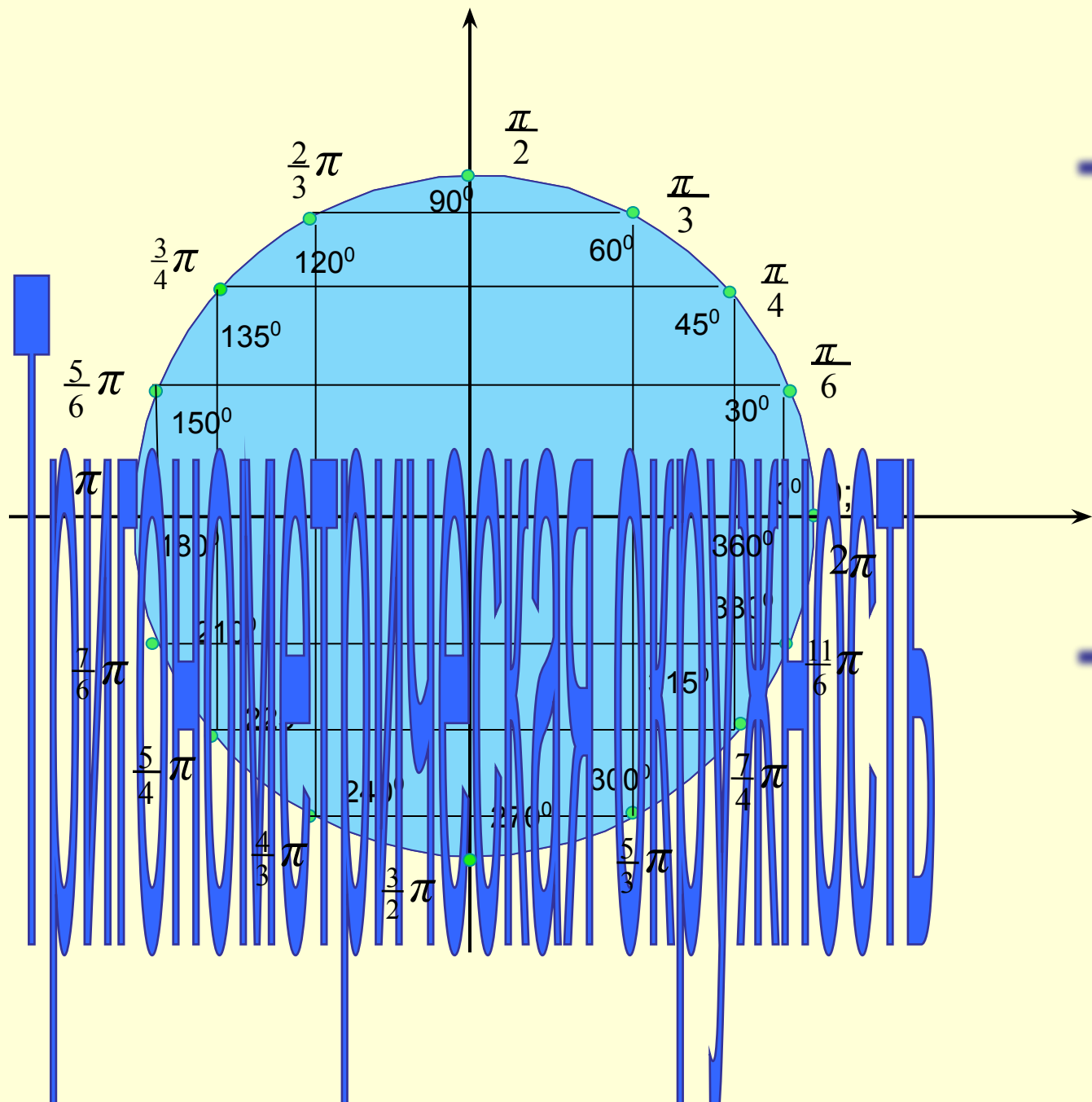


Трениажер



Трениажер



Содержание

1. Радианная мера углов и дуг. 

2. Единичная окружность. 

3. Запись чисел на единичной окружности:

1) Запись чисел, соответствующих одной точке единичной окружности. 

2) Запись чисел, соответствующих двум диаметрально противоположным точкам единичной окружности. 

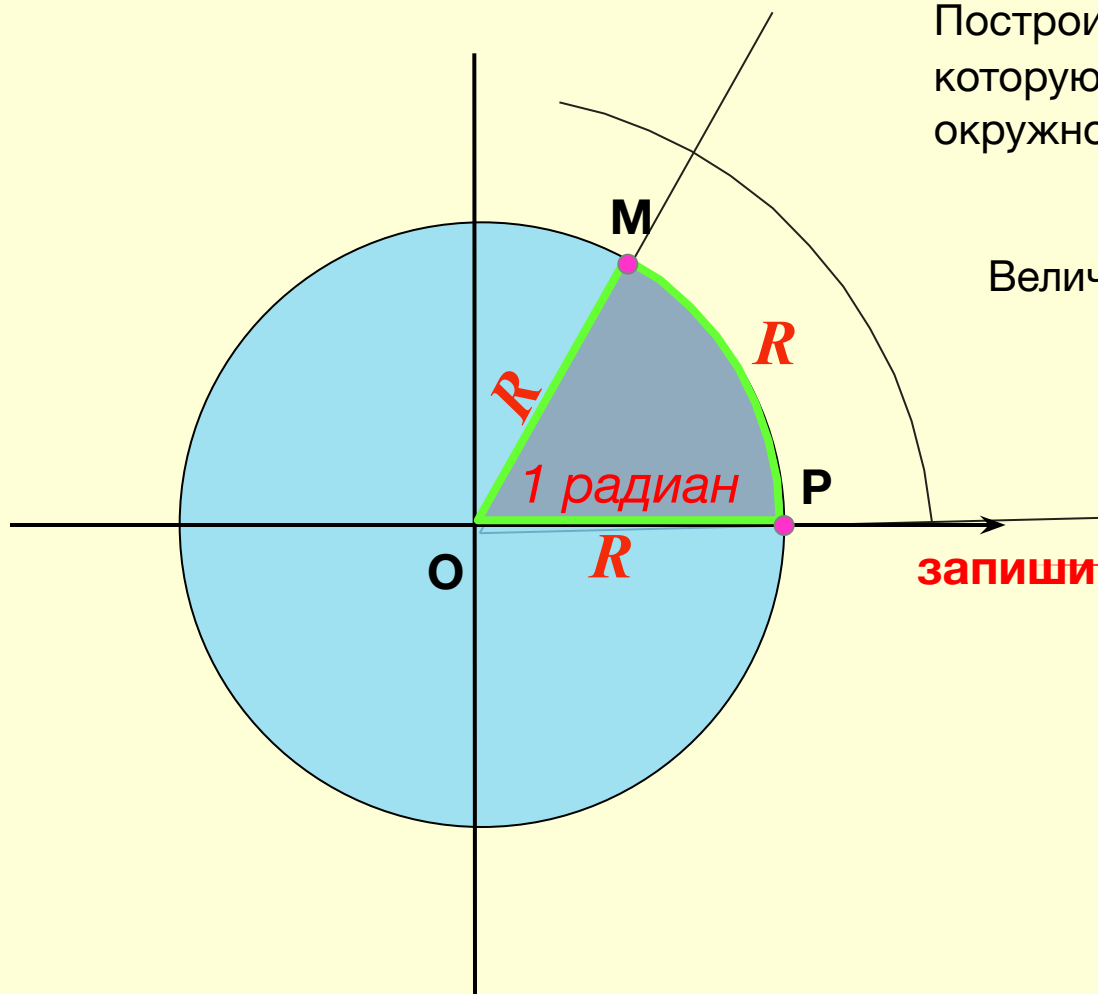
3) Запись чисел, соответствующих двум точкам единичной окружности, симметричным относительно оси абсцисс. 

4) Запись чисел, соответствующих двум точкам единичной окружности, симметричным относительно оси ординат. 



Радианная мера углов и дуг.

