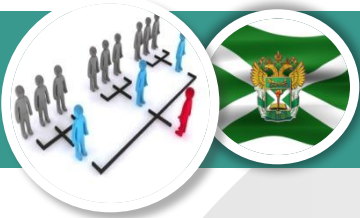


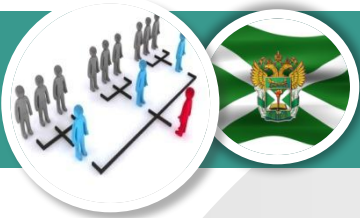
Тема «Теория игр и принятие решений»





Учебные вопросы:

- ❖ 1. Предмет и задачи теории игр.
- ❖ 2. Матричные игры. Равновесная ситуация.
- ❖ 3. Смешанные стратегии матричных игр.
- ❖ 4. Игры с природой.



1. Предмет и задачи теории игр.

Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается теория игр.

Методы и рекомендации теории игр применимы к многократно повторяющимся конфликтным ситуациям. Если конфликтная ситуация реализуется ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации.

Игра ведется по определенным правилам. Суть игр состоит в том, что каждый участник принимает такое решение, которое, как он полагает, обеспечит ему наилучший исход. Исходом игры называется значение некоторой функции, называемой *функцией выигрыша* (платежной функцией), которая может задаваться в матричном или аналитическом виде.



1. Предмет и задачи теории игр.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игр.

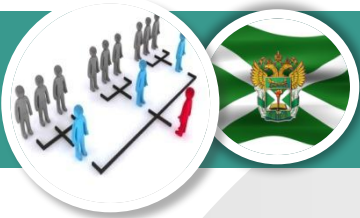
Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным. В зависимости от этого игры подразделяются на *конечные* и *бесконечные*.

Игра состоит из отдельных партий.

Партия – это каждый вариант реализации игры.

В партии игроки совершают ходы.

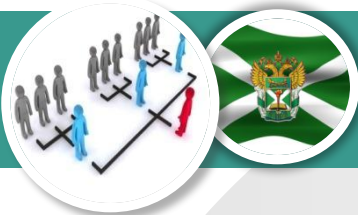
Ход – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения.



2. Матричные игры:

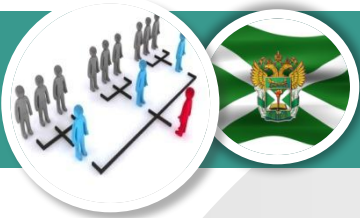
- ❖ Пусть в игре участвуют два игрока. Игрок A имеет m стратегий, а игрок B – n стратегий.
- ❖ Обозначим стратегии игрока A как $A1, A2, \dots, A_m$, а стратегии игрока B – как $B1, B2, \dots, B_n$.
- ❖ Если игрок A выбрал стратегию A_i , а игрок B – стратегию B_k , то выигрыш игрока A составит a_{ik} , а игрока B – b_{ik} , причем

$$a_{ik} = -b_{ik} \quad (1)$$



2. Матричные игры:

- ❖ Поэтому при анализе такой игры достаточно рассмотреть выигрыш только одного игрока, например выигрыш a_{ik} игрока А. Зная выигрыш a_{ik} по формуле (1) легко определить выигрыш b_{ik} .
- ❖ Матричные игры называются *парными играми с нулевой суммой*, в которых выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.
- ❖ Если известны все значения a_{ik} для каждой пары стратегий $\{A_i, B_k\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$, то их удобно записать в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы – стратегиям игрока В (табл. 1).



2. Матричные игры:

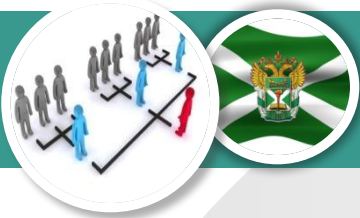
Таблица 1.

	B1	B2	...	Bn
A1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Чаще эти выигрыши записывают в виде платежной матрицы (матрицы игр) размера , поэтому такие игры называются матричными играми :

Чаще
выигр

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



2. Матричные игры:

Равновесная ситуация

❖ Пусть матричная игра $m \times n$ задана платежной матрицей

$$\text{❖ } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока , а столбцы – стратегиям игрока . В теории игр предполагается, что оба игрока действуют разумно, т.е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим для себя образом.

