



Раздел 2. Логика предикатов



Понятие предиката

Высказывания, которые нельзя формализовать на языке логики высказываний:

Каждый любит сам себя. Значит кто-то кого-то любит.

Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.



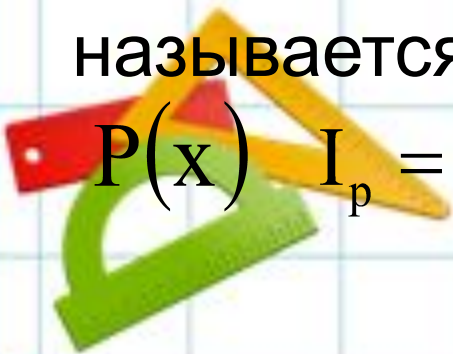
• Введём специальные обозначения:

- ✎ Специальные переменные, значениями которых являются объекты из соответствующих предметных областей: x и y .
- ✎ Свойства объектов и бинарные отношения между объектами: $P(x)$, $Q(x, y)$.
- ✎ Фраза вида «Все x обладают свойством P » записывать символически: $\forall x P(x)$
- ✎ «некоторые x обладают свойством P » записывать символически $\exists x P(x)$



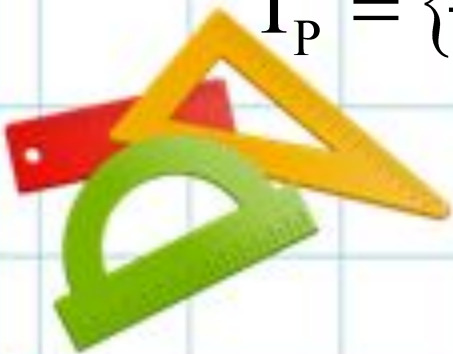
- **Субъект** – это то, о чем что-то утверждается.
- **Предикат** – это то, что утверждается о субъекте.
- **Логика предикатов** – это расширение логики высказываний за счет исполнения предикатов в роли логических функций.
- **Предикатом** $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, определённая на множестве M и принимающая значение «истина» или «ложь», то есть $P: M^n \rightarrow \{1, 0\}$
- Множество M – **контекст**, или предметная область, или область определения предиката.
- Множество всех $x \in M$ при которых $P(x) = 1$ называется множеством истинности предиката

$$I_P = \{x | x \in M, P(x) = 1\}$$



Примеры:

- 1) Луна есть спутник Венеры – ложное высказывание, не являющееся предикатом, так как в нем нет аргумента – переменного x .
- 2) $5 + \sqrt[5]{70} - \sqrt[6]{100}$ тоже самое.
- 3) $x^2 + 3x + 2 = 0$ предикат. Здесь: $x \in M = \mathbb{R}$
 $I_P = \{-2, -1\}$



Операции логики предикатов

- Предикат $P(x)$, определенный на множество M называется **тождественно истинным**, если область определения предиката $I_p = M$ и называется **тождественно ложным**, если

$$I_p = \emptyset$$

Говорят, что предикат $P(x)$ является **следствием** предиката $Q(x)$ ($Q(x) \rightarrow P(x)$), если $I_Q \supseteq I_p$ предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ **равносильны** ($Q(x) \leftrightarrow P(x)$), если $I_Q = I_p$



Конъюнкция

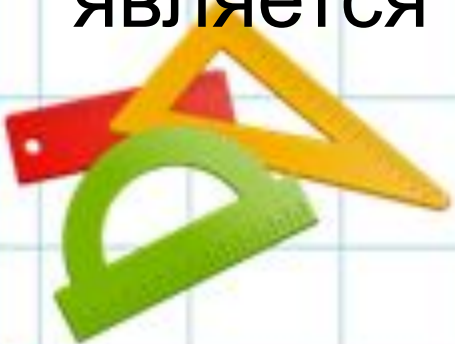
- **Конъюнкцией** двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях. Областью истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является

$$I_Q \cap I_P$$



Дизъюнкция

- **Дизъюнкцией** двух предикатов $P(x), Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь», при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях. Областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является $I_Q \cup I_P$



Отрицание

- **Отрицанием** предиката $P(x)$ называется новый предикат $\bar{P}(x)$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ принимает значение «ложь» и наоборот. Областью истинности предиката $\bar{P}(x)$ является

$$I_{\bar{P}} = I \setminus I_P \text{ (где, } I \text{ – универсальное множество)}$$



Импликация

- **Импликацией** предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$, который являются ложными при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ одновременно принимает значение «истина», а $Q(x)$ – значение «ложь», во всех остальных случаях это «истина».



