

# ***ТРАНСЦЕДЕНТНЫЕ ЧИСЛА $\pi$ и $e$***

Выполнил: ученик 10-б класса

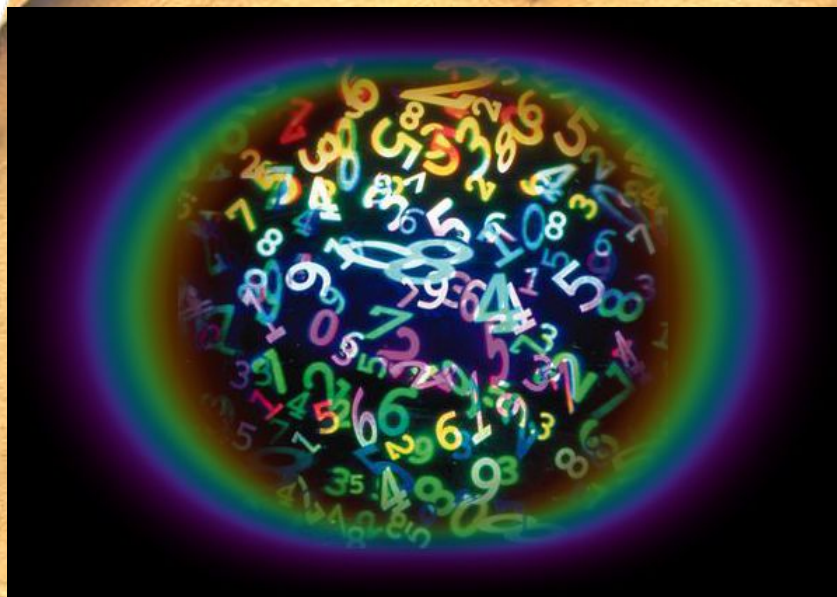
Атаев Владимир

Учитель Большакова Екатерина

Николаевна ГБОУ 489

Санкт-Петербург





Числа много тысячелетий назад вошли в жизнь и быт людей. Человек использует их не только при счете и вычислениях, он придумал различные игры с числами и шарады,

а некоторые числа наделил сверхъестественными свойствами. К таким «особенным» числам относятся математические константы  $\pi$  и  $e$ . Они имеют свои собственные обозначения, так как их нельзя записать точно с помощью цифр.



Числа 3,14 и 2,7 лишь одни из приближённых значений чисел  $\pi$  и  $e$ . Эти числа являются иррациональными и трансцендентными, для их точного определения не хватило бы и триллиона десятичных знаков.



**Иррациональные числа** не могут быть точно выражены ни целыми числами, ни арифметическими дробями, а представляются бесконечными и непериодическими десятичными дробями.





**Трансцендентное число** (от лат. *transcendere* — переходить, превосходить) — это число, не являющееся алгебраическим, т.е. не удовлетворяющее никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.



3.141592653589793238462643383  
 279502884197169399375105820974944  
 59230781640628620899862803482534211  
 70679821480865132823066470938446095  
 50582231 725359408 128481117  
 45028410 270193852 1105559644  
 622948 954930381 9644288109  
 75 665933446 128475 6482  
 3378678316 5271201909  
 145648566 9284603486  
 1045432664 8213393607  
 2602491412 7372458700  
 66063155881 74881520920 962829  
 25409171536 43678925903600113305  
 3054882046652 1384146931941511609  
 43305727036575 959195309218611738  
 19326117931051 18548074462379962  
 7495673518857 527248912279381  
 8301194912 9833673362  
 44065 66430

*Число  $\pi$*  — математическая константа, выражающая отношение длины окружности к длине её диаметра. Впервые в этом смысле символ  $\pi$  использовал британский математик *Уильям Джонс* в 1706 г.

В 1647 г. *Уильям Оутред* применил букву  $\pi$  для обозначения длины окружности. Это обозначение происходит от начальной буквы греческих слов  $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\phi\acute{\epsilon}\rho\epsilon\iota\alpha$  — окружность, периферия и  $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho\varsigma$  — периметр.





Приближение  $\pi \approx 22/7 \approx 3,1428$  нашёл величайший математик древности **Архимед** (III век до н.э.), в честь которого это отношение часто называют «*архимедовым числом*». Архимед, возможно, первым предложил способ вычисления  $\pi$  математическим способом.

Для этого он вписывал в окружность и описывал около неё правильные многоугольники. Принимая диаметр окружности за единицу, Архимед рассматривал периметр вписанного многоугольника как нижнюю оценку длины окружности, а периметр описанного многоугольника как верхнюю оценку.




$$\pi$$
$$3,1415$$
$$926535$$
$$897932384$$

Обозначение  $\pi$  как величины, равной 3,141592..., получило широкое распространение после того, как в своих трудах начиная с 1736 г. его стал применять выдающийся математик *Леонард Эйлер*.

На протяжении всего существования числа  $\pi$ , вплоть до наших дней, велась своеобразная «погоня» за десятичными знаками числа  $\pi$ . *Леонардо Фибоначчи* около 1220 г. определил три первых точных десятичных знака числа  $\pi$ .





Нидерландский математик *Лудольф ван Цейлен* (1540 – 1610), применив метод Архимеда, вычислил число  $\pi$  с 35 десятичными знаками. Лудольф завещал, чтобы найденные им знаки были высечены на его надгробном камне. В его честь число  $\pi$  современники называли «*лудольфовым числом*».

Математики XIX в. вычислили сотни десятичных знаков числа  $\pi$ . В 1853 г. З. Дазе получает 440, а У. Шенкс – 513 знаков. С появлением компьютеров количество верных десятичных знаков  $\pi$  резко возрастает. В 2011 г. ученые рассчитали последовательность с точностью в 10 триллионов цифр после запятой.





