

Метод **PERT** И управление проектами

Мария Александровна Булгакова

Построение сетевой модели и расчет критического пути

Основные правила, которыми следует руководствоваться при построении сетевой модели:

1. Для каждой вершины сети номер любой предшествующей вершины должен быть меньше ее собственного номера. (Тогда говорят, что сетевая модель обладает свойством упорядоченности).
2. В сетевой модели не должно быть «лишних» - висячих и тупиковых вершин, которые никуда не ведут. Единственное исключение: исходное и завершающее событие\операция.
3. В сети не должно быть петель, контуров, и кратных дуг.
4. В сети должна быть только одна исходная и одна завершающая вершина.

- Нарушение второго правила свидетельствует либо о наличии в комплексе работ лишних операций, которые не влияют на конечный результат и ход выполнения всего комплекса операций, либо, чаще, об ошибках в построении сети.
- Выполнение третьего и четвертого правил достигается путем введения в сеть фиктивных дуг и вершин. Введение таких дуг и вершин позволяет осуществлять эквивалентные преобразования многоцелевых сетевых моделей с кратными дугами и несколькими исходными вершинами в одноцелевую сеть без кратных дуг и одной завершающей вершиной.

Сетевое планирование – метод анализа сроков (ранних и поздних) начала и окончания нереализованных частей проекта, позволяющий связать выполнение различных работ и процессов во времени, получив прогноз общей продолжительности реализации всего проекта.

Модель реализации проекта (график) формируется так, что все работы в проекте отражают технологическую последовательность их выполнения с учетом иерархической структуры работ проекта.

Детерминированные сетевые модели:

- Диаграмма Ганта (Генри Гант, 1910)
- Метод критического пути (самый длинный маршрут по задачам от исходной до конечной)

Ленточная диаграмма/календарный график — это тип столбчатых диаграмм, который используется для иллюстрации плана, графика работ по какому-либо проекту.

Ключевое понятие — **веха** — метка значимого момента в ходе выполнения работ, общая граница двух или более задач.

- + Отражает последовательность работ, необходимость в синхронизации.
- Не отображает значимости или ресурсоемкости работ.
- Сдвиг одной вехи — сдвиг всего проекта. Не является графиком проекта.
- Для крупных проектов неприменима из-за возрастающей громоздкости.

Диаграмма Ганта

[illegible]

Вероятностные сетевые модели

- Неальтернативные
 1. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло: от статистических испытаний к вероятностным моделям).
 2. Метод оценки и пересмотра планов (PERT)
- Альтернативные
 1. Метод графической оценки и анализа (GERT)

GERT

Альтернативный вероятностный метод сетевого планирования, применяется в случаях организации работ, когда последующие задачи могут начинаться после завершения только некоторого числа из предшествующих задач, причем не все задачи, представленные на сетевой модели, должны быть выполнены для завершения проекта.

Позволяют более адекватно моделировать процессы, в которых затруднительно или невозможно на начальном этапе определить, какие именно работы или в какой последовательности должны быть выполнены для достижения цели проекта.

Расчет таких сетей очень сложен, программного обеспечения на данный момент нет.

Сетевые модели

```
graph TD; A[Сетевые модели] --> B[Детерминированные]; A --> C[Вероятностные]; C --> D[Неальтернативные]; C --> E[Альтернативные];
```

Детерминированные

Взаимная последовательность и продолжительность работ заданы однозначно

Вероятностные

Неопределенности есть уже на начальном этапе, или могут возникнуть в процессе выполнения

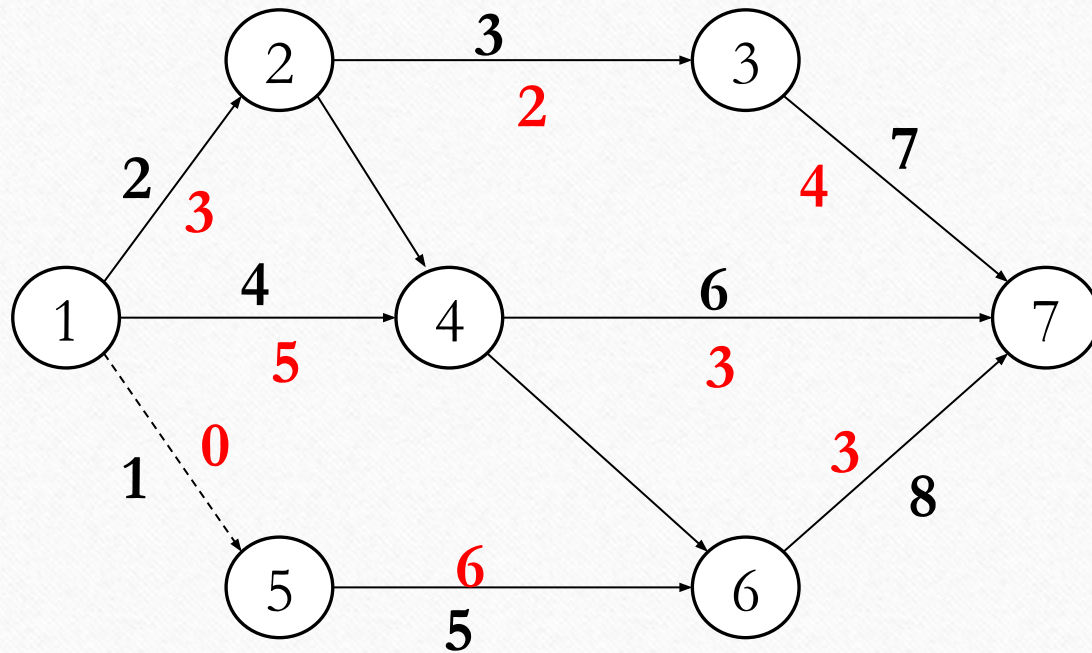
Неальтернативные

Зафиксирована последовательность выполнения работ, а их продолжительность характеризуется функциями распределения вероятности.