Эквиваленция

- **Эквиваленцией** предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \leftrightarrow Q(x)$, который являются истинным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ и $Q(x)$ принимает одинаковые значения значение «истина» или «ложь», и ложным во всех остальных случаях.

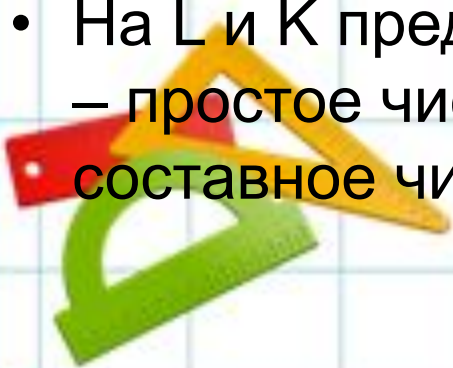


Примеры

- 1) На множестве $M=\{3,4,5,6,7,8\}$ заданы два предиката $P(x)$: « x – простое число», $Q(x)$: « x – нечетное число». Составить их таблицы истинности. Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множествах $L=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, $K=\{3,4,5,6,7,8,9\}$?

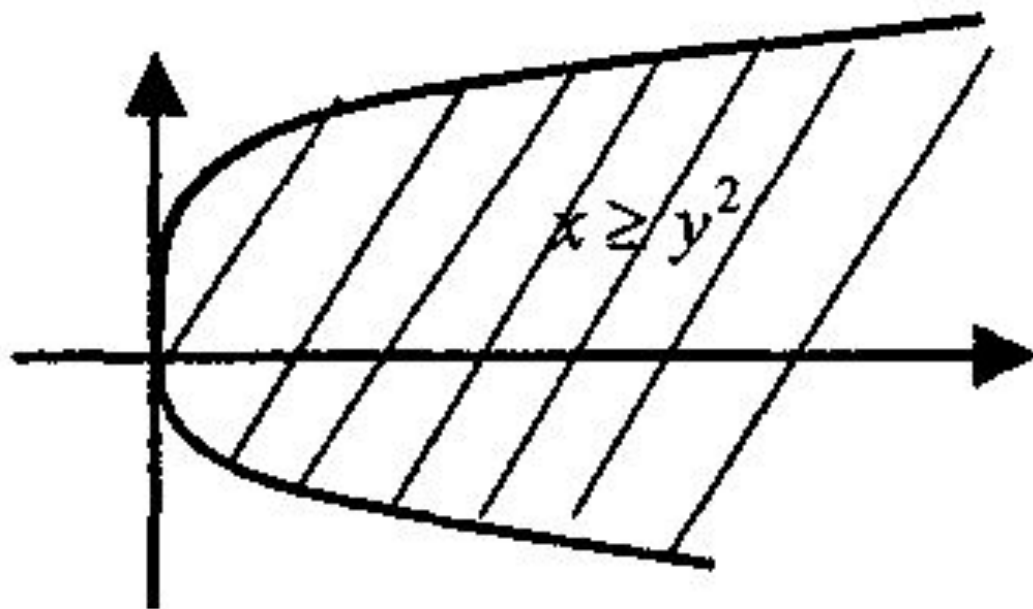
x	3	4	5	6	7	8
$P(x)$	1	0	1	0	1	0
$Q(x)$	1	0	1	0	1	0

- Очевидно, что $I_P = \{3,5,7\}$, $I_Q = \{3,5,7\}$. Таким образом, на множестве M $P(x)=Q(x)$.
- На L и K предикаты не равносильны, ибо на L , например, 2 – простое число и четное, а на K число 9 – нечетное, но составное число.



