

Линейное программирование



Примеры задач линейного программирования



Задача о распределении ресурсов



Для изготовления двух видов продукции A и B используют три вида ресурсов:

Ресурсы	Затраты ресурсов		Запасы ресурсов
	изделие A	изделие B	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
Доход	2	3	max

Задача о распределении ресурсов



Изучение рынка сбыта показало, что объем выпуска изделий A не должен превышать объема изделий B более, чем на три единицы

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором выручка от ее реализации будет максимальной

Задача о распределении ресурсов



Решение



Введем переменные

x_1 – число единиц продукции A , запланированных к производству

x_2 – число единиц продукции B , запланированных к производству

Выручка: $F = 2x_1 + 3x_2$

Цель: $F \rightarrow \max$

Задача о распределении ресурсов



Решение Ограничения

Ресурсы	Затраты ресурсов		Запасы ресурсов
	изделие A	изделие B	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
Доход	2	3	max

1) Условие неотрицательности: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2) На запас сырья 1: $3x_1 + 3x_2 \leq 15$

3) На запас сырья 2: $2x_1 + 6x_2 \leq 18$

4) На запас сырья 3: $4x_1 \leq 16$

5) Соотношение между 1 и 2: $x_1 - x_2 \leq 3$

Задача о распределении ресурсов



Математическая модель

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ 4x_1 \leq 16, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Задача о рационе (о диете)



В дневной рацион питания цыплят включают два продукта П1 и П2. Причем продукта П1 должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта П1 составляет 2 ден. ед., а продукта П2 – 4 ден. ед.

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей

Задача о рационе (о диете)



Решение



Введем переменные

x_1 – число единиц продукта П1, входящего в дневной рацион

x_2 – число единиц продукта П2, входящего в дневной рацион

Стоимость дневного рациона :

$$F = 2x_1 + 4x_2$$

Цель:

$$F \rightarrow \min$$

Задача о рационе (о диете)

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2



Решение



Ограничения

1) Условие неотрицательности:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

2) Ограничение на максимальное содержание
продукта П1: $x_1 \leq 200$

3) Ограничения на минимальное содержание
питательных веществ:

$$0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 120 \quad 0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 160$$

Задача о рационе (о диете)



Математическая модель



Найти рацион питания $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \leq 200, \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 120, \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 160, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

при котором целевая функция $F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$
(принимает минимальное значение)

Основные понятия



Терминология



Термин **линейное программирование**

линейное означает: ищется экстремальное значение (min или max) линейной целевой функции при линейных ограничениях (линейных уравнениях или неравенствах)

Линейное программирование (ЛП) — это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения линейны

Общая задача линейного программирования



Задача линейного программирования в общем виде (ЗЛП) – это задача о нахождении экстремума линейной функции на множестве, заданном линейными уравнениями и неравенствами

Допустимый план – любой элемент допустимого множества

Оптимальный план – допустимый план, являющийся решением ЗЛП

Каноническая задача линейного программирования



$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Каноническая задача линейного программирования

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

В канонической задаче ЛП (КЗЛП):

- 1) находится максимум целевой функции
- 2) все ограничения имеют вид уравнений
- 3) все переменные неотрицательны

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:

- 1) целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) все ограничения - уравнения
- 3) все переменные неотрицательны



Целевая функция $F \rightarrow \min$

Решение. Переходим к **$(-F) \rightarrow \max$** (переходим к противоположной функции)

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:

- 1) целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) все ограничения - уравнения
- 3) все переменные неотрицательны



В ограничениях есть неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

Решение. Вводим новую переменную $x_3 \geq 0$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 - x_3 = b$$

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:

- 1) целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) все ограничения - уравнения
- 3) все переменные неотрицательны



Есть не положительные переменные

Решение. $x_i \leq 0 \Rightarrow t_i = -x_i \geq 0$

не известен знак $x_i \Rightarrow$

вводим $x_k \geq 0, x_l \geq 0 : x_i = x_k - x_l$

Сведение общей ЗЛП к канонической

В канонической задаче:

- 1) целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) все ограничения - уравнения
- 3) все переменные неотрицательны



Вывод

Каждую задачу линейного программирования **можно**
привести к канонической форме

Теоретическое обоснование



Теорема

Если целевая функция принимает максимальное значение в некоторой точке допустимого множества, то она принимает это значение и некоторой вершине этого множества