Альтернативные

Продолжительности работ и связи между ними носят вероятностный характер

Примеры сетевых моделей



Сетевая модель, ориентированная на события и операции:

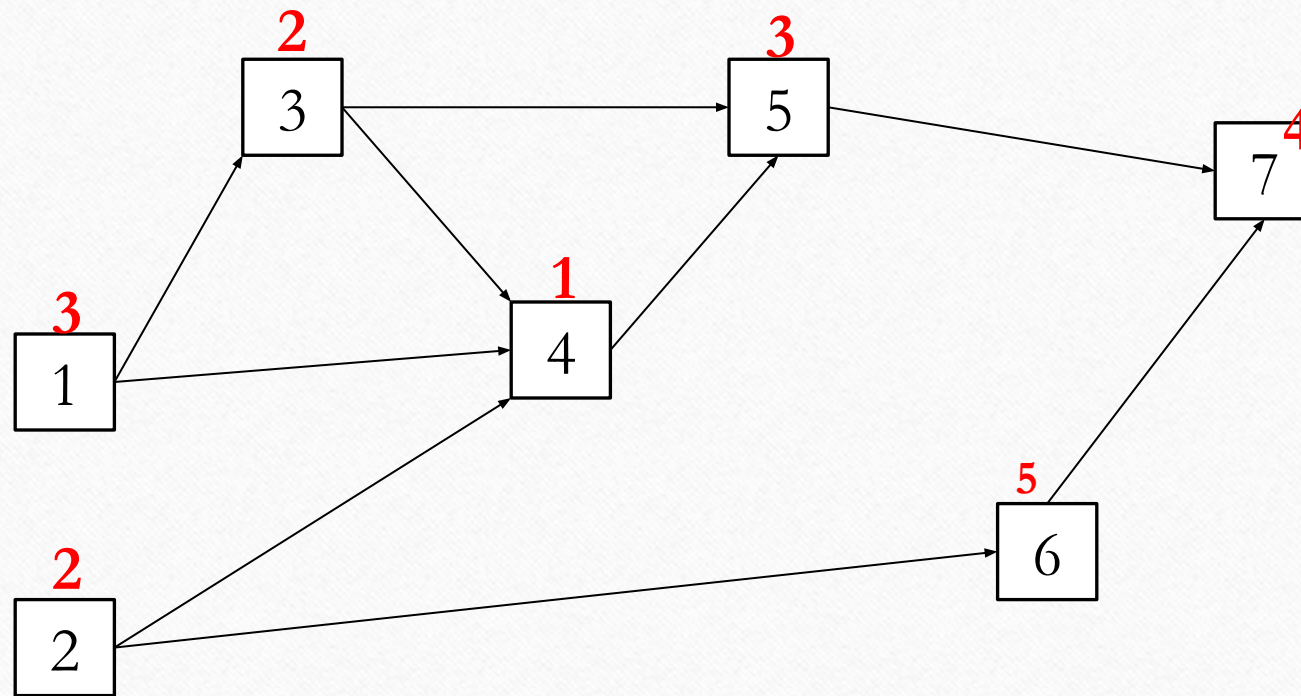


- номер события

5 – номер операции

0 – длительность операции

Примеры сетевых моделей

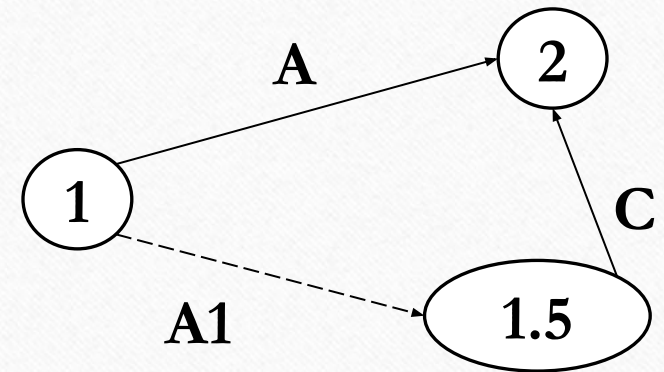
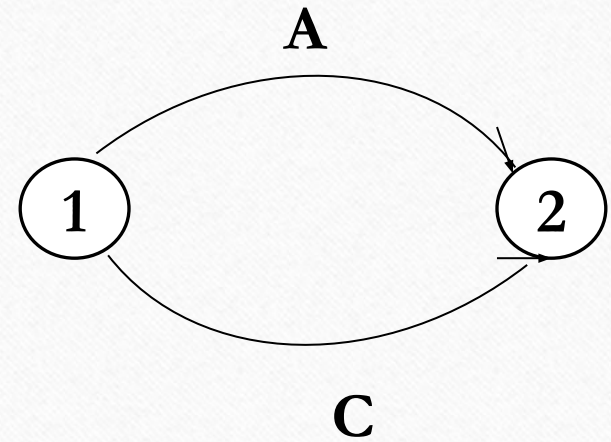
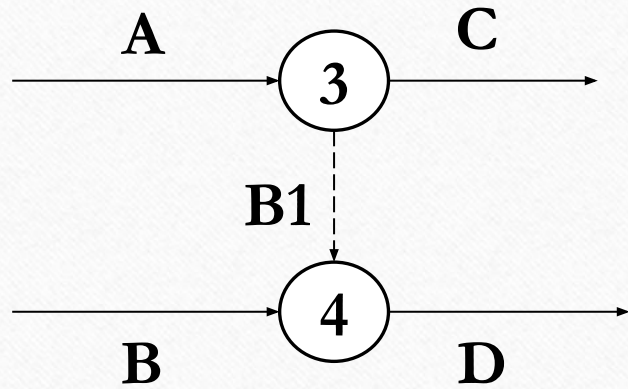
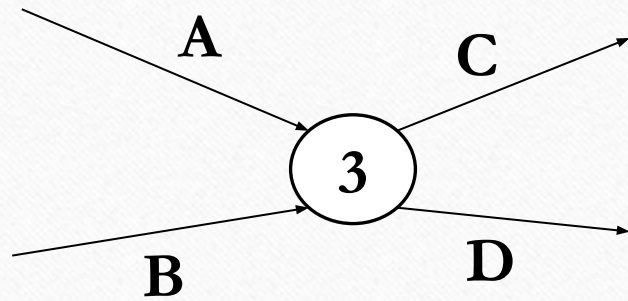


Сетевая модель,
ориентированная на
операции (работы):

7 - номер операции

4 - длительность
операции

Про фиктивные работы и кратные дуги



Пример проекта: «Приготовление завтрака»

Цель проекта:	Приготовление завтрака
Конечный результат:	Завтрак из вареного яйца, тоста и апельсинового сока
Критерий успеха:	Используются минимальные трудовые ресурсы и время. Конечный продукт имеет характеристики: яйцо и тост горячие, сок холодный.

Планирование проекта

1. Оценка сроков и ресурсов.

На этом этапе планирования необходимо определить, сколько времени и ресурсов потребуется для выполнения нашего проекта. У нас будут лишь примерные данные. Точность оценок жестко связана со стадией выполнения и уровнем неопределенности проекта. В начале проекта оценки будут менее точны, чем ближе к его финалу.

Планирование проекта

1. Оценка сроков и ресурсов.

№	Работа	Время (мин)	Трудозатраты
1	Намазать тост маслом	1	1
2	Налить апельсиновый сок	1	1
3	Сварить яйцо	4	0
4	Порезать хлеб	1	1
5	Налить воду в кастрюлю	1	1
6	Вскипятить воду	3	0
7	Поджарить хлеб	2	0
8	Подать завтрак	1	1
9	Поставить на поднос тарелки и приборы	1	1

Планирование проекта

2. Выявление отношений зависимости.

Одни работы должны строго следовать за другими.

Нельзя «сварить яйцо» не «наполнив водой кастрюлю» и не «вскипятив воду».