Ты уже знаком с градусной мерой измерения углов. В математике и физике часто пользуются так же радианной мерой. Для того, чтобы познакомиться с таким способом измерения углов и дуг рассмотрим окружность радиуса R .



Построим угол MOP , такой что дуга MP , на которую он опирается, равна радиусу R окружности.

$$\text{дуга MP} = R$$

Величина угла MOP равна *1 радиану*.

$$1\text{рад} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$$

$$\pi = 3,1459\dots$$

$$1\text{рад.} \approx 57^{\circ}17'$$

$$\text{дуга MP} \approx 57^{\circ}17' = 1\text{рад.}$$

$$\angle \text{MOP} \approx 57^{\circ}17' = 1\text{рад.}$$

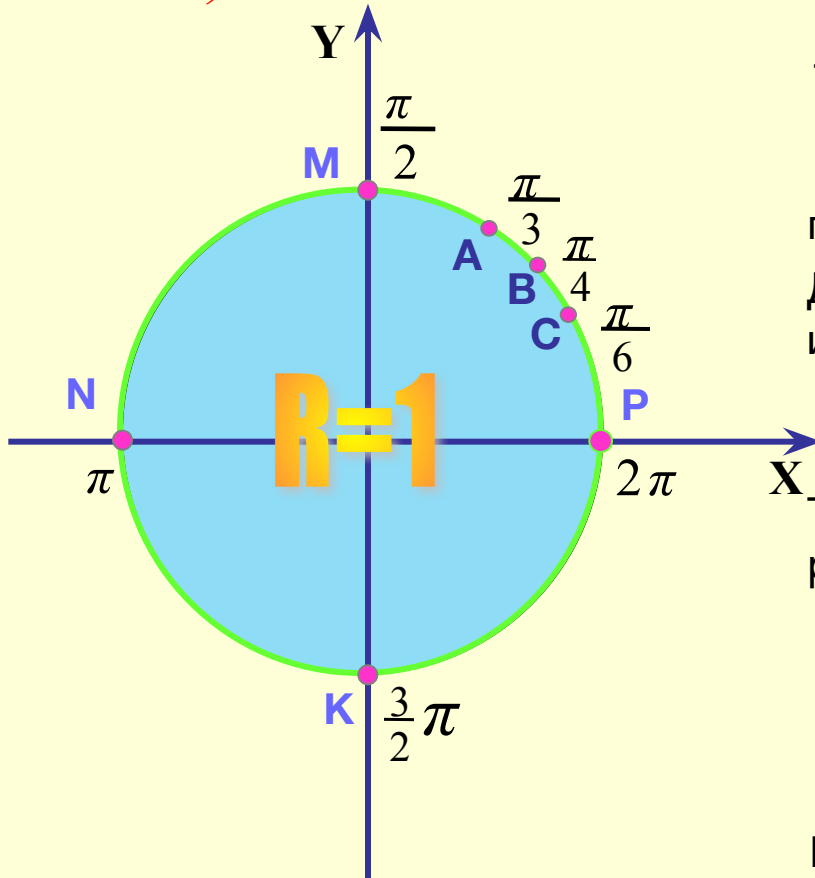
запиши



Единичная окружность.

Окружность, радиус которой равен 1, называется *единичной*.

$$\pi = 3,1459\dots$$



Точки М,Р,К,Н – назовем узловыми.

Построим две взаимно перпендикулярных оси: ось абсцисс и ось ординат.

Ты помнишь, что длина окружности выражается формулой : $l = 2\pi R$,

где R – радиус окружности.

Длину единичной окружности удобно измерять в радианах, т.к.

если $R=1$, то: $l = 2\pi$ (рад.)

Тогда длина дуги половины окружности равна: π (рад.)

$\frac{\pi}{2}$ (рад.) - четверть длины окружности,

$\frac{3\pi}{2}$ (рад.) - три четверти длины окружности.

Наименование радиан обычно опускают.

Отметим так же точки: А,В,С.

Рассмотри рисунки 1 и 2 единичной окружности.

Из рисунков видно, что величину угла поворота шарика вокруг точки О, а так же величину дуги единичной окружности, можно задавать двумя способами:

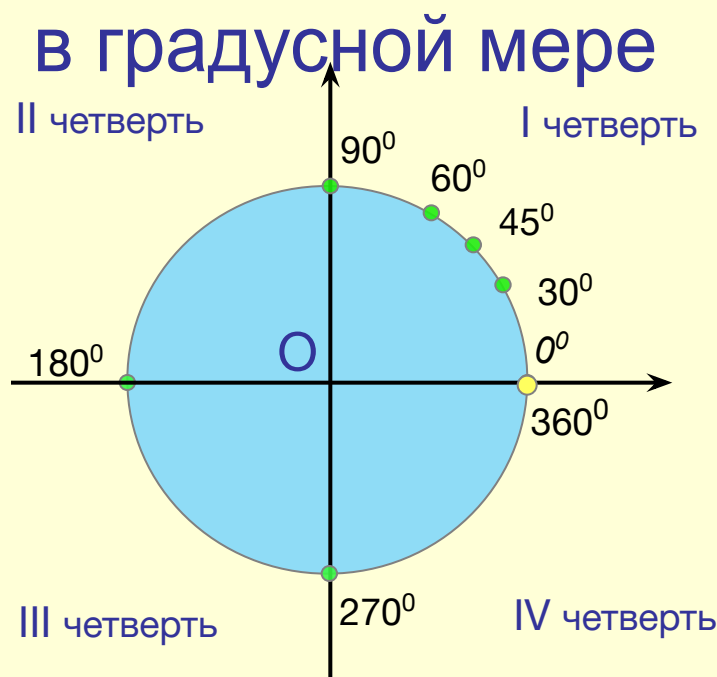


Рис.1

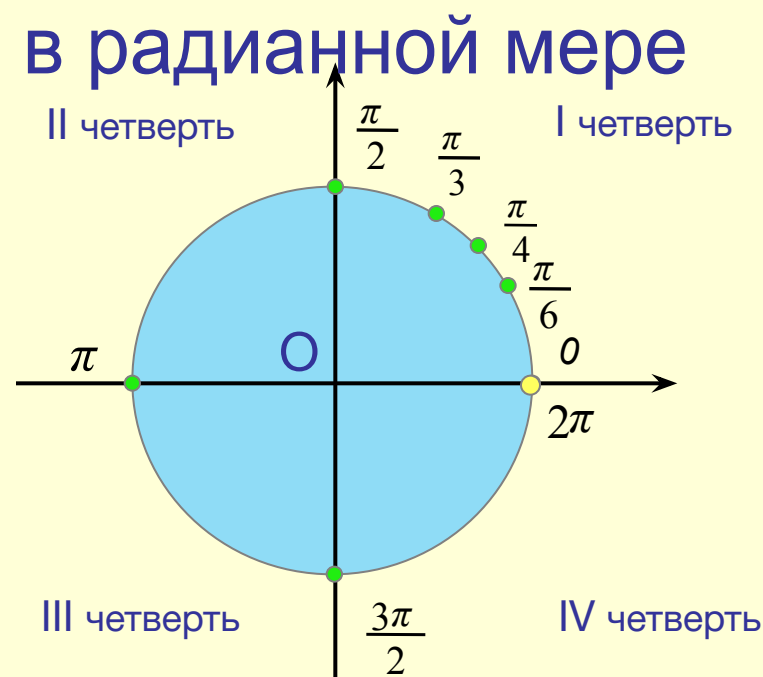


Рис.2

Теперь можно составить таблицу измерения углов в градусной и радианной мерах.

Выучи!