Вывод

Оптимальное решение следует искать в вершинах допустимого множества

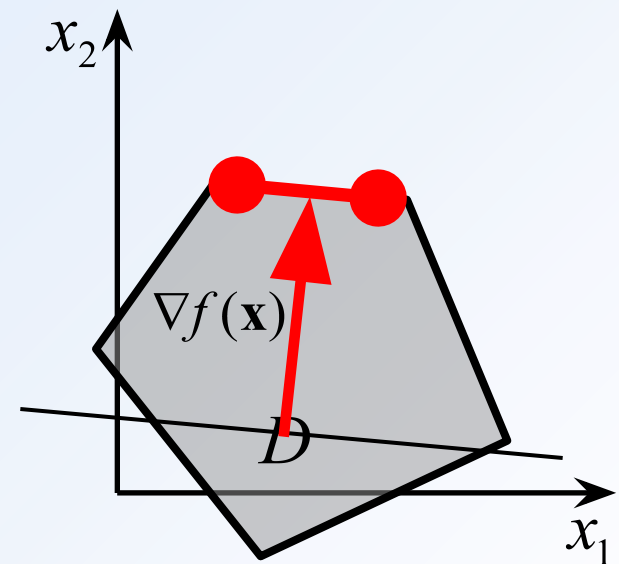
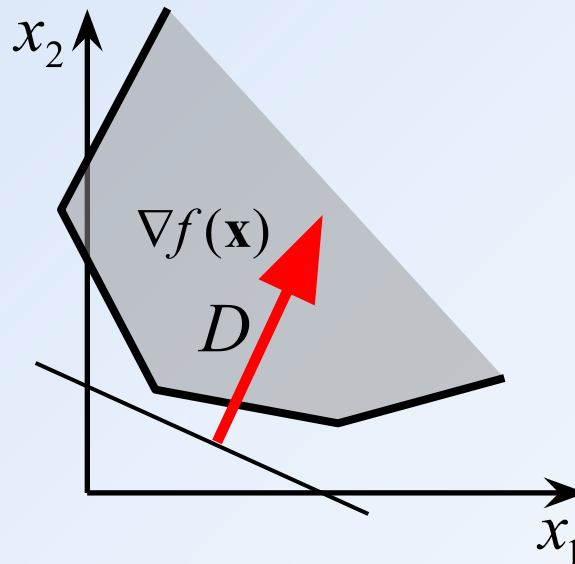
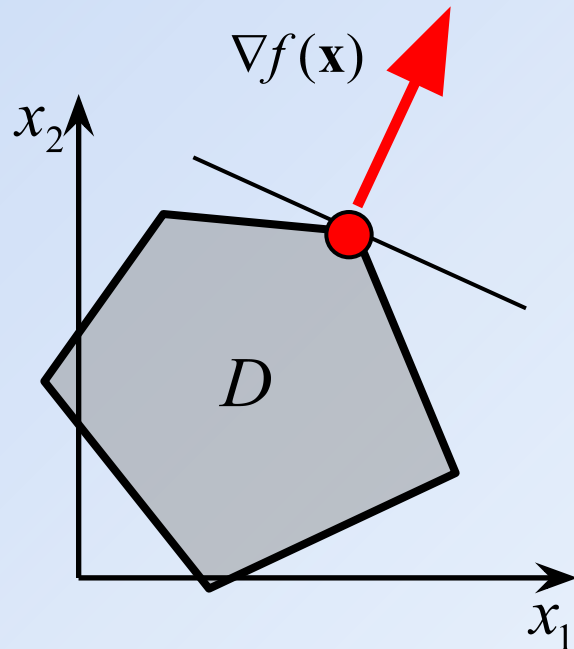
Варианты решения ЗЛП