Логический анализ приведенных работ позволяет выявить две ветви следования работ.

Планирование проекта

2. Выявление отношений зависимости.

Порезать хлеб $\rightarrow$ поджарить хлеб $\rightarrow$ намазать тост маслом
(4 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 1)

Налить воду в кастрюлю $\rightarrow$ вскипятить воду $\rightarrow$ сварить яйцо (5 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 3)

Обе эти последовательности должны быть выполнены до работы «подать завтрак» (8)

Планирование проекта

2. Выявление отношений зависимости.

Оставшиеся работы «налить апельсиновый сок» (2), «расставить тарелки и приборы» (9) – могут быть выполнены в любое время, при условии, что будут завершены до выполнения работы «подать завтрак» (8).

Планирование проекта

2. Выявление отношений зависимости.

Построим календарный план по принципу «как можно раньше»

Время (минуты)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
работы	(2)	Резерв: 7 минут							
	(4)	(7)	(1)	Резерв: 4 минуты					
	(5)	(6)			(3)				(8)
	(9)	Резерв: 7 минут							

Последовательность 5-6-3-8 (налить воду-вскипятить воду-сварить яйцо-подать завтрак) – является **критическим путем**. Это самый длинный путь, не имеющий резервов.

Планирование проекта

2. Выявление ограничений.

Теперь необходимо сравнить потребности проекта с имеющимися в наличии ресурсами.

- Ограничения по ресурсам: при планировании учитываются только имеющиеся в распоряжении ресурсы. В результате, завершение проекта может сдвинуться по времени (например, из-за нехватки рабочих рук).
- Ограничения по времени: главный приоритет – завершение проекта точно в срок. После использования имеющихся ресурсов могут привлекаться дополнительные ресурсы (при этом возрастают затраты).

Планирование проекта

2. Выявление ограничений.