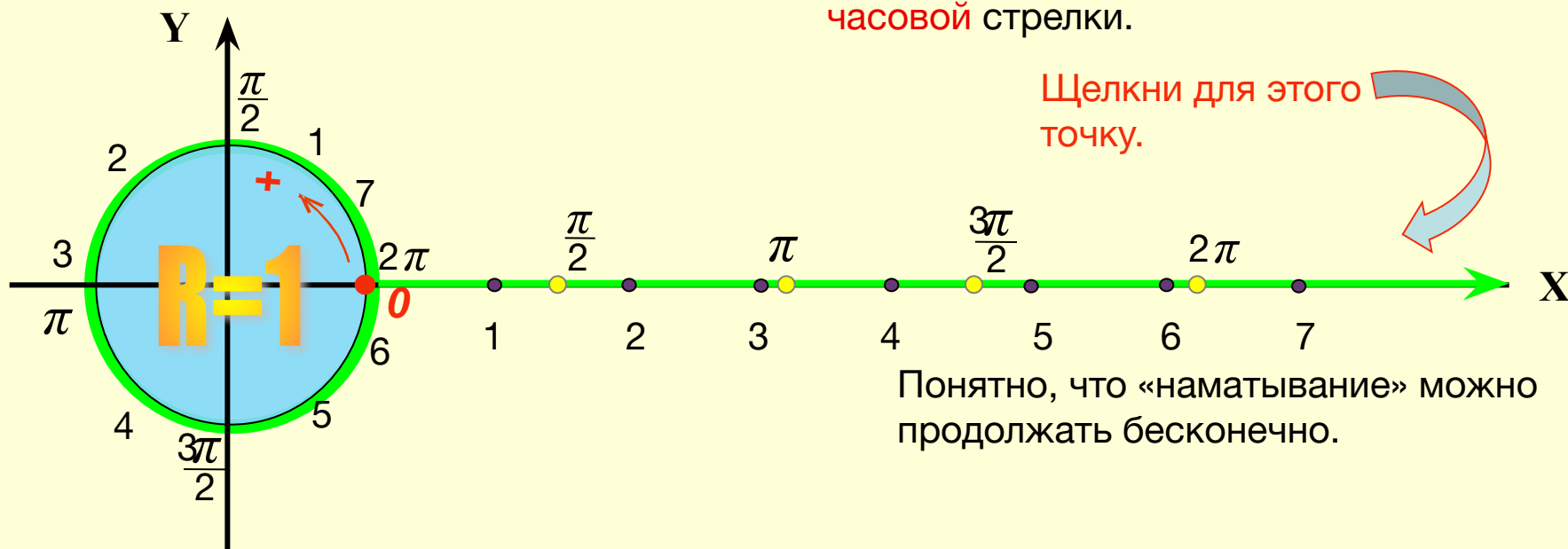
Градусная мера	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианная мера	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Рассмотри, как можно установить соответствие между множеством действительных чисел на числовой прямой и точками единичной окружности.

$$\pi = 3,1459\dots$$

Координатный луч с началом в точке **0** «наматываем», как нить, на окружность сначала в **положительном** направлении – **против хода** часовой стрелки, потом в **отрицательном** направлении – **по ходу** часовой стрелки.



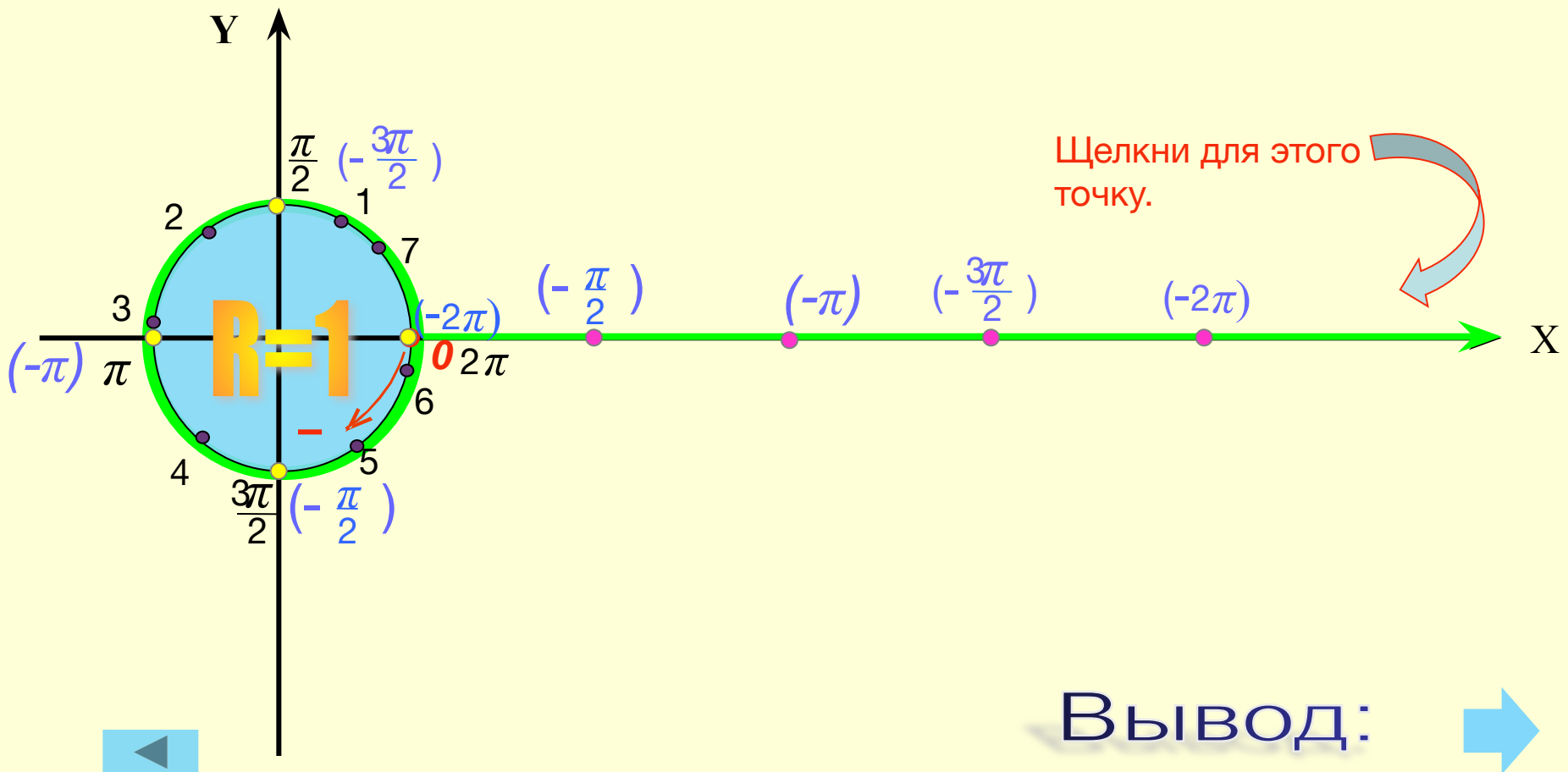
Понятно, что «наматывание» можно продолжать бесконечно.

А теперь «наматываем» в отрицательном направлении.



«Наматываем» в отрицательном направлении.
Покажем только узловые точки.

$$\pi = 3,1459\dots$$



Вывод:

При рассмотрении единичной окружности удобно использовать радианную меру, т.к. при этом числа, выражающие длину дуги и длину окружности **кратные числу**.

Каждой точке окружности соответствует не одно, а бесконечное множество действительных чисел. Каждому числу на окружности соответствует одна (единственная) точка.