2) Найти область истинности предиката $x - y^2 \geq 0$ и изобразить на плоскости.

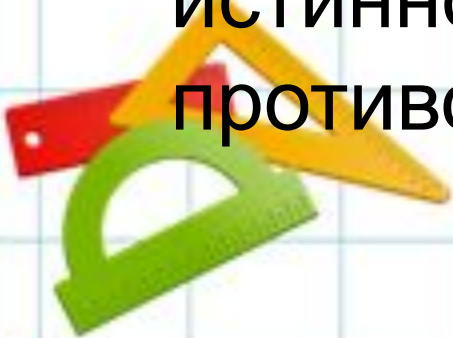
- Неравенство, составляющее исходный предикат, ограничивает часть плоскости, заключенной между ветвями параболы $y = x^2$.



- 3) На множестве $M=\{1,2,3\dots 20\}$ заданы предикаты $A(x)$: « x не делиться на 5», $B(x)$: « x – четное число», $C(x)$: « x – число простое», $D(x)$: « x кратно трем». Найти множества истинности предикатов $A(x)\wedge B(x)\wedge C(x)$, $A(x)\vee B(x)$, $D(x)\rightarrow \overline{C(x)}$.
- 1. $A(x)\wedge B(x)\wedge C(x) = \{x \text{ не делится на 5 и } x \text{ – четное число и } x \text{ кратно трем}\} = \{x \text{ не делится на 5 и } x \text{ делится на 6}\}$. Действительно, $I_p = \{6,12,18\}$
- 2. $A(x)\vee B(x) = \{x \text{ не делится на 5 или } x \text{ – четное число}\}$. $I_p = M \setminus \{5,15\}$
- 3. $D(x)\rightarrow \overline{C(x)} = \overline{D(x)}\vee \overline{C(x)}$. = $\{x \text{ не кратно трем или } x \text{ – непростое число}\}$. Здесь рассуждения сложнее, однако, если перебрать все элементы множества M , то легко установить, что $I_p = M \setminus \{3\}$

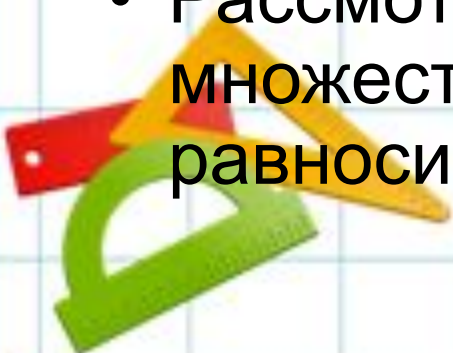
Кванторные операции

- Кванторные операции могут рассматриваться как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции в случае бесконечных областей.
- **Квантор всеобщности $\forall$ (all - всякий)**
- Под выражением $\forall xP(x)$ понимают высказывание, истинное, если $P(x)$ истинно для каждого $x \in M$, и ложное в противном случае.



Кванторные операции

- **Словесная интерпретация:** «для каждого x $P(x)$ истинно».
- Переменная x в предикате $P(x)$ является **свободной** (x – любое из M), в высказывании $\forall x P(x)$ является **связанной** переменной, т.е. переменную, к которой относится квантор наз. **связной**, остальные переменные наз. **свободными**.
- Рассмотрим предикат $P(x)$, определенный на множестве $M: \{a_1, \dots, a_n\}$. Справедлива равносильность
$$\forall x P(x) \leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$



- **В обычных выражениях квантор всеобщности выражается следующим образом:**

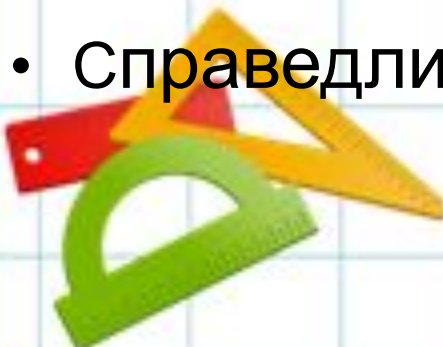
- $P(x)$, при произвольном x ;
- $P(x)$, при какого бы не было x ;
- для каждого x верно $P(x)$;
- всегда имеет место $P(x)$;
- каждый обладает свойством P ;
- всё удовлетворяет P .