$$F \rightarrow \max$$

Решение
достигается в
вершине

Целевая
функция не
ограничена

Бесконечное
множество
решений

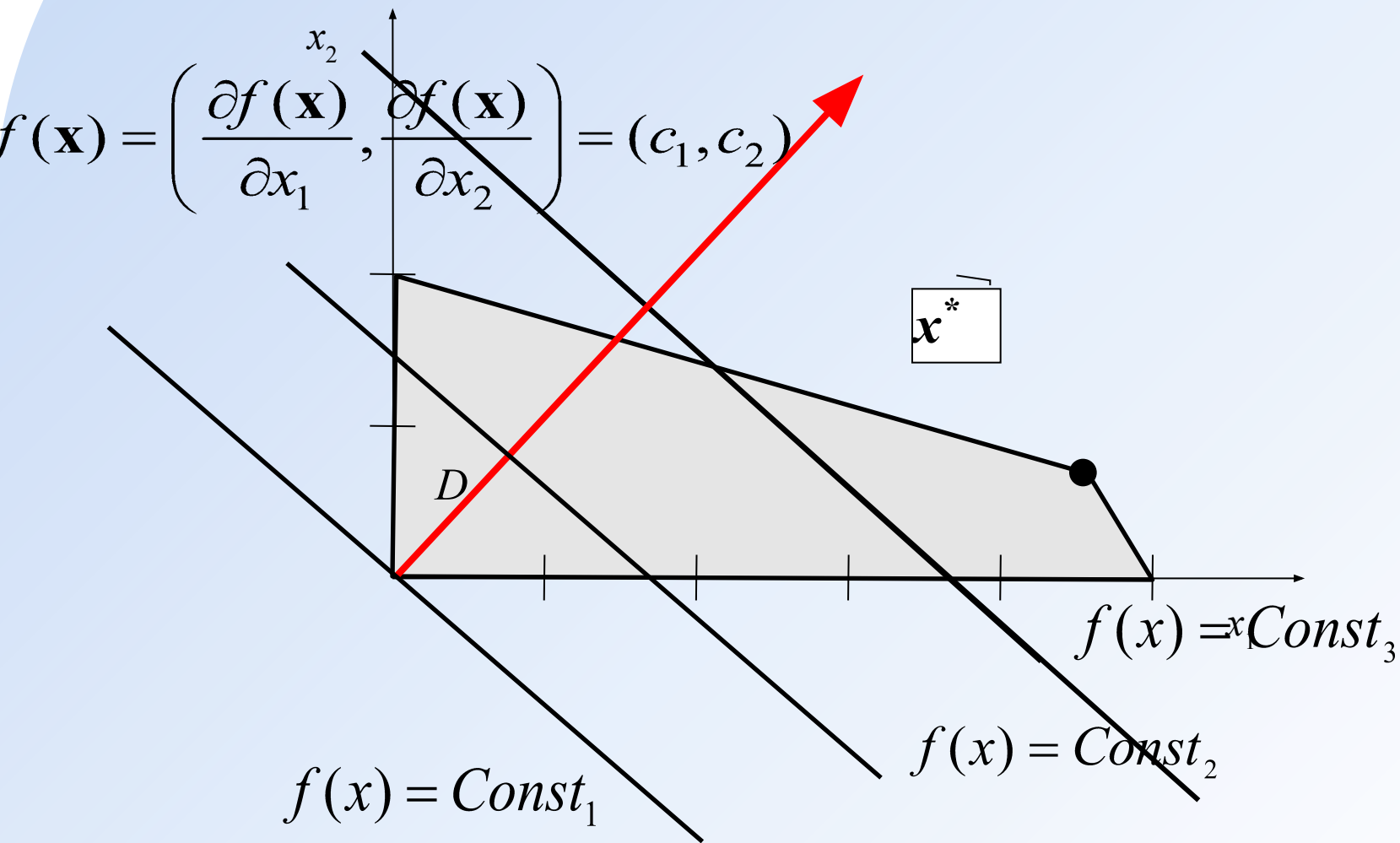


Графический метод решения



