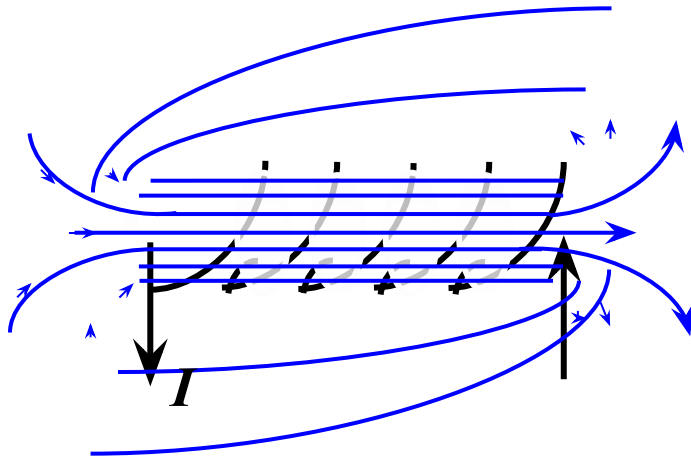
Линии магнитной индукции вне и внутри соленоида выглядят следующим образом:

Линии вектора $\vec{B}$ внутри соленоида направлены по оси так, что образуют с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему.



Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



Из опыта: чем длиннее соленоид, тем меньше поле вне его. Поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено внутри его, поле снаружи отсутствует.

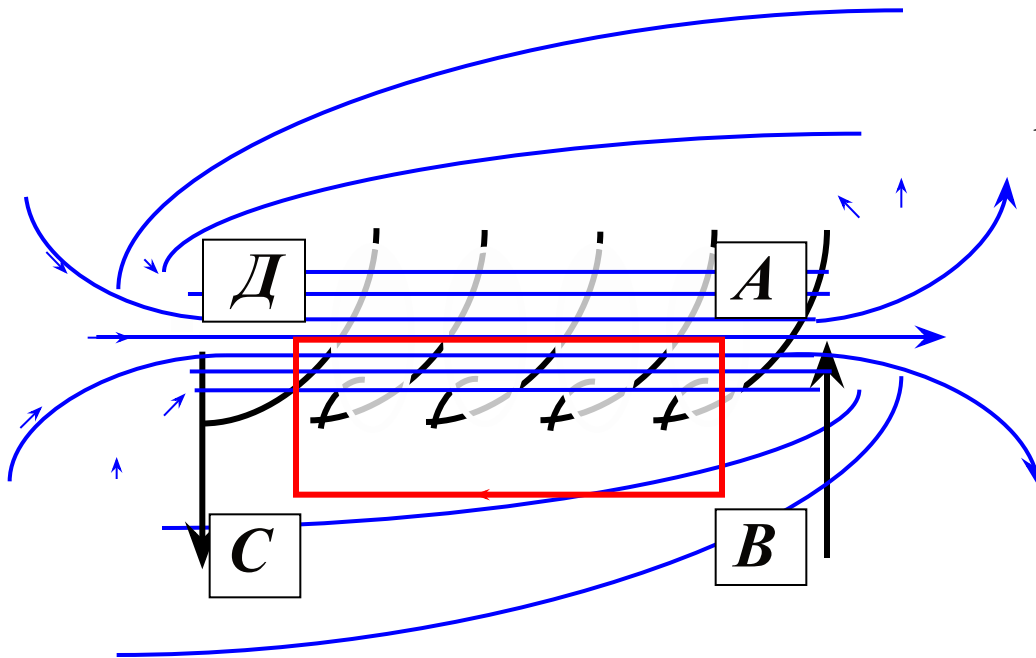
Пусть длинный соленоид с током I имеет n витков на единицу длины.

Если шаг винтовой линии мал, то каждый виток соленоида можно заменить замкнутым витком.

Для расчета поля внутри соленоида выберем прямоугольный контур и вычислим циркуляцию магнитного поля по этому контуру.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



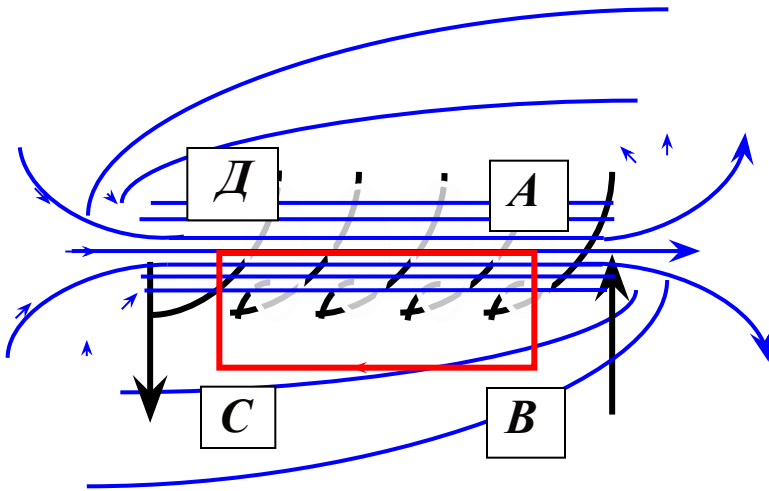
Циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру $ABCD$, который охватывает N витков, вычислим по формуле:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}_l dl = \mu_0 NI$$

Интеграл по $ABCD$ можно представить в виде четырех интегралов: по AB , BC , CD и DA .

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



На участках AB и CD контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = 0$.

На участке DA контур совпадает с линией магнитной индукции и циркуляция вектора $\mathbf{B}$ равна B_l .

На участке BC вне соленоида $B = 0$

В итоге получаем:

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \oint_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI$$

Или:
$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

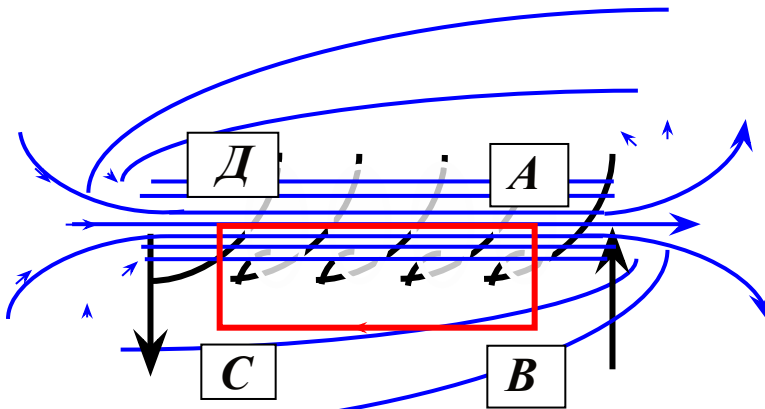
Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида

Поскольку $N/l = n$, то окончательно получим

$$B = \mu_0 n I$$

Таким образом, поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами пренебрегаем). Произведение nI называется числом *ампервитков* соленоида и относится к его характеристикам.



Некорректность при выводе формулы: интеграл по CB принят равным нулю. Строгий подход: линии магнитного поля замкнуты и внешнее поле не равно нулю. Однако, это некорректность принципиально на результате не отражается.

Самостоятельно: *расчет магнитного поля тороида.*