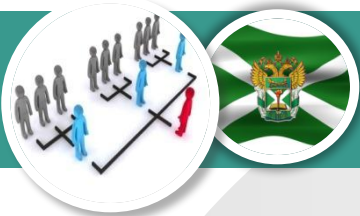


2. Матричные игры:

❖ Определим оптимальные стратегии каждого из игроков. Начнем с анализа стратегий игрока А. На стратегию A_i игрока А игрок В ответит такой стратегией B_k , при которой выигрыш игрока А будет минимальным. Аналогично игрок В будет отвечать на все m стратегий игрока А. Другими словами, найдем в каждой строке матрицы минимальный элемент (минимальные выигрыши игрока А)

$$\alpha_i = \min_k a_{ik}, i = 1, 2, \dots, n$$

и запишем их в правом столбце табл. 2.



2. Матричные игры:

	B_1	B_2	...	B_k	...	B_n	Минимальные выигрыши игрока A
A_1							
A_2	a_{11}	a_{12}	⊠	a_{1k}	⊠	a_{1n}	α_1
...	a_{21}	a_{22}	⊠	a_{2k}	⊠	a_{2n}	α_2
A_i	a_{i1}	a_{i2}	⊠	a_{ik}	⊠	a_{in}	α_i
...	a_{m1}	a_{m2}	⊠	a_{mk}	⊠	a_{mn}	α_m
A_m							
Максимальные выигрыши игрока A	β_1	β_2	⊠	β_k	⊠	β_n	

Действуя разумно, игрок остановится на той стратегии , для которой окажется максимальным. Поэтому среди чисел выбираем максимальное число

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_k a_{ik} \quad (3)$$



2. Матричные игры:

❖ Принцип построения стратегии игрока А, основанный на максимизации минимальных выигрышей, называется **принципом максимина (maxmin)**.

❖ Проведем анализ стратегий игрока В. Для этого найдем в каждом столбце матрицы максимальный элемент (максимальные выигрыши игрока А):
$$\beta_k = \max_i a_{ik}, k = 1, 2, \dots, n$$

❖ И запишем их в нижней строке табл. 2. Действуя разумно, игрок В остановится на той стратегии β_k , для которой $\beta_k = \max_i a_{ik}$
выбираем минимальное число

$$\beta_k = \min_k \beta_k = \min_k \max_i a_{ik} \quad (4)$$

❖ Число β называется *верхней ценой игры*.



2. Матричные игры:

- ❖ Принцип построения стратегии игрока В, основанный на минимизации максимальных выигрышей, называется **принципом минимакса (minmax)**.

- ❖ Нижняя цена игра α и верхняя цена игра β связаны неравенством

$$\alpha = \beta = a_{i, opt, k, opt} \quad \alpha \leq \beta. \quad (5)$$

- ❖ Если $\max_i \min_k a_{ik} = \min_k \max_i a_{ik}$ или $a_{i, opt, k, opt}$,
 $(A_{i, opt}, B_{k, opt})$ (6)

- ❖ то ситуация оказывается **равновесной**, и ни один игрок не заинтересован в том, чтобы ее нарушить. В том случае, когда верхняя цена игры равна нижней, их называют просто *ценой игры*.

- ❖ Если $\alpha = \beta$, то такую игру называют также *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий $(A_{i, opt}, B_{k, opt})$ *седловой точкой матрицы*. Цена $v = \bar{a}_{i, opt, k, opt}$



3. Смешанные стратегии матричных игр

❖ Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

❖ В табл. 4 приведен пример, когда нижняя цена игры не совпадает с верхней ценой игры $\alpha \neq \beta$.



3. Смешанные стратегии матричных игр

Таблица 4.

	B1	B2	B3	Минимальные выигрыши игрока А
A_1	4	1	-3	-3
A_2	-2	1	3	-2
A_3	0	2	-3	-3
Максимальные выигрыши игрока В	4	2	3	

Здесь $\alpha = -2$, а $\beta = 2$



3. Смешанные стратегии матричных игр

- ❖ Обратимся к общему случаю матричной игры, представленной в табл. 2. Обозначим через $p_1, p_2, \dots, p_m$ вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$
- ❖ Для этих вероятностей выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1; p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_m \geq 0 \quad (8)$$

- ❖ Вектор $\bar{p} = \bar{p}(p_1, p_2, \dots, p_m)$, проекция которого удовлетворяет условиям (8), полностью определяет характер игры игрока A и называется его **смешанной стратегией**. Механизм случайного выбора чистых стратегий, которым пользуется игрок A , обеспечивает ему бесконечное множество смешанных стратегий.