Оценка трудовых ресурсов:

Время (минуты)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
работы	(2)	Резерв: 7 минут							
	(4)	(7)		(1)	Резерв: 4 минуты				
	(5)	(6)			(3)				(8)
	(9)	Резерв: 7 минут							

Имеем в наличии лишь 1 единицу трудовых ресурсов. На первую минуту требуется 4 единицы. **План невыполним!**

Планирование проекта

2. Выявление ограничений.

Оптимизация трудозатрат по проекту:

Время (минуты)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
работы			(2)						
		(4)	(7)		(1)				
	(5)	(6)			(3)				(8)
				(9)					

Используя резервы времени, мы можем перестроить план так, чтобы уложиться в наши трудовые ресурсы. Отталкиваемся от «недвижимого» критического пути.

Планирование проекта

2. Выявление ограничений.

Оптимизация проекта по качеству.

Вариантов оптимизации по трудовым ресурсам возможно несколько, какой же из них выбрать?

Необходимо учесть установленные в начале проекта критерии качества.

При текущем плане, к тому моменту, когда сварится яйцо, тост уже остынет, а сок нагреется. Необходимо перестроить план так, чтобы результат отвечал критериям качества «яйцо и тост горячие, сок холодный».

Планирование проекта

2. Выявление ограничений.

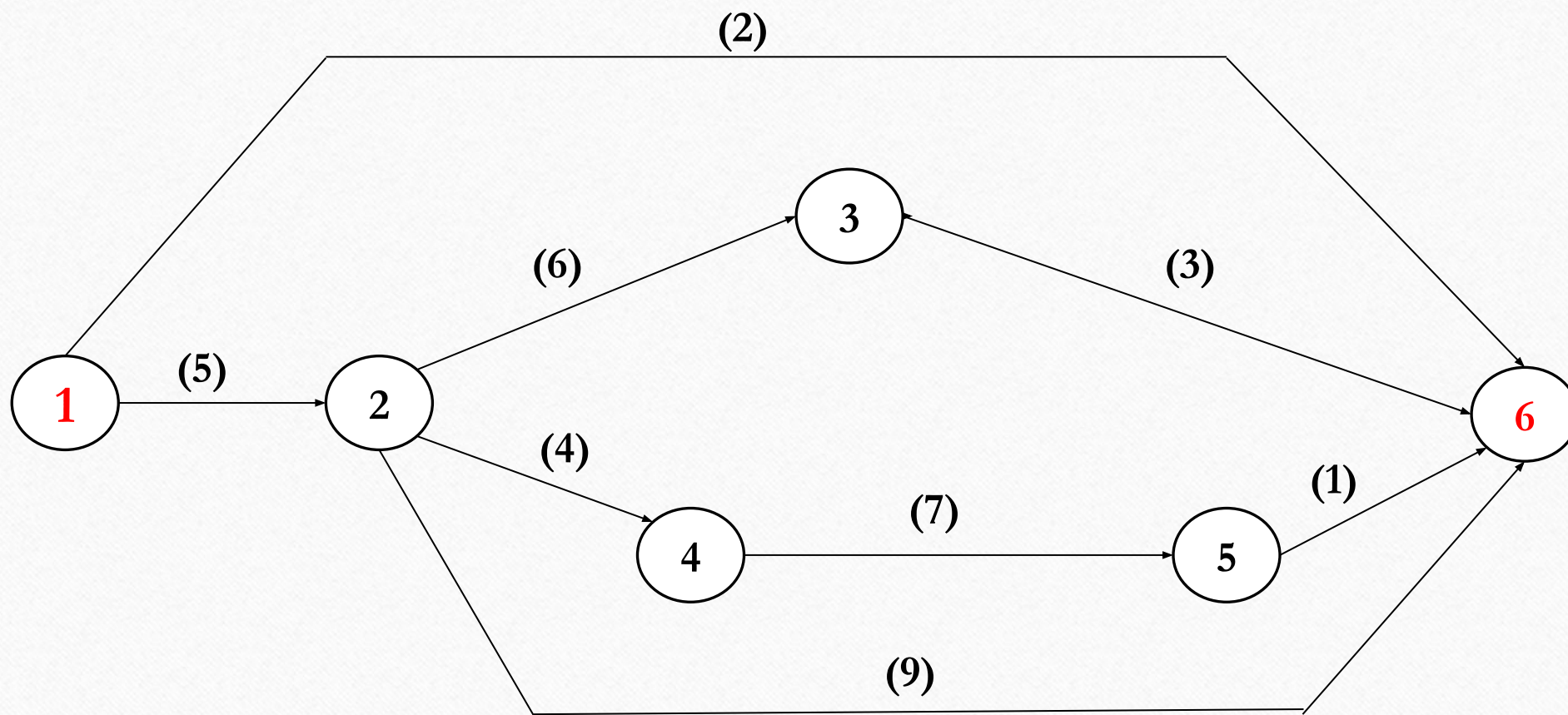
Оптимизация проекта по качеству:

Время (минуты)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
работы							(2)		
					(4)	(7)		(1)	
	(5)	(6)			(3)				(8)
				(9)					

*Трудовые ресурсы распределены, критерии качества удовлетворяются.
Построенный план оптимален.*