Графическое решение

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$



Графическое решение



Алгоритм решения

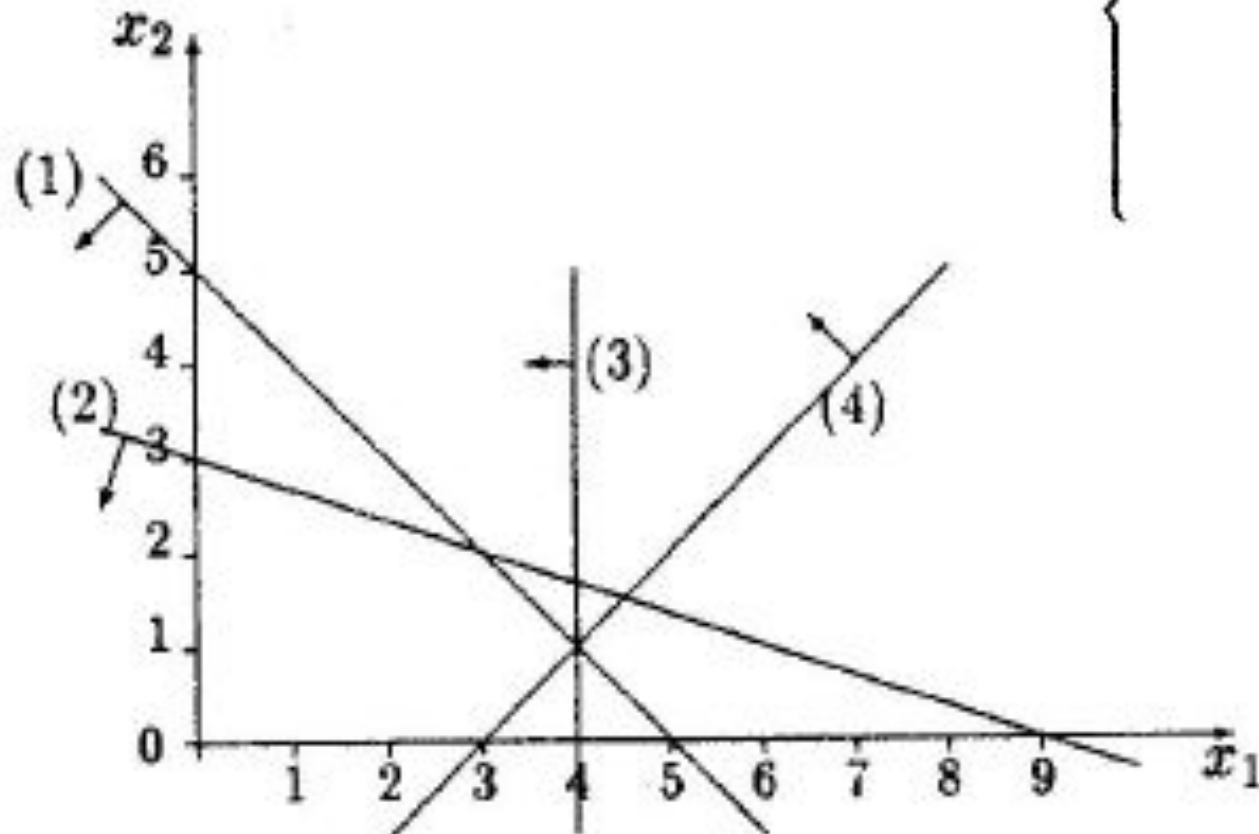
Построить на плоскости допустимое множество