*Памятник числу «пи»,*  
известному еще древним  
людям, установлен на ступенях  
перед зданием  
Музея искусств в Сиэтле.

*Неофициальный праздник «День числа  $\pi$ »*  
отмечается 14 марта, которое в американском  
формате дат записывается как 3.14, что  
соответствует приближённому значению числа.



Число  $e$  появилось сравнительно недавно. Его иногда необоснованно называют «неперовым числом» в честь изобретателя логарифмов *Джона Непера* (1550 – 1617).



Впервые обозначение  $e$  ввёл швейцарский и российский математик, академик Петербургской АН **Леонард Эйлер** (1707 – 1783). Выбор буквы, возможно, связан с тем, что с неё начинается слово *exponential* («показательный», «экспоненциальный»). Эйлер вычислил точные 23 десятичные

знака числа  $e$ , используя его представление в виде бесконечного числового ряда. Соответственно,  $e$  обычно называют *числом Эйлера*.



**Приближенное значение числа  $e$  равно 2,718281828...**

- Стихотворная мнемофраза, помогающая его запомнить:
- *«Экспоненту помнить способ есть простой: два и семь десятых, дважды Лев Толстой»* (1828 – год рождения Л.Н. Толстого).



Константу  $e$  впервые вычислил швейцарский математик *Даниил Бернулли* (1700 – 1782) в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода.





Число  $e$  является *трансцендентным*, т.е. его нельзя получить в виде корня алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.



Это первое число, которое не было выведено как трансцендентное специально, его трансцендентность была доказана только в 1873 году французским математиком *Шарлем Эрмитом*.



Л. Эйлер открыл бесконечную цепную дробь  
для представления числа  $e$ :

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{\dots}}}}}$$

Дробь  $2721/1001$  дает значение числа  $e$  с шестью  
верными десятичными знаками, дробь  $878/323$  – с  
тремя верными десятичными знаками, а дробь  
 $87/32$  – с двумя.



## Способы определения числа $e$ :

- через предел

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

- через определенный интеграл

$$e = \int_0^1 \frac{1}{1 + \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)} dx$$



## Способы определения числа $e$ :

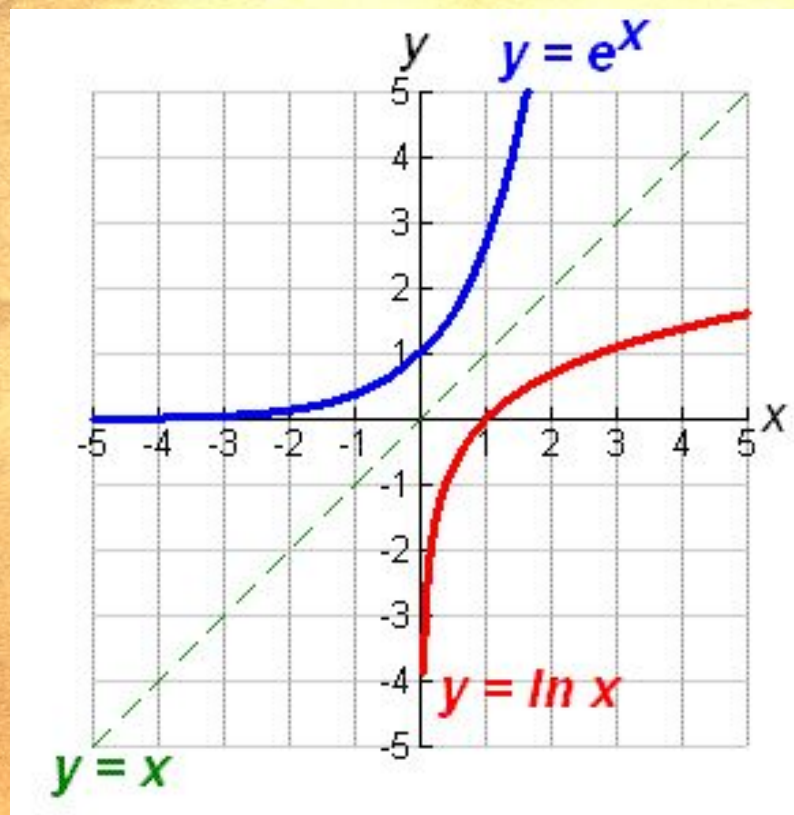
- как единственное число  $a$ , для которого выполняется:
- как единственное положительное число  $a$ , для которого верно:

$$\int_1^a \frac{dt}{t} = 1.$$

$$\frac{d}{dt} a^t = a^t.$$



Логарифмы по основанию  $e$  называются *натуральными* и обозначаются  **$\ln x$** .



Логарифмическую функцию, обратную показательной функции  $y = e^x$ , принято обозначать  **$y = \ln x$** .

Графики этих функций симметричны относительно прямой  $y = x$ .

Функция  $y = e^x$  обозначается также  **$y = \exp x$**  и называется

***экспоненциальной***.



## О числах $\pi$ и $e$

- Удивительно красива комбинация записи тождества взаимосвязи чисел  $\pi$  и  $e$ :

$$e^6 = \pi^5 + \pi^4$$

Совпадение вплоть до 4-го знака после запятой; расчёт на ПК показал величину 403,4287.

- Оказывается, что значения  $e^\pi$  и  $\pi^e$  примерно равны:

$$e^\pi \approx 23,14069262 \text{ и } \pi^e \approx 22,45915771$$

Доказать (без вычислений), что  $\pi^e < e^\pi$  можно многими способами.



***Спасибо за внимание***