3. Смешанные стратегии матричных игр

- ❖ Аналогично, вектор $\bar{q} = \bar{q}(q_1, q_2, \dots, q_m)$, проекция которого удовлетворяет условиям (9),

$$\sum_{k=1}^n q_{ki} = 1; q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_n \geq 0 \quad (9)$$

- ❖ полностью определяет характер игры игрока B и называется *смешанной стратегией игрока B* . Игрок B , как и игрок A , располагает бесконечным множеством смешанных стратегий.



3. Смешанные стратегии матричных игр

- ❖ Пусть игроки A и B применяют и смешанные стратегии и соответственно, т.е. игрок A использует стратегию A_i с вероятностью p_i , а игрок B – стратегию B_k с вероятностью q_k . Поскольку события A_i и B_k независимы, то вероятность появления комбинации (A_i, B_k) равна произведению вероятностей p_i и q_k , т.е. . При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайными становятся и величины выигрышей игроков.



3. Смешанные стратегии матричных игр

- ❖ Поэтому выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) определяют его математическим ожиданием, рассчитываемым по формуле

$$E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i q_k \quad (10)$$

Функция (10) называется *платежной функцией игры с матрицей*, заданной в табл. 5.

- ❖ *Нижней ценой игры* называется число α , рассчитываемое по формуле:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) \quad (11)$$

- ❖ *Верхней ценой игры* называется число β , рассчитываемое по формуле:

$$\beta = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) \quad (12)$$



3. Смешанные стратегии матричных игр

Таблица 5.

	B_1	B_2	...	B_k	...	B_n	Вероятности использовани я чистых стратегий игроком А
A_1	a_{11}	a_{12}	⌘	a_{1k}	⌘	a_{1n}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}	⌘	a_{2k}	⌘	a_{2n}	p_2
...	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘
A_i	a_{i1}	a_{i2}	⌘	a_{ik}	⌘	a_{in}	p_i
...	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘
A_m	a_{m1}	a_{m2}	⌘	a_{mk}	⌘	a_{mn}	p_m
Вероятности использования чистых стратегий игроком В	q_1	q_2	⌘	q_k	⌘	q_n	



3. Смешанные стратегии матричных игр

Оптимальными смешанными стратегиями называются стратегии, удовлетворяющие соотношению (сравнить с формулой (6)).

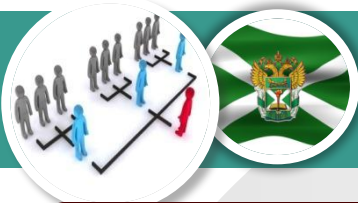
$$\max_p \min_q E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_q \max_p E(A, \bar{p}, \bar{q}) = E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}). \quad (13)$$

Величину $v = E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt})$ определенную соотношением (13), называют *ценой игры*.

Векторы $\bar{p}_{opt}$ и $\bar{q}_{opt}$ называются **оптимальными смешанными стратегиями**, если они образуют седловую точку платежной функции игры $E(A, \bar{p}, \bar{q})$, т.е. удовлетворяют неравенству (сравнить с неравенством (7))

$$E(A, \bar{p}, \bar{q}_{opt}) \leq E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}) \leq E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}). \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что в седловой точке $(\bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt})$ платежная функция $E(A, \bar{p}, \bar{q})$ достигает максимума по смешанным стратегиям $\bar{p}$ игрока A и минимума по смешанным стратегиям $\bar{q}$ игрока B .



3. Смешанные стратегии матричных игр

Теорема 1

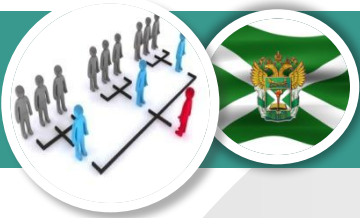
Теорема 1. Основная теорема теории матричных игр. (Дж. фон Нейман).

Для матричной игры с любой матрицей A величины $\max_p \min_q E(A, \bar{p}, \bar{q})$ и $\min_q \max_p E(A, \bar{p}, \bar{q})$ существуют и равны между собой:

$$\max_p \min_q E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_q \max_p E(A, \bar{p}, \bar{q}).$$

Более того, существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях $(\bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt})$, для которой выполняется соотношение

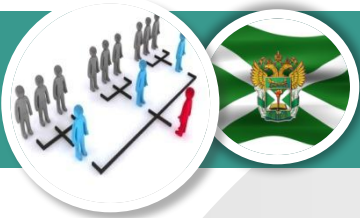
$$E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}) = \max_p \min_q E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_q \max_p E(A, \bar{p}, \bar{q}).$$