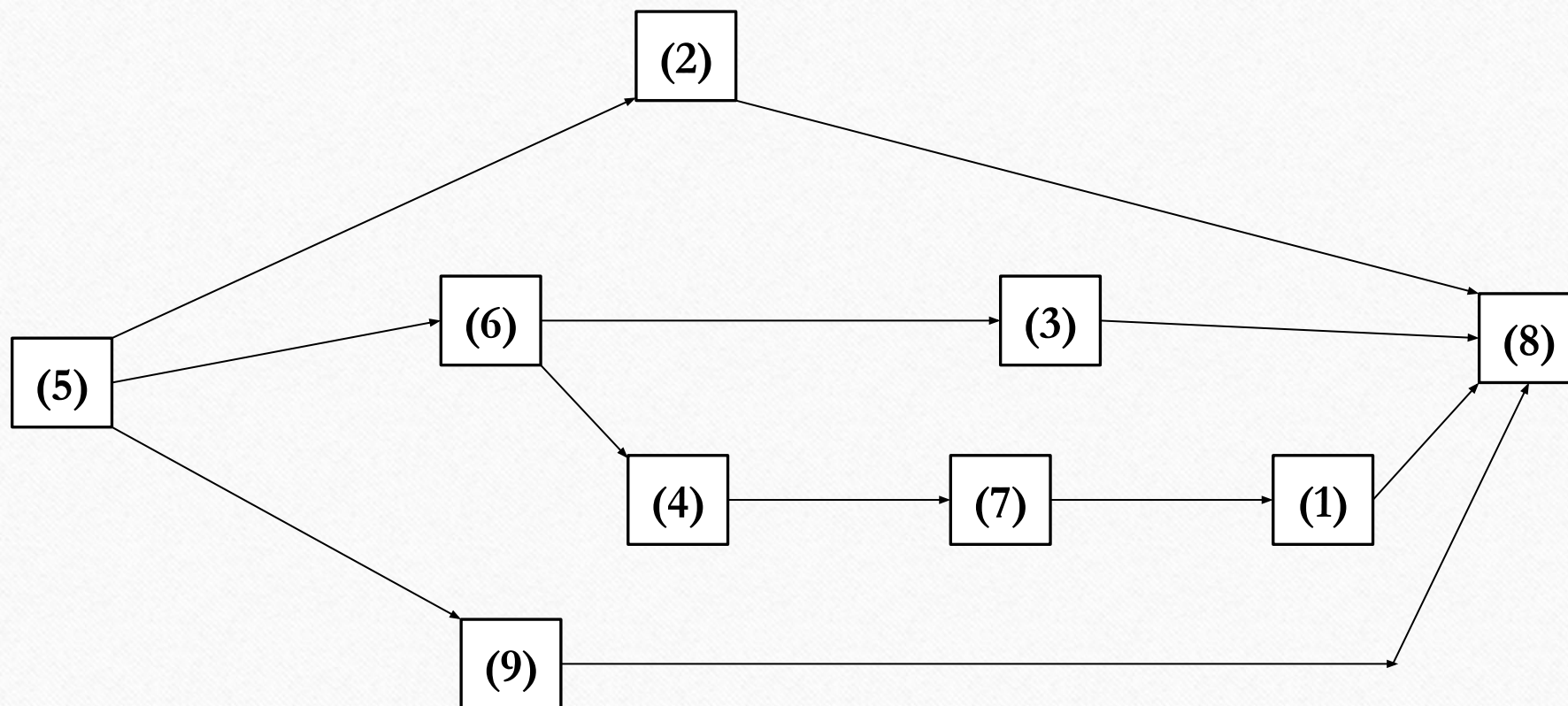
Планирование проекта

2. Сетевая модель «Дуга-работа»