Например, точке М,

кроме числа $\frac{\pi}{2}$,

соответствуют числа :

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

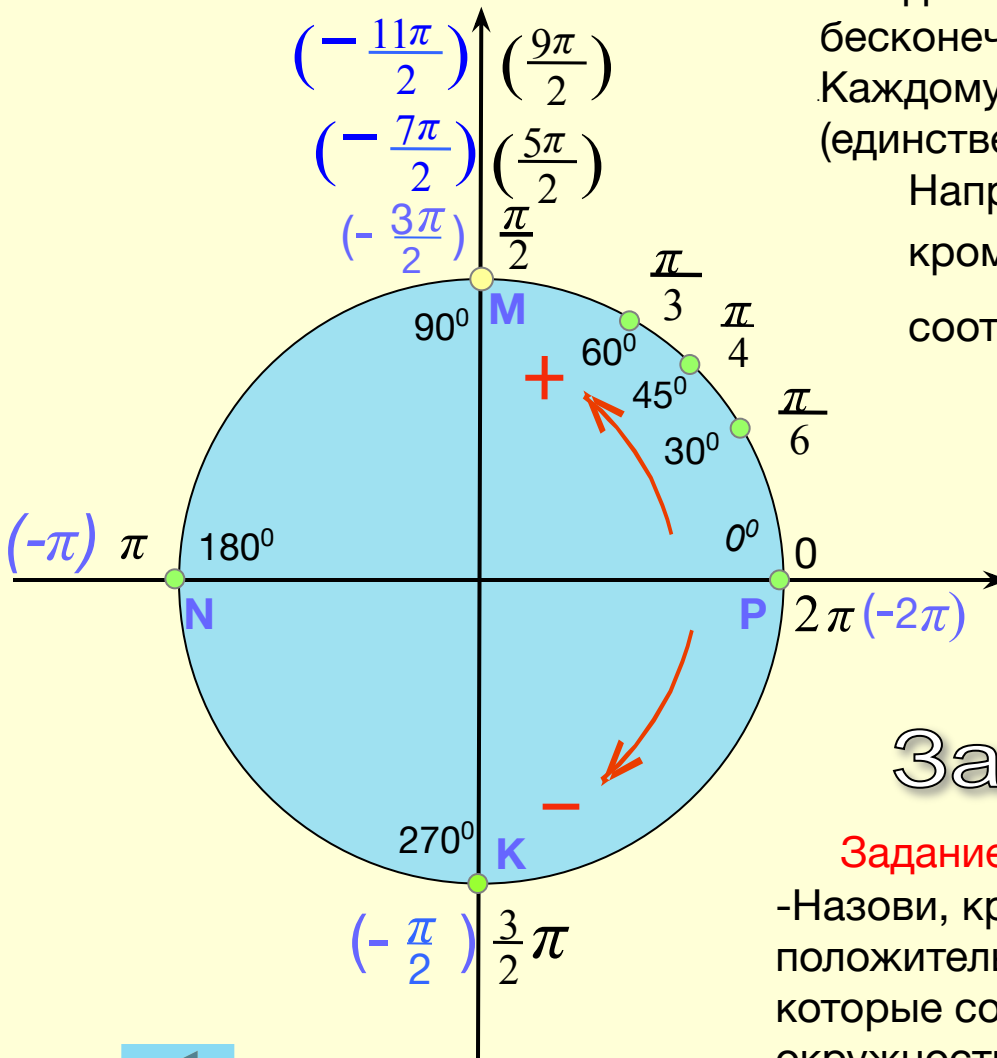
$$\frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - 6\pi = -\frac{11\pi}{2}$$

Задание 1:

Задание выполни письменно!

-Назови, кроме отмеченных, еще по одному положительному и отрицательному числу, которые соответствуют выделенным точкам окружности.



1) Запись чисел, соответствующих одной точке единичной окружности.

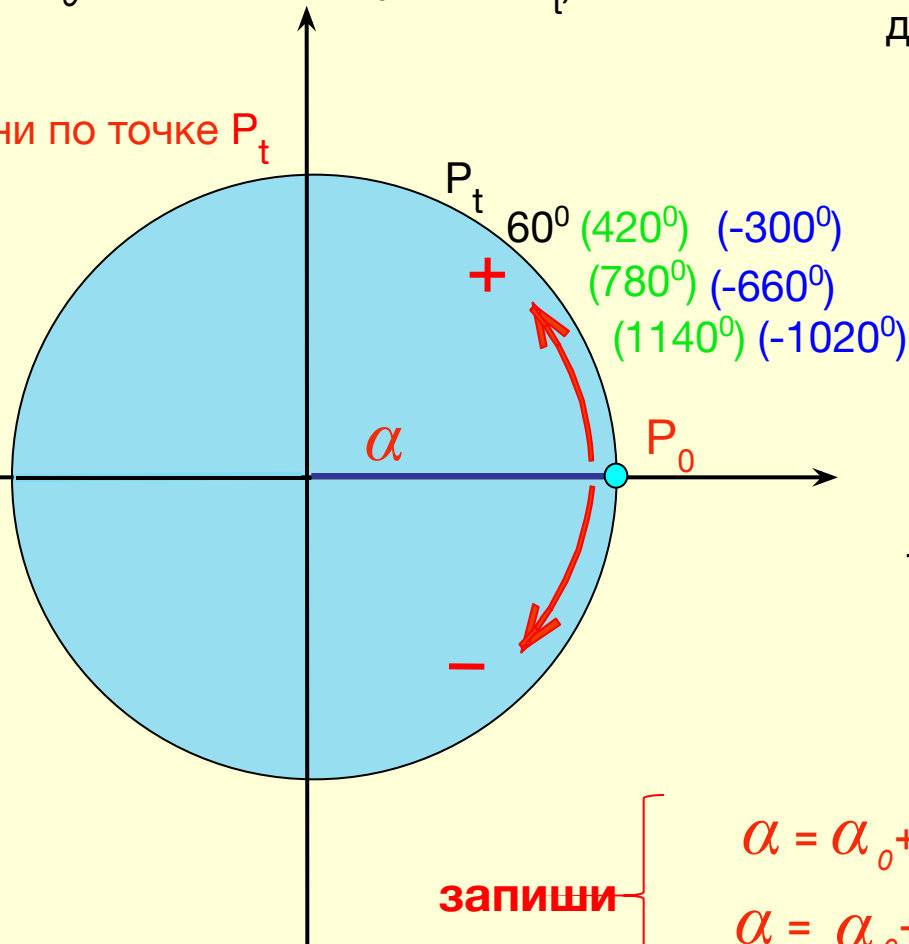
Будем рассматривать все точки единичной окружности как точки, полученные поворотом точки P_0 вокруг начала координат на некоторый угол.

$$\alpha_0 = 60^\circ$$

$(P_0 \longrightarrow P_t)$.

Проследи, как будет меняться угол поворота для точки P_t :

Щелкни по точке P_t



$$1 \text{ поворот: } 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$$

$$2 \text{ поворот: } 60^\circ - 2 \cdot 360^\circ = -660^\circ$$

$$3 \text{ поворот: } 60^\circ - 3 \cdot 360^\circ = -1020^\circ$$

* * * * *

$$k \text{ поворот: } 60^\circ - k \cdot 360^\circ$$

Вращаться можно как в положительном, так и в отрицательном направлениях.

Вывод:

Для точки P_t все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = \alpha_0 + 360^\circ k \quad , \text{ где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm \dots$$