Найти градиент целевой функции

Построить прямую – **линию уровня** целевой функции

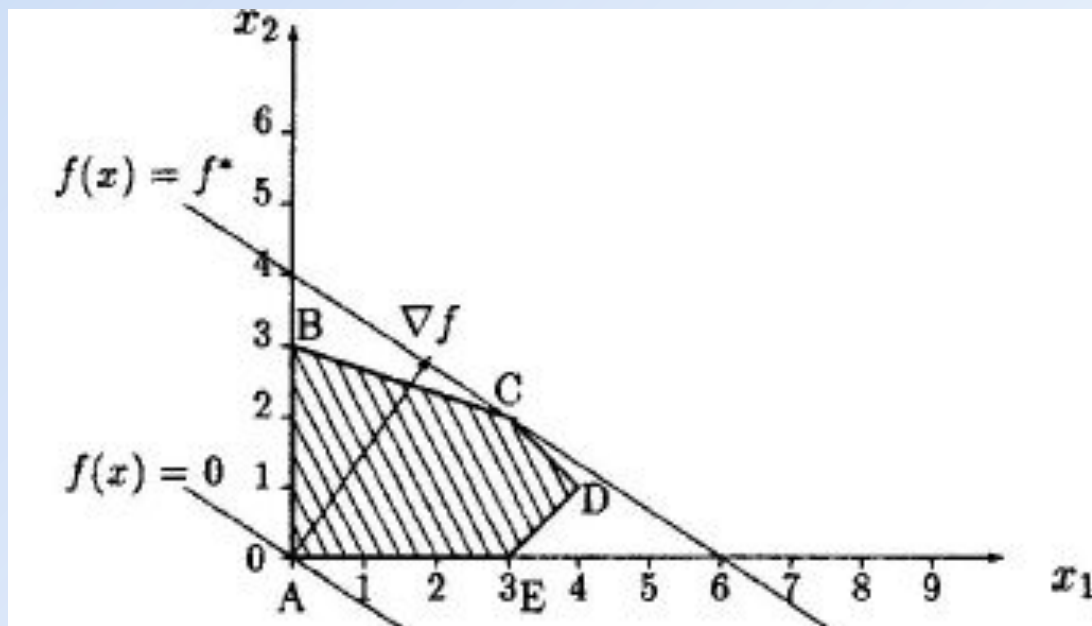
Найти оптимальный план x^*

Задача о распределении ресурсов



$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ 4x_1 \leq 16, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Задача о распределении ресурсов



С – оптимальный план

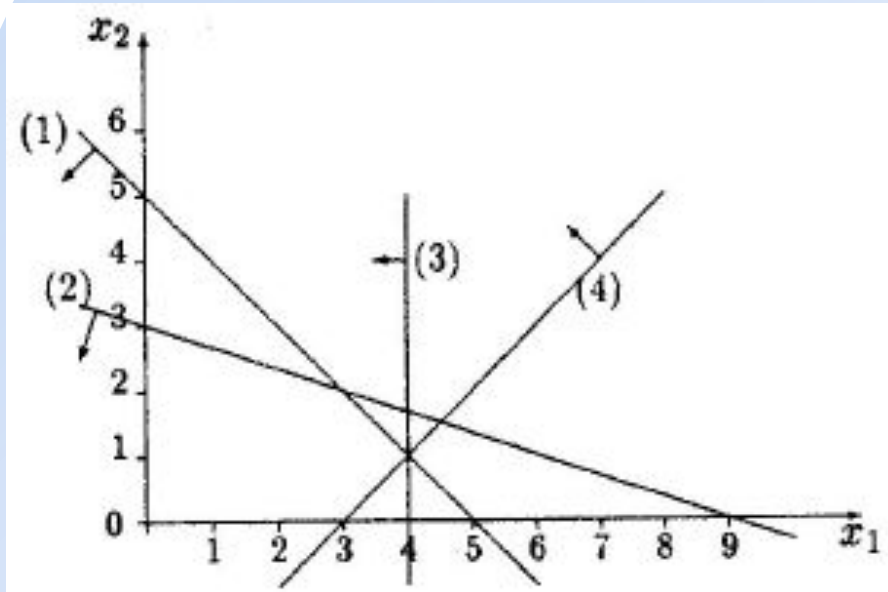
Задача о распределении ресурсов

Нахождение С

Координаты С – из системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 15, \\ 2x_1 + 6x_2 = 18. \end{cases}$$

Ответ: С(3;2)



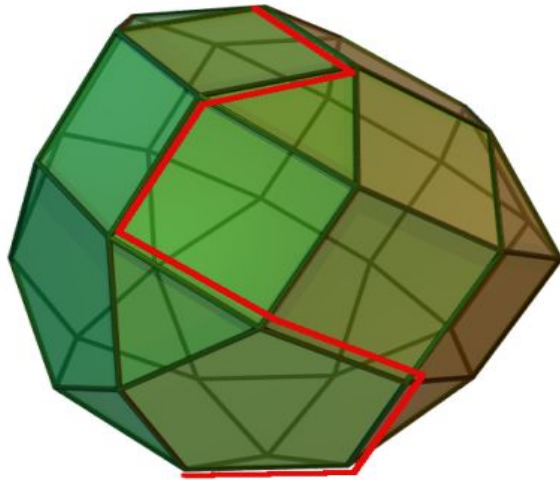
Оптимальный план

$$x_1^* = 3, x_2^* = 2$$

Оптимальное значение

$$f(x^*) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$

Симплекс-метод



Симплекс — n -мерный
многогранник



Основные теоретические сведения



Система линейных уравнений — **система с базисом**, если в каждом уравнении есть базисная переменная

Базисная переменная уравнения: входит в уравнение с коэффициентом +1 и отсутствует в остальных уравнениях системы

Остальные переменные свободные

Специальная задача ЛП — каноническая задача ЛП, в которой:

- все правые части уравнений неотрицательны;
- система уравнений — система с базисом;
- в целевой функции нет базисных переменных

$$\begin{cases} f = x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Основные теоретические сведения



Базисное решение — решение системы, соответствующее нулевым значениям свободных переменных.

$$(1; 3; 0; 0) \Leftarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Опорный план — базисное решение, удовлетворяющее условию неотрицательности.