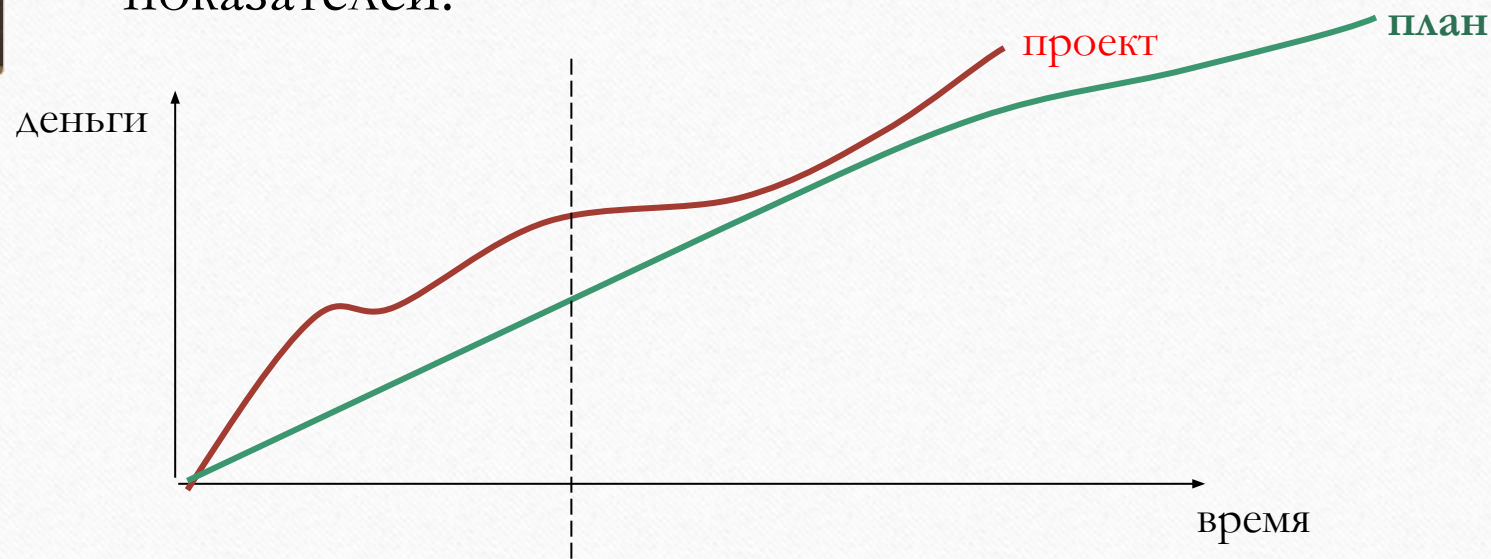
Планирование проекта

2. Сетевая модель «Узел-работа»



Выполнение проекта

Руководитель проекта выбирает приоритетный показатель: время, деньги, или качество. В ходе выполнения проекта отслеживаются все показатели, но решение о корректировках принимается с учетом приоритетности показателей.



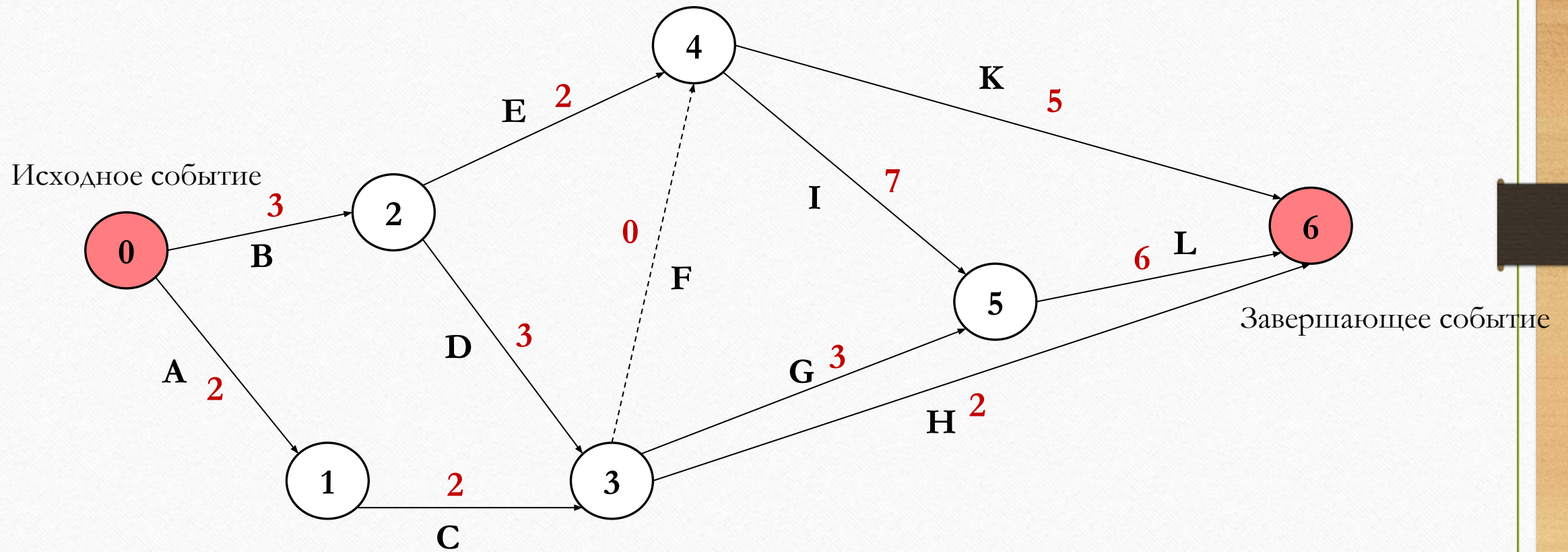
Необходимы корректировки.

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

В данной модели узел обозначает событие, а дуга – работу. Присвоим каждой вершине число, а каждой дуге – пару чисел. Первое число – вершина, из которой дуга выходит, второе число – вершина, в которую дуга входит.

Критический путь определяет непрерывную последовательность критических операций, связывающих исходное и завершающее событие сети.

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»



Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Критический путь рассчитывается в 2 этапа.

I этап – «Прямой проход» – вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети.

Для каждого события j вычисляется одно число ES_j (early start), представляющее ранний срок его наступления (т.е. ранний срок окончания всех операций, входящих в событие j , или ранний срок начала всех операций, исходящих из j)

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

II этап – «Обратный проход» – вычисления начинаются с завершающего события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие всей сети.

Для каждого события i вычисляется одно число LF_i (late finish), представляющее поздний срок его наступления (т.е. поздний срок окончания всех операций, входящих в событие i , или поздний срок начала всех операций, исходящих из i)

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

I этап «Прямой проход»

Положим:

$i=0$ – номер исходного события. Тогда $ES_0=0$

D_{ij} (duration) – продолжительность операции (i,j)

$$ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\}$$

Максимум берется по всем операциям, завершающимся в j -м событии.

Вычисления производятся по порядку, от предшественников к последователям.

Чтобы вычислить ES_j , необходимо сначала вычислить все ES_i .