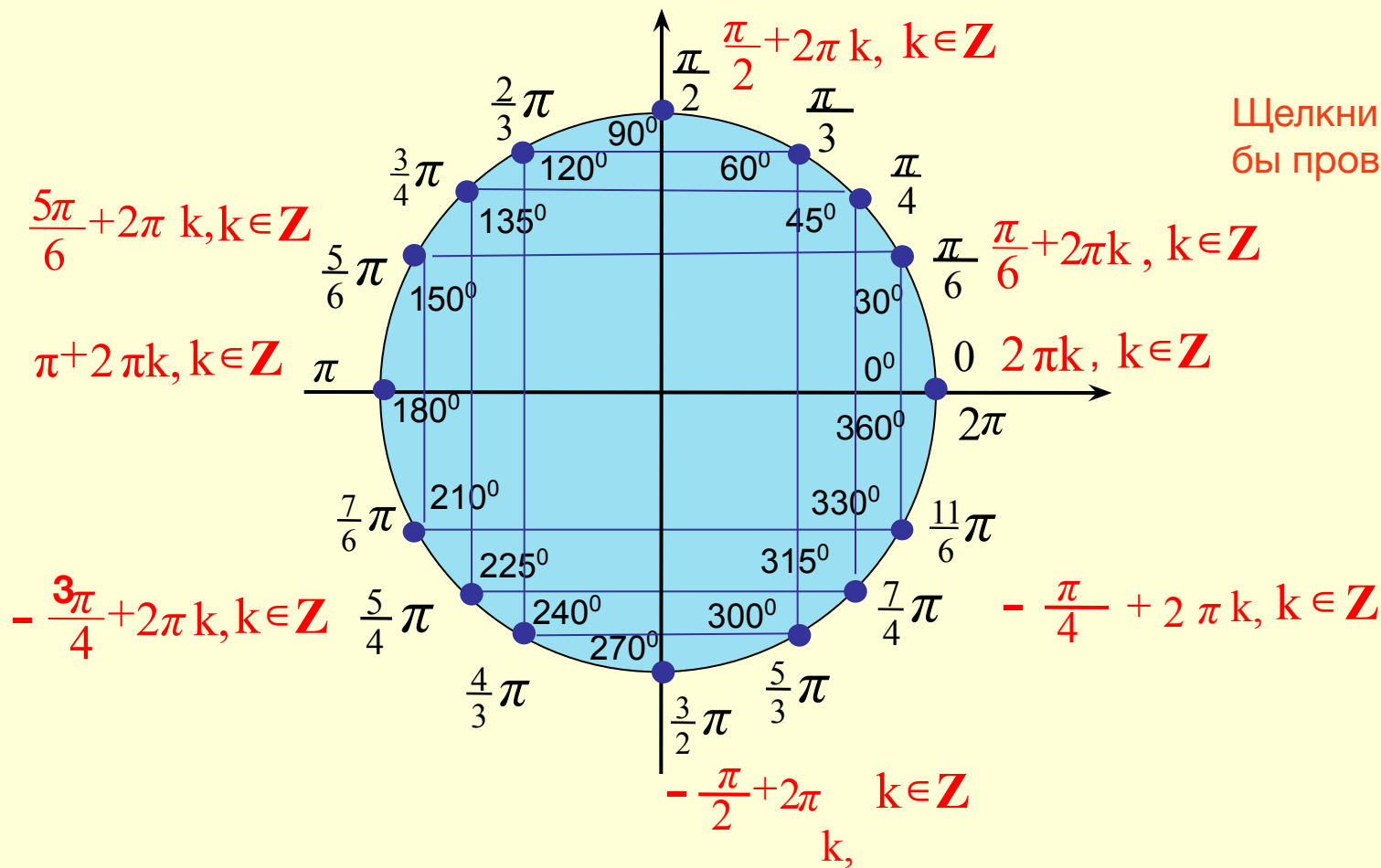
$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k \quad , \text{ где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm \dots$$

Задание 2:

Запиши **все** числа, соответствующие выделенным точкам единичной окружности.

Задание выполни письменно!

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k, \text{ где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm \dots$$

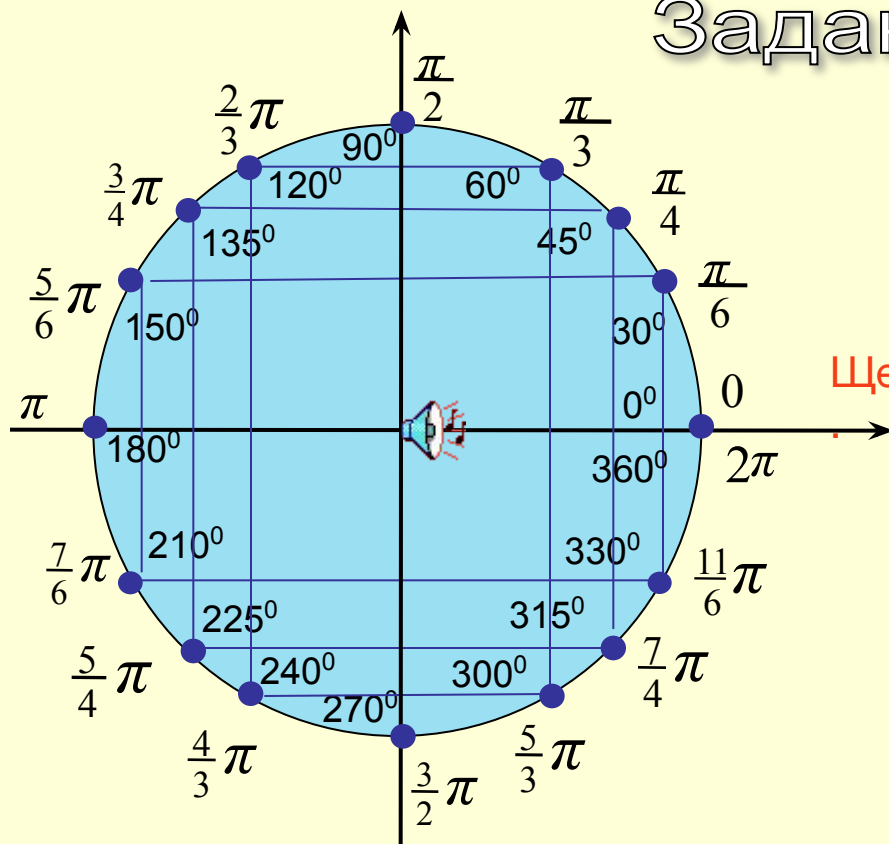


Щелкни по точке, чтобы проверить себя.

Перед тобой модель единичной окружности

Задание 3:

-Найди на единичной окружности точки, соответствующие числам:



Щелкни по точке

Перед тобой модель единичной окружности

$\frac{\pi}{3} + 2\pi$	
$\frac{3\pi}{2} + 6\pi$	
$4\pi - \frac{5\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{6} - 2\pi$	
$-\frac{2\pi}{3} + 4\pi$	
$-\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{8\pi}{3}$	
$\frac{7\pi}{3}$	

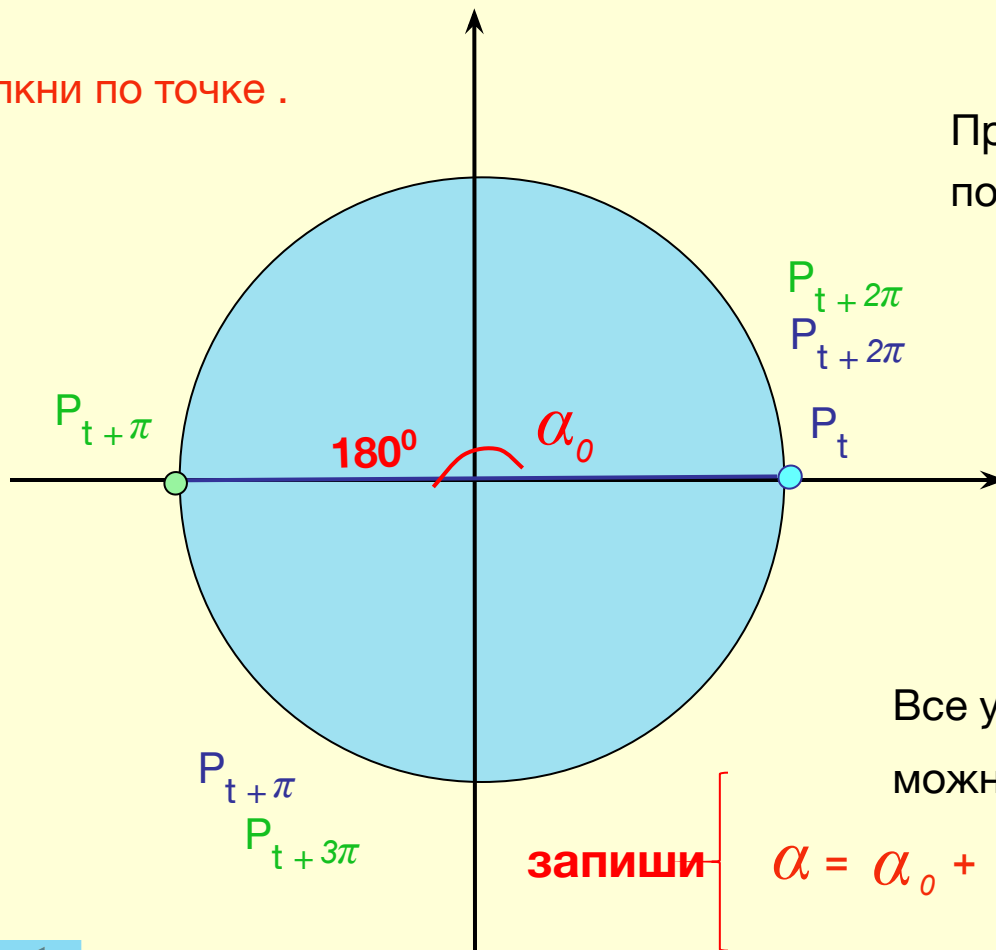
Забей мяч



2) Запись чисел, соответствующих двум диаметрально противоположным точкам единичной окружности.