Опорный план (решение) — вершина допустимого множества.

Основная теорема ЛП



Если каноническая задача линейного программирования разрешима, то её оптимальный план содержится среди конечного числа её опорных планов.

Симплекс-метод — метод перебора опорных решений.

Пример



$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 + 3x_2 \leq 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

Каноническая форма задачи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 150 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 300 \end{cases}$$

Она же — специальная!

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

Пример

Опорный план:

$$(0; 0; 150; 300) \Leftarrow \begin{cases} x_3 = 150 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 300 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Значение целевой функции

$$f(0; 0; 150; 300) = 0 \quad \Leftarrow f = x_1 + 2x_2$$

План не оптимальный!

Увеличиваем x_2

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 \leq 100 \text{ (второе уравнение!)}$$

$$x_2 = 100 \Rightarrow f(0; 100; 50; 0) = 200$$

Пример

Проверка оптимальности

Приведение задачи к специальному виду:

$$\begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Выражение целевой функции через свободные переменные

$$f = x_1 + 2x_2 = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$$

План не оптимальный!

Пример

Увеличиваем $x_1 \Leftarrow f = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$

$$x_4 = 0 \Rightarrow x_1 \leq 75 \quad \Leftarrow \begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Опорный план: $(75; 75; 0; 0)$

Соответствует базисным переменным x_1, x_2

Значение целевой функции

$$f(75; 75; 0; 0) = 225 \Leftarrow f = x_1 + 2x_2$$

Пример

Проверка оптимальности

Приведение задачи к специальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 75 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 75 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

Выражение целевой функции через свободные переменные

$$f = x_1 + 2x_2 = 225 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$(75; 75; 0; 0)$ – оптимальный план

Пример

Табличная запись решения

I этап

$$\begin{cases} x_3 = 150 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 300 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$f = x_1 + 2x_2$$

$$f(0;0;150;300) = 0$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

1. Самое маленькое отрицательное число в последней строке

2. Самое маленькое отношение свободного члена к положительному числу в столбце

Пример

Табличная запись решения

II этап

$$\begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 50 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \\ f = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 \end{cases}$$

$$f = 200 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$$

$$f(0;100;50;0) = 200$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_2	1/3	1/3	100
x_3	2/3	-1/3	50
f	-1/3	2/3	200

1. Самое маленькое отрицательное число в последней строке

2. Самое маленькое отношение свободного члена к положительному числу в столбце

Пример

Табличная запись решения

III этап

$$\begin{cases} x_1 = 75 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 75 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ f = 225 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	$3/2$	$-1/2$	75
x_2	$-1/2$	$1/2$	75
f	1/2	1/2	225

$(75; 75; 0; 0)$ – оптимальный план

Нет отрицательных чисел!

Специальная задача ЛП

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \dots + a_{1n}(-x_n) + b_1, \\ x_{n+2} = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \dots + a_{2n}(-x_n) + b_2, \\ \dots \\ x_{n+m} = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \dots + a_{mn}(-x_n) + b_m. \end{cases}$$

Базисные
переменные

Свободные
переменные

$$f = c + (-c_1)(-x_1) + (-c_2)(-x_2) + \dots + (-c_n)(-x_n) \rightarrow \max$$

$$\text{Все } x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n + m)$$

$$\text{Все } b_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, m)$$

Симплексная таблица

Базисные переменные	Свободные переменные					Свободные члены
	$-x_1$	$\dots$	$-x_s$	$\dots$	$-x_n$	
x_{n+1}	a_{11}	$\dots$	a_{1s}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+r}	a_{r1}	$\dots$	a_{rs}	$\dots$	a_{rn}	b_r
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+m}	a_{m1}	$\dots$	a_{ms}	$\dots$	a_{mn}	b_m
Опорное решение f	c_1	$(0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_{n+m})$	c_s	$\dots$	c_n	c