Квантор существования $\exists$

(exist-существовать)

- Пусть $P(x)$ - предикат, $x \in M$. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, истинное, если существует $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложное в противном случае.
- Переменная x в предикате является **свободной** (x – любое из M), в высказывании $\exists x P(x)$ - x является **связанной** переменной.
- **Словесная интерпретация:** «существует x , при котором $P(x)$ истинно».
- Справедлива равносильность


$$\exists x P(x) \leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

- В обычных выражениях квантор существования выражается следующим образом:
 - для некоторых x имеет место $P(x)$;
 - для подходящего x верно $P(x)$;
 - имеется x , для которого $P(x)$;
 - у некоторых вещей есть признак P ;
 - кто-нибудь относится к (есть) P .



- Если предикат является функцией нескольких переменных, то он называется **n-местным** или **n-арным** предикатом.
- Кванторные операции могут применять и к многоместным предикатам.
- Например, применение кванторной операции к предикату $P(x,y)$ по переменной x ставит в соответствие ему одноместный предикат $\forall xP(x,y)$ или $\exists xP(x,y)$, зависящий от y и не зависящий от x .
- К двухместному предикату при применении кванторов по обоим переменным получается 8 высказываний:

$$\forall x \forall y P(x,y)$$

$$\forall y \forall x P(x,y)$$

$$\exists x \forall y P(x,y)$$

$$\exists y \forall x P(x,y)$$

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

$$\forall y \exists x P(x,y)$$

$$\exists x \exists y P(x,y)$$

$$\exists y \exists x P(x,y)$$



- В общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания и его логических значений, то есть, например, высказывания $\forall x \forall y P(x, y)$ и $\forall y \forall x P(x, y)$ различны.

- Квантор существования можно выразить через квантор всеобщности применительно к предикату $A(x)$ следующим образом
$$\exists x A(x) = \forall x \overline{A(x)}$$

- Квантор всеобщности можно выразить через квантор существования применительно к предикату $A(x)$ следующим образом
$$\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$$

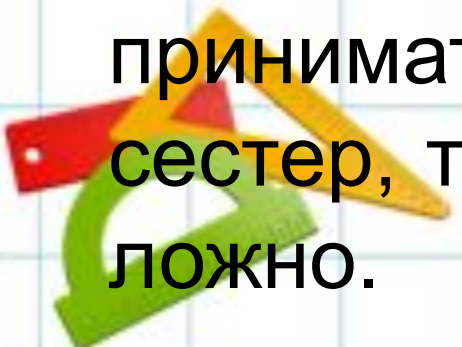
Пример:

1) Пусть $R(x, y)$ означает что x является матерью для y . Тогда выражение $\forall y \exists x R(x, y)$ означает, что у каждого человека есть мать – это истинное утверждение. Выражение

$$\exists x \forall y R(x, y)$$

означает, что существует мать всех людей.

Истинность этого утверждения зависит от множества значений, которые могут принимать y : если это множества братьев и сестер, то оно истинно, в противном случае ложно.



- 2) Установить истинность или ложность высказывания $\exists x(x \in \{2,5\} \rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0))$

$$x^2 - 6x + 8 = 0, x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1, x_1 = 2, x_2 = 4$$

- Исходное высказывание преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \exists x(x \in \{2,5\} \rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0)) &\leftrightarrow \exists x(\overline{x \in \{2,5\}} \vee (x^2 - 6x + 8 = 0)) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \exists x(x \notin \{2,5\} \vee x \in \{2,4\}) \leftrightarrow \exists x(x \in \{2,4\}) \end{aligned}$$

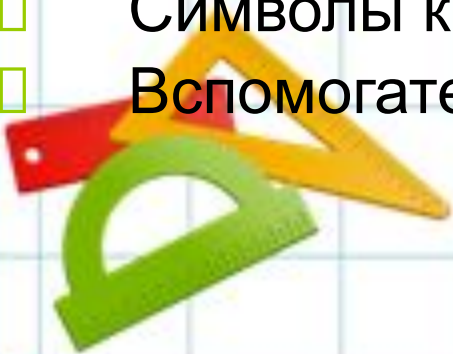
- Исходное высказывание истинно.