Пусть даны две диаметрально противоположные точки P_t и $P_{t+\pi}$ единичной окружности. Зададим для точки P_t угол поворота: α_0
Тогда, для точки $P_{t+\pi}$ угол поворота: $\alpha_0 + \pi$

Щелкни по точке .



Проследи как будет меняться угол поворота для точек P_t и $P_{t+\pi}$

P_t	$P_{t+\pi}$
α_0	$\alpha_0 + \pi$
$\alpha_0 + \pi$	$\alpha_0 + 2\pi$
$\alpha_0 + 2\pi$	$\alpha_0 + 3\pi$

* * * * *

Все углы поворота для точек P_t и $P_{t+\pi}$ можно записать так:

запиши $\left[\alpha = \alpha_0 + \pi k \text{ , где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm \dots \right.$

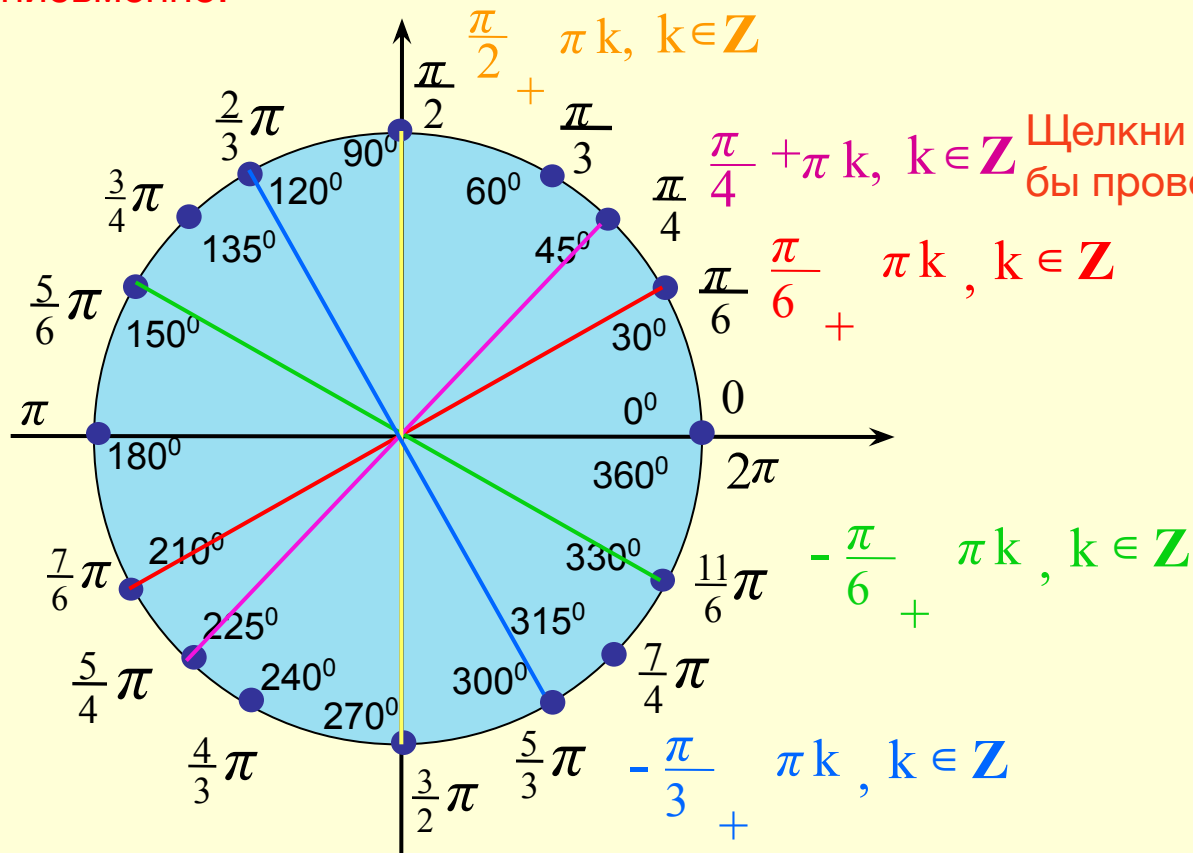


Задание 4:

Запиши все числа, соответствующие двум диаметрально выделенным точкам единичной окружности.

$$\alpha = \alpha_0 + \pi k, \text{ где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm \dots$$

Задание выполни письменно!



Щелкни по точке, чтобы проверить себя.

Перед тобой модель единичной окружности

3) Запись чисел, соответствующих двум точкам единичной окружности, симметричным относительно оси абсцисс.

На окружности даны две симметричные точки

P_t и P_{-t} .

Для точки P_t все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

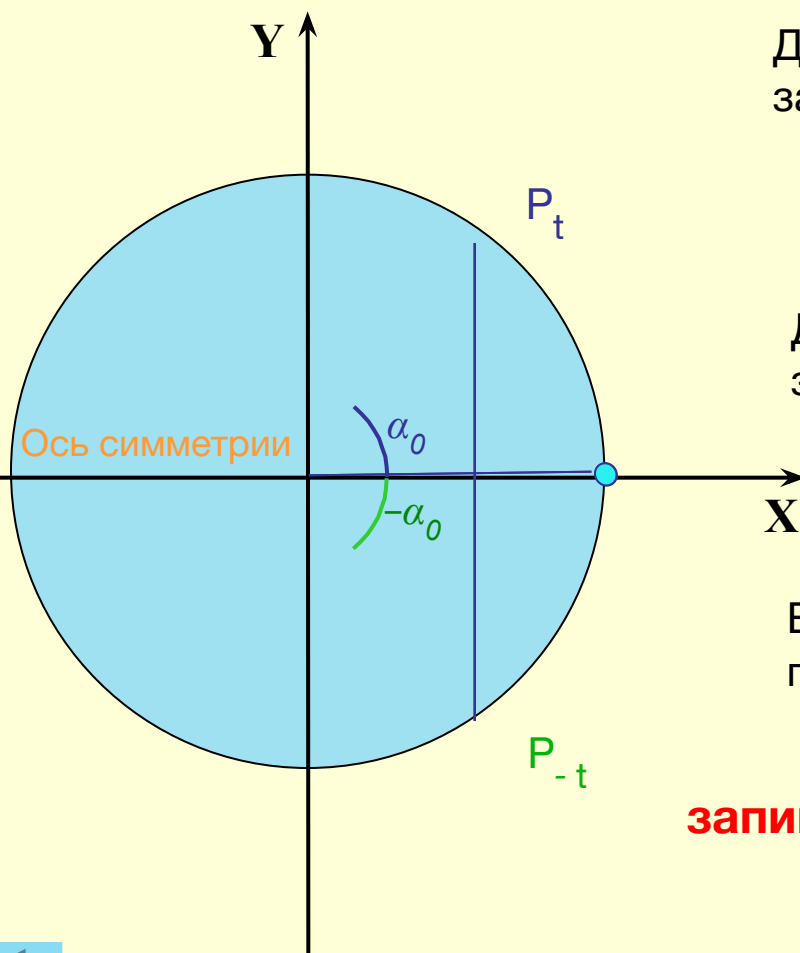
Для точки P_{-t} все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = -\alpha_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Вместе для точек P_t и P_{-t} все углы поворота:

запиши

$$\left\{ \alpha = \pm \alpha_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \right.$$



4) Запись чисел, соответствующих двум точкам единичной окружности, симметричным относительно оси ординат.

На окружности даны две симметричные точки

P_t и $P_{\pi-t}$.

