

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Производная функции в точке. Геометрический и механический смысл производной

п 1. Основные понятия.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a; b)$. Возьмем любое значение $x \in (a; b)$ и приращение Δx аргументу x в точке x_0 такое, что $x_0 + \Delta x \in (a; b)$. Приращению аргумента Δx соответствует приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Считая $\Delta x \neq 0$, рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

которое будем называть разностным отношением (в данной точке x_0).

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ разностного отношения (1), при условии, что этот предел существует. Производная функции $y = f(x)$, в точке x_0 обозначается символом $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Таким образом, по определению производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

п 2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 1). Точки M и P имеют координаты: $M(x_0, f(x_0))$, $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Угол между секущей MP и осью OX обозначим $\varphi(\Delta x)$

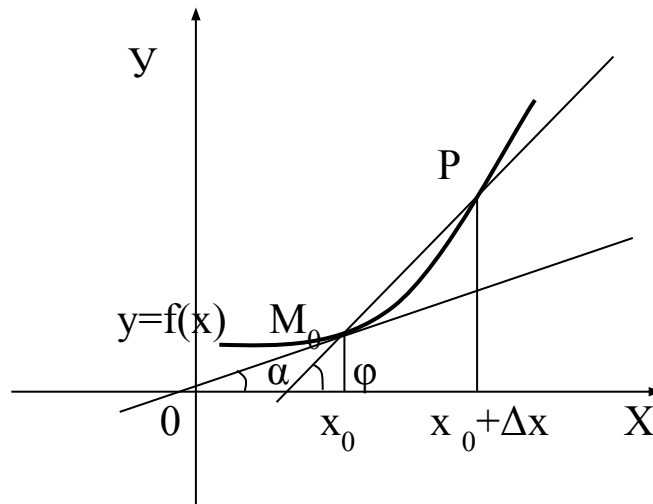


Рис.1

Имеем
$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как секущая MP при $\Delta x \rightarrow 0$ переходит в касательную, то где α – угол, образованной касательной с осью OX .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Следовательно, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является **угловым коэффициентом** касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Уравнение касательной, в этом случае, имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной, называется **нормалью** к данной кривой.

Ее уравнение

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0).$$

п 3. Механический смысл производной.

Пусть функция $s = f(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е. зависимость пути s , пройденного точкой от начала отсчета за время t . Тогда производная - это **мгновенная скорость** $v(t_0)$ точки в момент времени t_0 .

п 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема . Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют производные в данной точке x , то в этой точке существуют производные их суммы, разности, произведения и частного (частное при условии, что $v(x) \neq 0$), причем имеют место формул

$$1^0 \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

в частности $[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x),$

$$2^0 \quad [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

$$3^0 \quad \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Замечание 1. Нахождение производной функции называется **дифференцированием**.

Замечание 2. Производная функции в точке определяет скорость изменения этой функции в данной точке.

§ 2. Производная обратной функции. Правило дифференцирования сложной функции.

п 1. Обратная функция.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и обратная ее функция $x = \varphi(y)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в точке x_0 этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$, определяемую равенством

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Например. Дана функция $y = \arcsin x$. Обратная ей функция $x = \sin y$.

Т. к. $x' = (\sin y)' = \cos y$, то

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \left| \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

п.2 Сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — называется сложной функцией с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема . Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x_0 ,равную

$$y'_x(x_0) = y'_u \cdot u'_x$$

Пример. Найти производную функции

$$y = \sin^5 x .$$

Решение. Здесь $y = f(u) = u^5$, а $u = \varphi(x) = \sin x$. Т.к. $y'_u = (u^5)' = 5u^4$,

а $u'_x = (\sin x)' = \cos x$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 5u^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cdot \cos x$$

п.3 Таблица производных функций

$$1. (c)' = 0.$$

$$2. (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' ,$$

$$2a. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$