Формулы логики предикатов и интерпретация

В логике предикатов используется **символика**:

- Символы $p_1, q_2, r_3, \dots$ – переменные высказывания;
- Предметные переменные и предметные константы;
 $x_0, x_1, x_2, \dots; x_0, y_1, z_2 \in M$
- $P_i^{n_i}, n_i \in \mathbb{N}$, - предикатные символы, $P_i^{n_i}$ – n_i -местный предикатный символ;
- $f_j^{n_j}, n_j \in \mathbb{N}$ - функциональные символы, $f_j^{n_j}$ – n_j -местный функциональный символ;
- Символы логических операций: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$
- Символы кванторных операций: $\forall, \exists$
- Вспомогательные символы: скобки, запятые.



- **Формулой** логики предикатов называется всякое выражение, содержащее символику 1...7 и удовлетворяющее следующим требованиям:

- 👍 атомарная формула есть формула;
- 👍 если A и B – формула, то $A \rightarrow B, A \leftrightarrow B, A \vee B, A \wedge B$ – тоже формулы при условии, что одна и та же предметная переменная не является в A свободной, а в B связанной или наоборот;
- 👍 если A – формула, то и $\bar{A}$ – тоже формула;
- 👍 если $A(x)$ – формула, то $\exists x A(x)$ и $\forall x A(x)$ являются формулами, причем если в $A(x)$ x – свободная переменная, то в $\exists x A(x)$ и $\forall x A(x)$ будет уже связанной переменной.

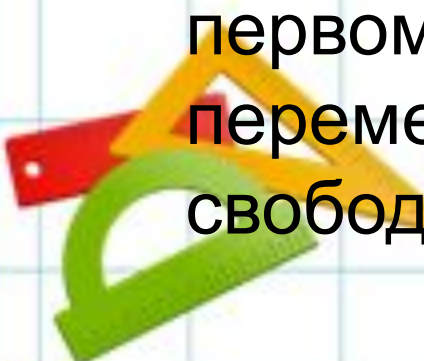
Интерпритация

- Формулы имеют смысл тогда, когда имеется какая-нибудь интерпретация входящих в неё символов.
- Под **интерпретацией** понимается всякая пара, состоящая из непустого множества M , названного **областью интерпретации**, и какого-либо отображения, относящему каждому предикатному символу арности N некоторое n -местное отношение на M .



Пример:

- 1) Является ли данное выражение формулой логики предикатов?
- $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists u (\forall y P(y))$ является формулой, так как квантор существования употреблен для уже связанной квантором всеобщности переменной y .
- $P \rightarrow \forall x Q(x, y)$ является формулой; x – связанная переменная; y – свободная;
- $\forall x P(x) \vee \forall u Q(x, u)$ является формулой, ибо в первом логическом слагаемом x – связанная переменная, а во втором слагаемом свободная.



- 2) Даны следующие утверждения
- $A(n)$: «число n делится на 3»; $B(n)$: «число n делится на 2»; $C(n)$: «число n делится на 4»; $D(n)$: «число n делится на 6»; $E(n)$: «число n делится на 12».
- Указать, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны:
 - а) $\forall n(A(n) \wedge B(n) \rightarrow E(n))$
 - $A(n) \wedge B(n)$: «число n делится на 6»,
 - $A(n) \wedge B(n) \rightarrow E(n)$: «если n делится на 6, то оно делится на 12». При $n=6$ импликация ложна, следовательно, исходная формула в общем ложна.
 - б) $\exists n(B(n) \wedge C(n) \rightarrow \overline{D(n)})$
 - $B(n) \wedge C(n)$: «число делится на 4», $B(n) \wedge C(n) \rightarrow \neg D(n)$: «если число делится на 4, то оно не делится на 6». Такое может быть, например, при $n=16$. Следовательно, $B(n) \wedge C(n) \rightarrow \neg D(n)$ - не тождественно ложная формула, а тогда $\exists n(B(n) \wedge C(n) \rightarrow \overline{D(n)})$ - истинная формула алгебры предикатов.