Для точки P_t все углы поворота можно записать так:

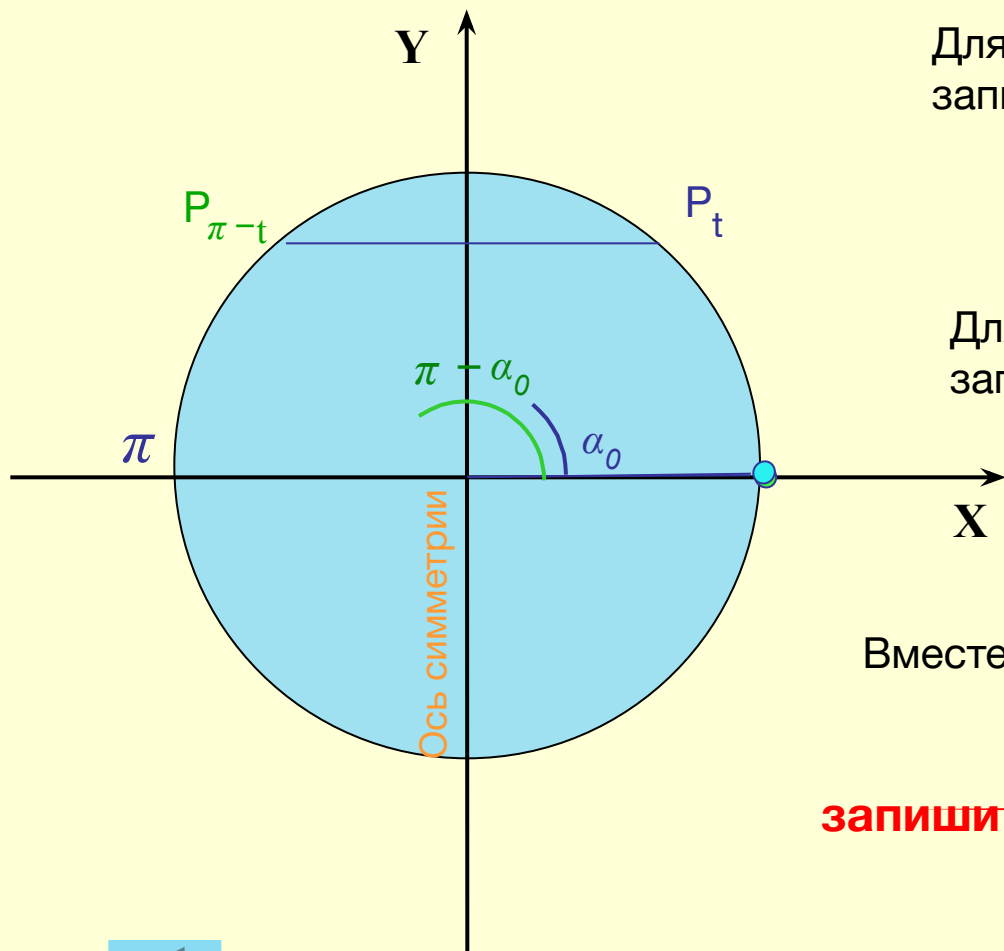
$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Для точки $P_{\pi-t}$ все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = \pi - \alpha_0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Вместе для точек P_t и $P_{\pi-t}$ все углы поворота:

запиши $\left\{ \alpha = (-1)^k \alpha_0 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$

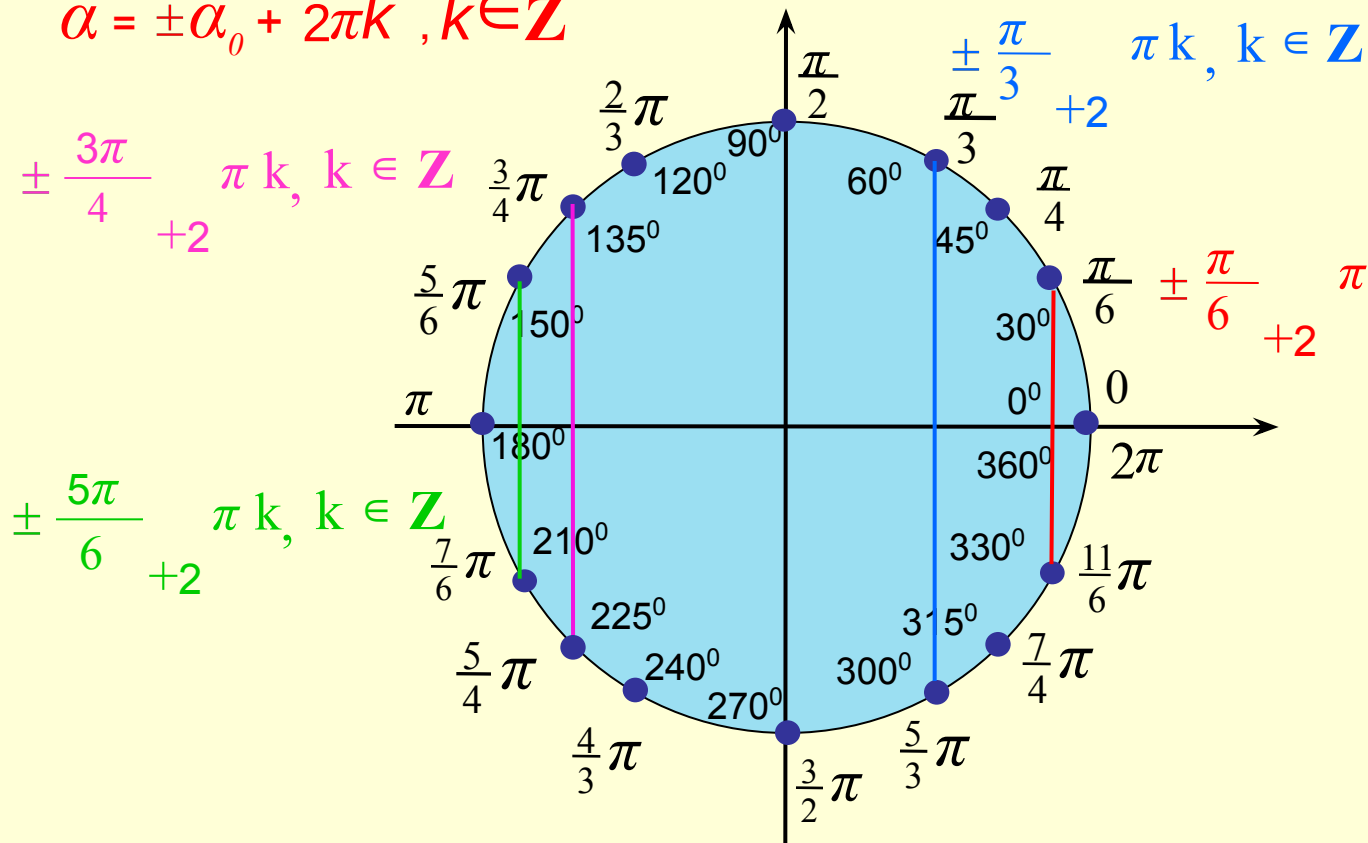


Задание 5:

Запиши все числа, соответствующие двум симметричным выделенным точкам единичной окружности.

Задание выполни письменно!

$$\alpha = \pm \alpha_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Щелкни по точке, чтобы проверить себя.

$$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Перед тобой модель единичной окружности