3. Смешанные стратегии матричных игр

Теорема 2

- ❖ Пусть $\bar{p}_{opt} = \bar{p}_{opt}(p_{1,opt}, p_{2,opt}, \dots, p_{m,opt})$, $\bar{q}_{opt} = \bar{q}_{opt}(q_{1,opt}, q_{2,opt}, \dots, q_{n,opt})$ – оптимальные смешанные стратегии и $v = E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt})$ – цена игры.
- ❖ Оптимальная смешанная стратегия $\bar{p}_{opt}$ игрока A складывается только из тех чистых стратегий $A_i, i = 1, 2, \dots, m$ (т.е. только те вероятности, могут отличаться от нуля), для которых
$$\sum_{k=1}^n a_{ik} q_{k,opt} = v$$
- ❖ Аналогично, только те вероятности $q_k, k = 1, 2, \dots, n$ могут отличаться от нуля, для которых
$$\sum_{i=1}^m a_{ik} p_{i,opt} = v$$



3. Смешанные стратегии матричных игр

Графические решения матричных игр

- ❖ Графический метод применим к тем играм, в которых хотя бы один игрок имеет две стратегии.
- ❖ Рассмотрим игру $2 \times n$, представленную в табл. 6. Эта игра не имеет седловой точки. Согласно теореме имеем

$$\begin{aligned} v &= \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^2 a_{ik} P_{i,opt} = \min_{1 \leq k \leq n} (a_{1k} P_{opt} + a_{2k} (1 - P_{opt})) = \\ &= \max_p \min_{1 \leq k \leq n} (a_{1k} p + a_{2k} (1 - p)) \end{aligned} \quad (15)$$

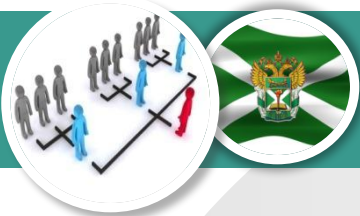


3. Смешанные стратегии матричных игр

❖ Максимум функции $\min_{1 \leq k \leq n} (a_{1k}p + a_{2k}(1-p))$ (16) найдем, построив ее график. Для этого поступаем следующим образом. Построим графики прямых

$$w_k = a_{1k}p + a_{2k}(1-p) = (a_{1k} - a_{2k})p + a_{2k} \quad (17)$$

для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ в системе координат pOw (рис.1). В соответствии с требованием (16) на каждой из построенных прямых определяются и отмечаются наименьшие значения. На рис. 2 эти значения выделены полужирной ломаной линией. Эта ломаная огибает снизу все семейство построенных прямых и называется *нижней огибающей семейства*.

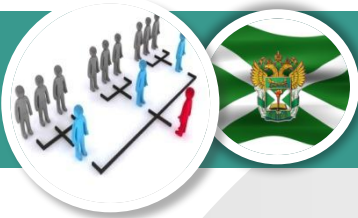


3. Смешанные стратегии матричных игр

Пример 3. Найти решение игры вида $2 \times n$, приведенной в табл. 7.

Таблица 7.

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	<i>Вероятности использования чистых стратегий игроком A</i>
A1	6	4	3	1	-1	0	p
A2	-2	-1	1	0	5	4	1-p
<i>Вероятности использования чистых стратегий игроком B</i>	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	



3. Смешанные стратегии матричных игр

Р е ш е н и е . Проведем анализ игры на наличие седловой точки.

Нижняя цена игры равна -1, верхняя равна 1. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Построим график нижней огибающей (16). Предварительно запишем уравнения прямых (17):

$$w_1 = 6p - 2(1 - p) = 8p - 2;$$

$$w_2 = 4p - 1 \cdot (1 - p) = 5p - 1;$$

$$w_3 = 3p + (1 - p) = 2p + 1;$$

$$w_4 = p + 0 \cdot (1 - p) = p;$$

$$w_5 = -p + 5 \cdot (1 - p) = -6p + 5;$$

$$w_6 = 0 \cdot p + 4(1 - p) = -4p + 4.$$



3. Смешанные стратегии матричных игр

Графики данных прямых, построенных в системе координат pOw , представлены на рис.3.

Нижняя огибающая выделена на рис. 3 полужирной ломаной линией. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении прямых w_4 и w_5 . Решая уравнение $p - 6p + 5$, получим $p_{opt} = \frac{5}{7}$. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока A , равна $v = E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}) = \frac{5}{7}$.

Таким образом, цена игры и оптимальная стратегия игрока A равны:

$$v = \frac{5}{7}; \quad \bar{P}_{opt} = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7} \right)$$