Формулы

- Формула $\forall x(P(x) \leftrightarrow \bar{P}(x))$ содержит только связанную переменную x . Эта формула является тождественно истинным высказыванием в любой интерпретации.
- Напротив, формула $\exists x(P(x) \wedge \bar{P}(x))$ - тождественно ложная формула в любой интерпретации.

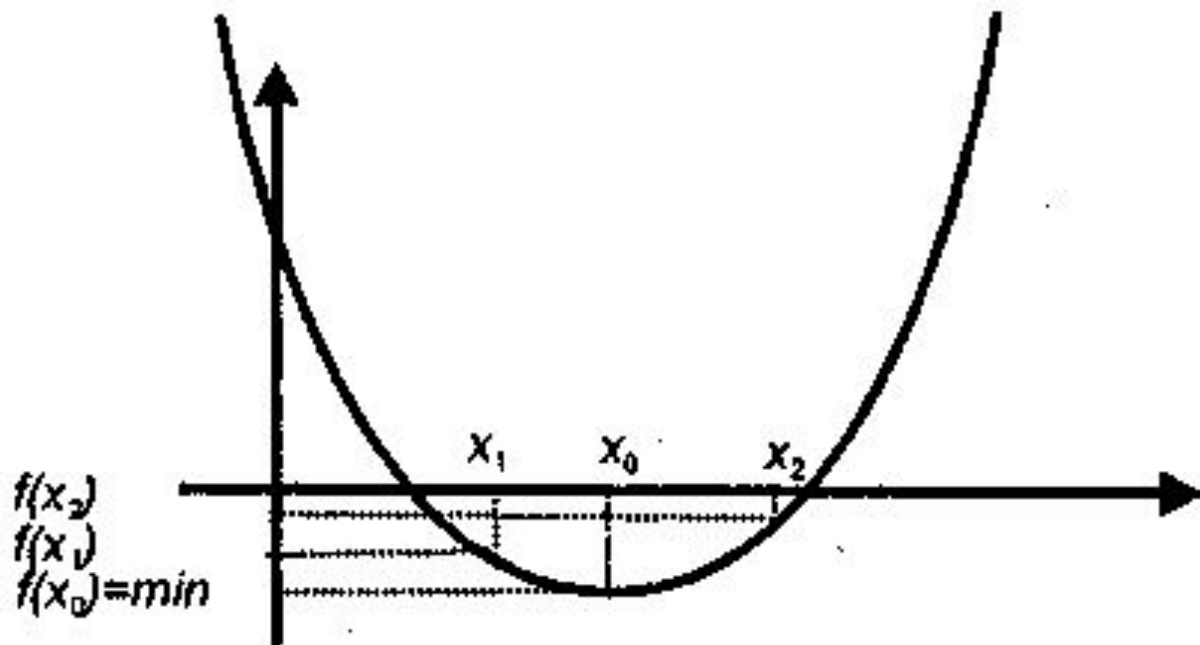


Применение языка логики предикатов для записи математических предложений

- Определение экстремума функции (минимума в точке x_0)

- $\exists x_0 \in M \forall x_1 \in M \forall x_2 \in M P(x_0, x_1, x_2)$

$$P(x_0, x_1, x_2) = ((x_1 < x_0) \rightarrow (f(x_1) > f(x_0))) \wedge ((x_2 > x_0) \rightarrow (f(x_1) > f(x_0)))$$



Определение выпуклости (вогнутости) функции $f(x)$

- Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$) на (a,b) выпукла.

$$\forall x \in (a, b) (\exists f''(x) \wedge f''(x) < 0)$$