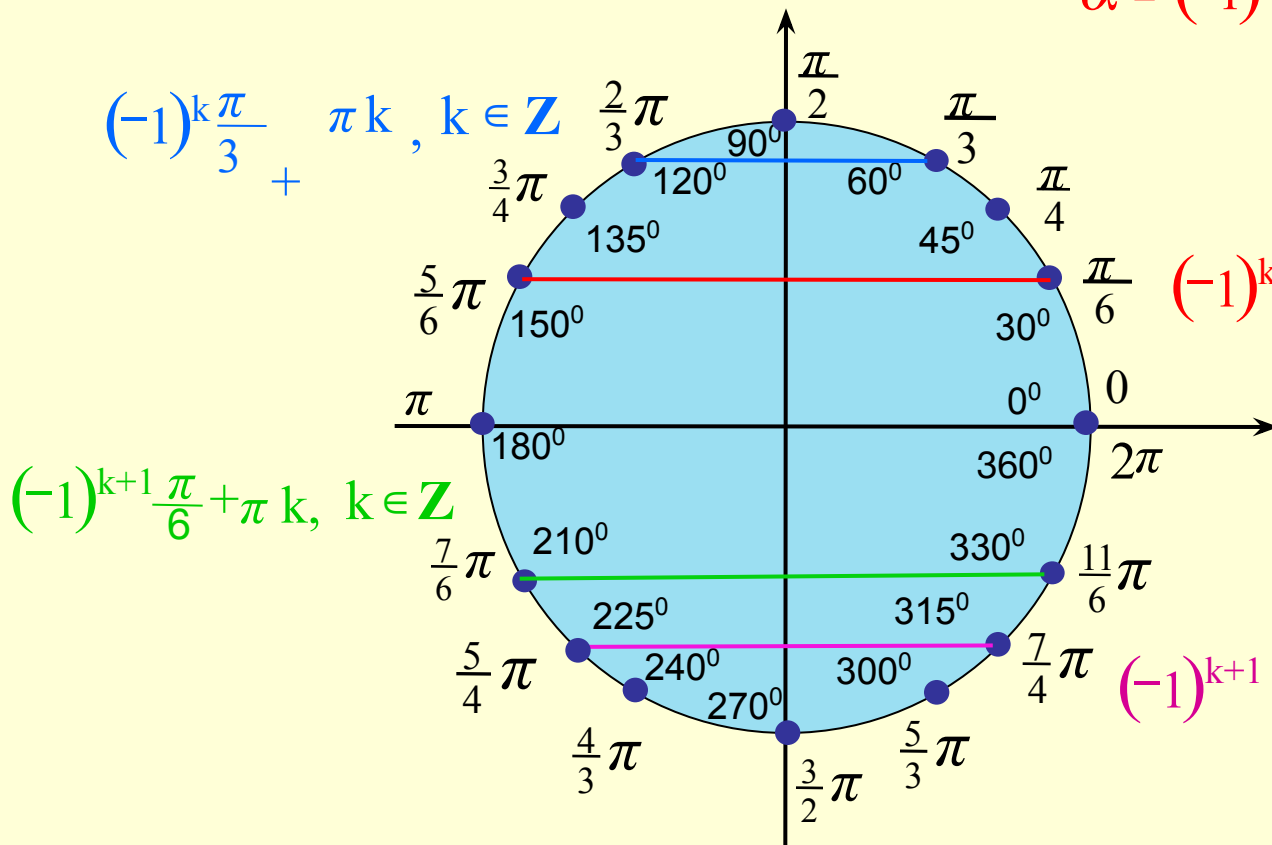
Задание 6:

Запиши все числа, соответствующие двум симметричным выделенным точкам единичной окружности.

Задание выполни письменно!

$$\alpha = (-1)^k \alpha_0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Щелкни по точке, чтобы проверить себя.



$$(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Перед тобой модель единичной окружности



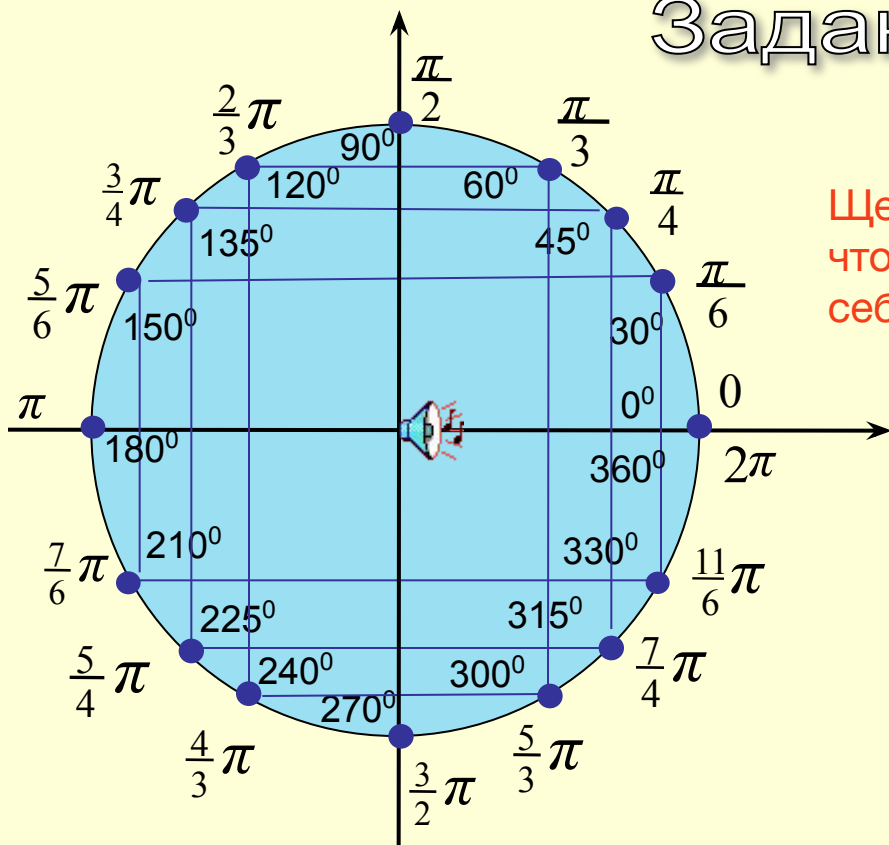
Задание 7:

-Найди на единичной окружности точки, соответствующие числам:

Щелкни по точке, что бы проверить себя .

$-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	

Забей в каждую клетку 2 мяча



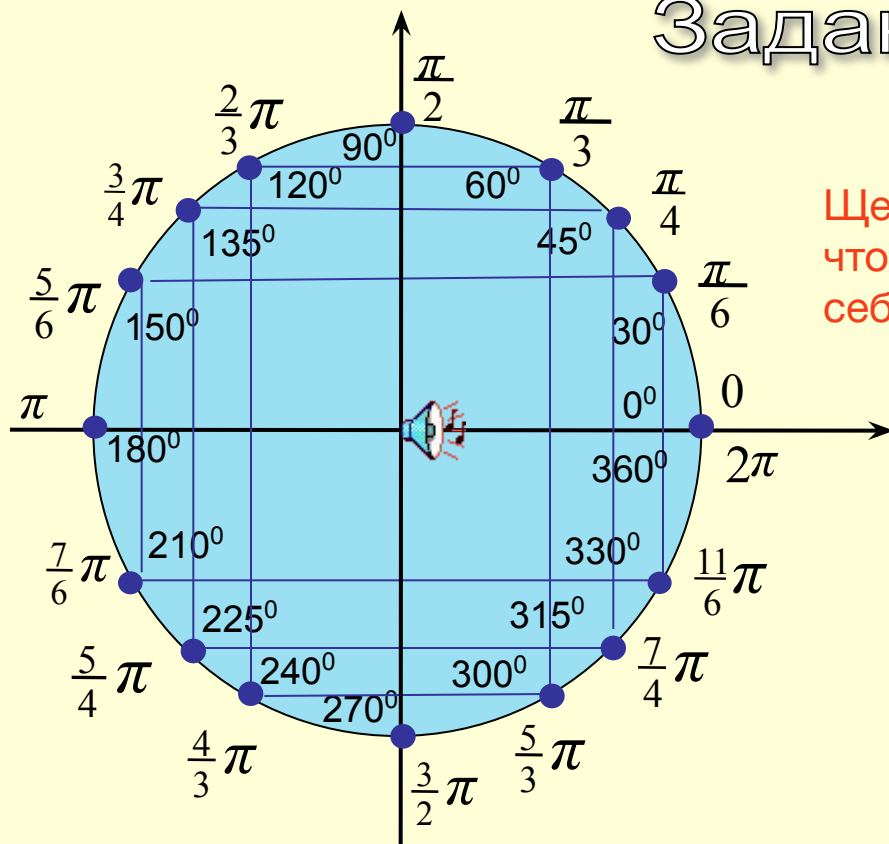
Перед тобой модель единичной окружности



Задание 8:

-Найди на единичной окружности точки, соответствующие числам:

Щелкни по точке, что бы проверить себя.



Перед тобой модель единичной окружности

$-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$\pm \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	
$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	

Забей в каждую клетку 2 мяча