Алгоритм симплекс-метода

Подготовительный этап

1. Приведение к каноническому виду

2. Приведение к специальному виду

3. Составление симплексной таблицы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 + 3x_2 \leq 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 + 150, \\ x_4 = -x_1 - 3x_2 + 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$f = -(-x_1) - 2(-x_2) \rightarrow \max$$

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

1. Проверка оптимальности (*все ли числа в последней строке неотрицательные*)
2. Проверка на неразрешимость (*есть ли столбец со всеми отрицательными числами*)

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	$3/2$	$-1/2$	75
x_2	$-1/2$	$1/2$	75
f	$1/2$	$1/2$	225

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

3. Выбор ведущего столбца (по наименьшему отрицательному числу в последней строке)

4. Выбор ведущей строки (по наименьшему отношению свободных членов к положительным числам ведущего столбца)



Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0



Ведущий элемент

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_2	1/3	1/3	100
x_3	2/3	-1/3	50
f	-1/3	2/3	200



Ведущий элемент

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

5. Замена базисной переменной: *переменная ведущего столбца становится базисной, ведущей строки — свободной*

6. Преобразование ведущего элемента: *вместо него записывается его обратная величина*

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3			
x_2		1/3	
f			

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

7. Преобразование ведущей строки: *делим на ведущий элемент все остальные элементы*

8. Преобразование ведущего столбца: *делим на ведущий элемент со знаком минус все остальные элементы*

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3		$-1/3$	
x_2	$1/3$	$1/3$	100
f		$2/3$	

Алгоритм симплекс-метода



Основной этап

8. Преобразование остальных элементов таблицы *по правилу прямоугольника*

Исходный элемент a	Значение d в ведущем столбце и той же строке
Значение c в ведущей строке и в том же столбце	Ведущий элемент b

Новое значение $a' = \frac{ab - cd}{b}$

Алгоритм симплекс-метода

Основной этап

1	1
1	3

$$\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1	1	150
x_4	1	3	300
f	-1	-2	0

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3		$-1/3$	
x_2	$1/3$	$1/3$	100
f		$2/3$	

1	150
3	300

$$\frac{150 \cdot 3 - 300 \cdot 1}{3} = 50$$

1	3
-1	-2

$$\frac{(-1) \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{3} = -\frac{1}{3}$$

3	300
-2	0

$$\frac{0 \cdot 3 - (-2) \cdot 300}{3} = 200$$

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3	$2/3$	$-1/3$	50
x_2	$1/3$	$1/3$	100
f	$-1/3$	$2/3$	200

Пример (распределении ресурсов)



Исходная модель

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 4x_1 \leq 16, \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Каноническая форма задачи:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, 6)$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Она же — специальная!

Пример (распределении ресурсов)

Симплекс-таблица

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	3	3	15
x_4	2	6	18
x_5	4	0	16
x_6	1	-1	3
f	-2	-3	0

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, 6)$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

План не
оптимальный

Задача разрешима

Пример (распределении ресурсов)

Симплекс-таблица

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	3	3	15
x_4	2	6	18
x_5	4	0	16
x_6	1	-1	3
f	-2	-3	0

Преобразованная таблица

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3	2	$-1/2$	6
x_2	$1/3$	$1/6$	3
x_5	4	0	16
x_6	$4/3$	$1/6$	6
f	-1	$1/2$	9

Ведущий элемент

План не
оптимальный

Задача разрешима

Пример (распределении ресурсов)

Симплекс-таблица

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_1$	$-x_4$	
x_3	2	$-1/2$	6
x_2	$1/3$	$1/6$	3
x_5	4	0	16
x_6	$4/3$	$1/6$	6
f	-1	$1/2$	9

Ведущий элемент

Преобразованная таблица

Базис	Свободные переменные		Свободные члены
	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	$1/2$	$-1/4$	3
x_2	$-1/6$	$1/4$	2
x_5	-2	1	4
x_6	$-2/3$	$1/2$	2
f	$1/2$	$1/4$	12

План
оптимальный!

$$x_1^* = 3, x_2^* = 2$$

$$f(x^*) = 12$$