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

I этап «Прямой проход»

Расчет прямого прохода для примера:

$$ES_0 = 0$$

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2$$

$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3$$

$$ES_3 = \max_{i=1,2} \{ES_i + D_{i3}\} = \max\{2 + 2; 3 + 3\} = 6$$

$$ES_4 = \max_{i=2,3} \{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3 + 2; 6 + 0\} = 6$$

$$ES_5 = \max_{i=3,4} \{ES_i + D_{i5}\} = \max\{6 + 3; 6 + 7\} = 13$$

$$ES_6 = \max_{i=3,4,5} \{ES_i + D_{i6}\} = \max\{6 + 2; 6 + 5; 13 + 6\} = 19$$

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

II этап «Обратный проход»

Положим:

$i=n$ – номер завершающего события. Тогда $LF_n = ES_n$
 D_{ij} (duration) – продолжительность операции (i,j)

$$LF_i = \min_j \{LF_j - D_{ij}\}$$

Минимум берется по всем операциям, начинающимся в i -м событии.

Вычисления производятся по порядку, от последователей к предшественникам.

Чтобы вычислить LF_i , необходимо сначала вычислить все LS_j .

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

II этап «Обратный проход»

Расчет обратного прохода для примера:

$$LF_6 = ES_6 = 19$$

$$LF_5 = LF_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13$$

$$LF_4 = \min_{j=5,6} \{LF_j - D_{4j}\} = \min\{13 - 7; 19 - 5\} = 6$$

$$LF_3 = \min_{j=4,5,6} \{LF_j - D_{3j}\} = \min\{6 - 0; 13 - 3; 19 - 2\} = 6$$

$$LF_2 = \min_{j=3,4} \{LF_j - D_{2j}\} = \min\{6 - 3; 6 - 2\} = 3$$

$$LF_1 = LF_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4$$

$$LF_0 = \min_{j=1,2} \{LF_j - D_{0j}\} = \min\{4 - 2; 3 - 3\} = 0$$

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Объединяя результаты первого и второго этапов, можно определить операции, принадлежащие критическому пути.

Операция (i,j) принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет следующим условиям:

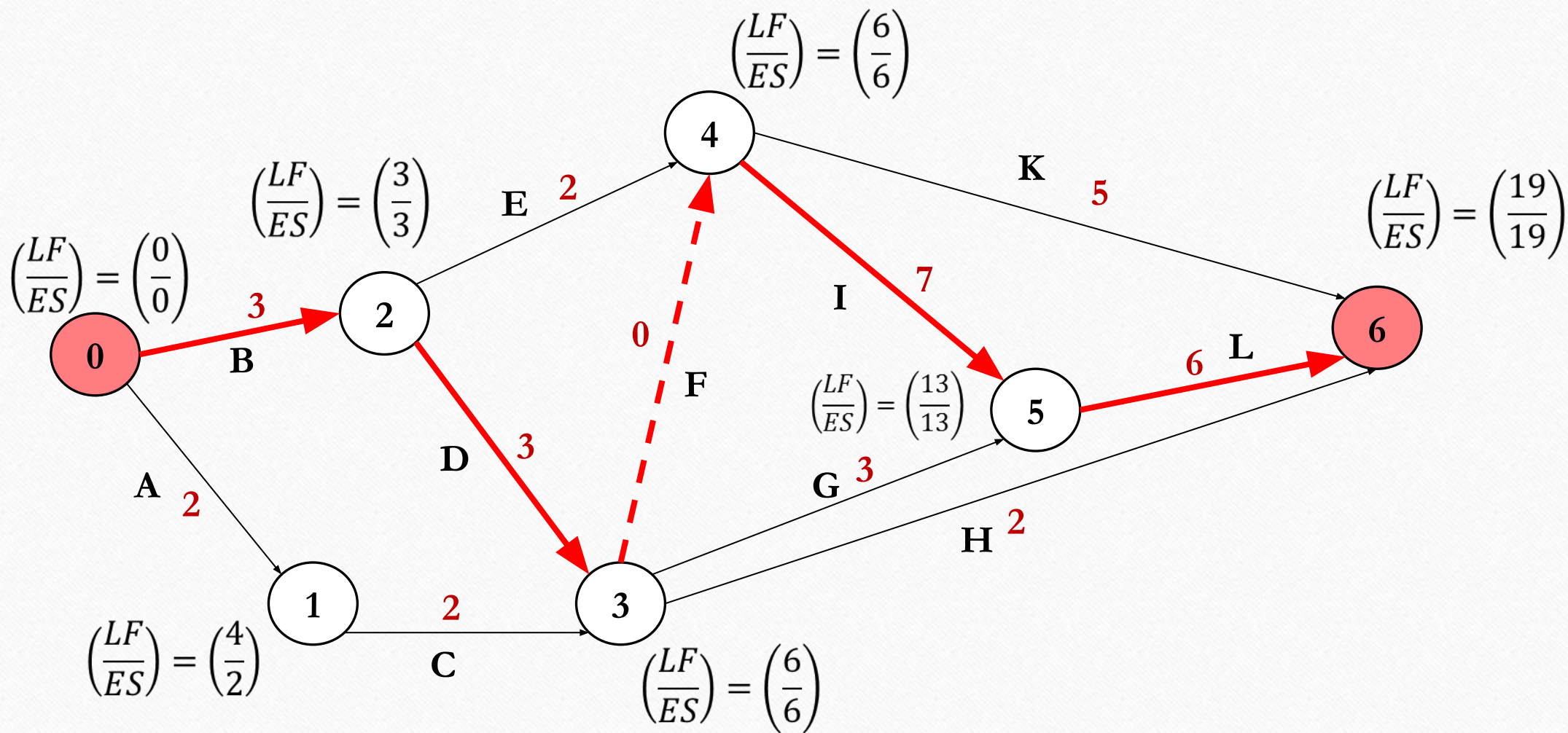
$$ES_i = LF_i \quad (1)$$

$$ES_j = LF_j \quad (2)$$

$$ES_j - ES_i = LF_j - LF_i = D_{ij} \quad (3)$$

Речь идет о событиях, они происходят мгновенно, запас времени между началом и концом события означает резерв времени для исходящей из него операции. Для критических операций такой резерв отсутствует.

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»



Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Расчет резервов времени

Расчет резервов времени производится для некритических операций (для критических он равен нулю)

ES_{ij} - наиболее ранний возможный срок начала операции (i,j) (early start)

$ES_{ij} = ES_i$ - поскольку работа не может начаться раньше соответствующего события.

$EF_{ij} = ES_{ij} + D_{ij}$ - наиболее ранний возможный срок окончания операции. (early finish)

$LF_{ij} = LF_j$ - работа не может закончиться позже своего завершающего события. (late finish)

$LS_{ij} = LF_{ij} - D_{ij}$ - наиболее поздний возможный срок начала операции (late start)

Резерв – показатель гибкости планирования некритических операций.

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Расчет резервов времени

Гарантированный (Secure float - SF)

Полный (Total float - TF)

Резерв

Свободный (Free float - FF)

Независимый (Independent float - IF)

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Расчет резервов времени

Сроки завершения предшествующих работ	Сроки начала последующих работ	
	ES ранние	LS поздние
EF ранние	Свободный резерв FF	Полный резерв TF
LF поздние	Независимый резерв IF	Гарантированный резерв SF

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Полный резерв TF

Расчет резервов времени

TF_{ij} — Представляет собой максимальную продолжительность задержки для работы (i,j), не влекущую за собой задержку всего проекта.

$$TF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij}$$



Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Свободный резерв FF

Расчет резервов времени

FF_{ij} — **Свободный резерв** — это показатель максимальной задержки работы (i,j), не влияющий на начало последующих работ.

Операцию со свободным резервом можно откладывать, не влияя на ранний старт других операций. Такая операция требует меньше координации с другими участниками проекта.

$$FF_{ij} = ES_j - EF_{ij}$$

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Независимый резерв IF

Расчет резервов времени

IF_{ij} – **Независимый резерв** – не оказывает никакого влияния на предшествующие и последующие работы. Представляет собой максимальную продолжительность задержки работы (i,j), без задержки последующих работ, если все предшествующие работы заканчиваются как можно позже.

$$IF_{ij} = \max\{0, ES_j - (LF_i + D_{ij})\}$$

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Гарантированный резерв SF

Расчет резервов времени

SF_{ij} — **Гарантированный резерв** — это максимально возможная задержка работы, не влияющая на окончательный срок выполнения проекта, если предшествующие работы выполнены с запаздыванием.

$$SF_{ij} = LF_{ij} - (LF_i + D_{ij})$$

Расчет критического пути по модели «Дуга-работа»

Расчет резервов времени для примера

Операция (i,j)		Раннее		Позднее		TF	FF	IF	SF
A (0,1)	2	0	2	2	4	2	0	0	2
B (0,2)	3	0	3	0	3	0	0	0	0
C (1,3)	2	2	4	4	6	2	2	0	0
D (2,3)	3	3	6	3	6	0	0	0	0
E (2,4)	2	3	5	4	6	1	1	1	1
F (3,4)	0	6	6	6	6	0	0	0	0
G (3,5)	3	6	9	10	13	4	4	4	4
H (3,6)	2	6	8	17	19	11	11	11	11
I (4,5)	7	6	13	6	13	0	0	0	0
K (4,6)	5	6	11	14	19	8	8	8	8
L (5,6)	6	13	19	13	19	0	0	0	0

Операция (работа)	Последова- тели	Предшест- венники
A	B, C	нет
B	E	A
C	D, F	A
D	G, I	C
E	G, I	B
F	H, L	C
G	H, L	D, E
H	K, O	F, G
I	K, O	D, E
J	K, O	нет
K	M	H, I, J
L	M	F, G
M	N	K, L
N	нет	M
O	нет	H, I, J

Задание:

- Построить сетевую модель «дуга-работа»
- Вычислить критический путь
- Вычислить резервы и составить расчётную таблицу

Практическое задание №1

По выбранной теме проекта из списка работ построить упорядоченную таблицу и указать отношения предшествования\следования. (Для этого переобозначить работы – удобнее буквами, чтобы не было путаницы с событиями, которые мы обозначаем номерами. Если буквы кончатся, то буквами с номером.)

Построить сетевую модель «дуга-работа»

Вычислить критический путь, резервы времени и составить расчетную таблицу.

Форма сдачи произвольная, excel при грамотном использовании немного облегчит задачу монотонных вычислений.