# Тригонометрические уравнения Практикум по решению

- $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
- $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$
- $\mathrm{tg}\, x + 3\,\mathrm{ctg}\, x - 4 = 0$
- $4\sin x + 3\cos x = 0$
- $\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$
- $1 + \cos x + \cos 2x = 0$
- $\cos x - \sin 2x = 0$
- $\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x = 0$
- $4\cos^2 x - 1 = 0$

?

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$\Updownarrow$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

**Уравнение**

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

**квадратное**

**относительно “sin x”**

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Пусть $\underline{\sin x = t}$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

a b c

$\underline{D = b^2 - 4ac}$

$$D = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25$$

$\underline{t_{1,2} = (-b \pm\sqrt{D})/2a}$

$$t_{1,2} = (-3\pm\sqrt{25})/4$$

$t_1 = -2$ | $t_2 = ½$

$\sin x = -2$ | $\sin x = ½$

Нет корней | $x=(-1)^k\cdot п/6+пk$

$\sin x = a$ $(|a|\leq 1)$

$x=(-1)^k\cdot \arcsin a+пk$, $k\in Z$

**Ответ:** $x=(-1)^k\cdot п/6+пk,$

?

$$2\,\underline{\sin^2 x} - 5\,\underline{\cos x} - 5 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

**Если в уравнении встречаются разные тригонометрические функции, то надо попытаться их заменить на какую-нибудь одну, используя тригонометрические тождества.**

***Каким тригонометрическим тождеством связаны синус и косинус одного и того же аргумента?***

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x - 5 = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 5 = 0$

$-2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

$2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$2t^2 + 5t + 3 = 0$

a b c

$D = b^2 - 4ac$

$t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$

$D = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1$

$t_1 = -3/2$

$t_2 = -1$

$\cos x = -3/2$

$\cos x = -1$

$\cos x = a$ $(|a| \le 1)$

при $a = -1$

частный случай

Нет корней

$x = \pi + 2\pi k$

Ответ: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

**?**

**$\underline{tg\ x} + 3\ \underline{ctg\ x} - 4 = 0$**

**Если в уравнении встречаются разные тригонометрические функции, то надо попытаться их заменить на какую-нибудь одну, используя тригонометрические тождества.**

***Каким тригонометрическим тождеством связаны тангенс и котангенс одного и того же аргумента?***

$\boxed{tg\ x \cdot ctg\ x = 1}$

$\operatorname{tg} x + 3 \underline{\operatorname{ctg} x} - 4 = 0$

$\operatorname{tg} x + 3 \cdot \underline{1/\operatorname{tg} x} - 4 = 0$

$t + 3/t - 4 = 0 \quad | \cdot t$

$t^2 + 3 - 4t = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

a b c

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$t_1 = 1$ $t_2 = 3$

$\operatorname{tg} x = 1$ $\operatorname{tg} x = 3$

$x = п/4 + пn$ $x = \operatorname{arctg} 3 + пk$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$

$\underline{\operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x}$

Пусть $\underline{\operatorname{tg} x = t}$

$\underline{D = b^2 - 4ac}$

$\underline{t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a}$

$\operatorname{tg} x = a$ (a-любое число)

$x = \operatorname{arctg} a + пk, k \in Z$

Ответ: $x = п/4 + пn; x = \operatorname{arctg} 3 + пk; k,n \in Z$

?

$4 \sin x + 3 \cos x = 0$

**Это уравнение однородное 1 - ой степени относительно sin x и cos x**

*Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень называется однородным*

**Уравнение решается путём деления обеих его частей на старшую степень косинуса, то есть на**

$\cos x \neq 0$

**В результате получается уравнение вида**

$A \operatorname{tg} x + B = 0$

$4\sin x + 3\cos x = 0$ | : $\cos x \neq 0$

⇩

$4\,\underline{\sin x / \cos x} + 3\cos x / \cos x = 0$

$\mathrm{tg}\, x = \sin x / \cos x$

⇩

$4\,\underline{\mathrm{tg}\, x} + 3 = 0$

$\underline{a x + b = 0}$

$a x = -b$

$x = -b / a$

⇩

$4\,\mathrm{tg}\, x = -3$

⇩

$\mathrm{tg}\, x = -3/4$

$\mathrm{tg}\, x = a$ (a-любое число)

⇩

$x = \mathrm{arctg}(-3/4) + \pi k$

$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$

**Ответ:** $x = \mathrm{arctg}(-\tfrac{3}{4}) + \pi k;\ k \in Z$

?

$$\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$$

*Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень называется* ***однородным***

**Это уравнение однородное 2 - ой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$**

**Уравнение решается путём деления обеих его частей на старшую степень косинуса, то есть на** **$\underline{\cos^2 x \neq 0}$**

**В результате получается уравнение вида**

$$\boxed{A\,\mathrm{tg}^2 x + B\,\mathrm{tg}\, x + C = 0}$$

$\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$ | : $\cos^2 x \neq 0$

$\sin^2 x/\cos^2 x - (5\sin x \cdot \cos x)/\cos^2 x + 6\cos^2 x/\cos^2 x = 0$

$\mathrm{tg}\, x = \sin x/\cos x$

$\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg} x + 6 = 0$

Пусть $\underline{\mathrm{tg}\, x = t}$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

a b c

$\underline{D = b^2 - 4ac}$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$\underline{t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a}$

$t_1 = 2$ $t_2 = 3$

$\mathrm{tg}\, x = a$ (а-любое число)

$\mathrm{tg}\, x = 2$ $\mathrm{tg}\, x = 3$

$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$

$x = \mathrm{arctg} 2 + \pi k$ $x = \mathrm{arctg} 3 + \pi n$

Ответ: $x = \mathrm{arctg} 2 + \pi k;\ x = \mathrm{arctg} 3 + \pi n;\ k, n \in Z$

?

$1 + \cos x + \cos 2x = 0$

Это уравнение решается с помощью одной из формул тригонометрии:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

В некоторых тригонометрических уравнениях предварительно требуется преобразовать выражение с помощью формул тригонометрии:

- основных тригонометрических тождеств,
- сложения,
- двойного аргумента

В результате получается уравнение с одной функцией одного и того же аргумента

$1 + \cos x + \underline{\cos 2x} = 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$1 + \cos x + \underline{2\cos^2 x - 1} = 0$

$\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\cos x$ - общий множитель

$\cos x(1 + 2\cos x) = 0$

Произведение равно «0», если .....

$\cos x = 0$

$1 + 2\cos x = 0$

$\cos x = a$ ($|a| \le 1$)

$x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$

$x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$

$\cos x = -½$

$x = \pm \arccos(-½) + 2\pi k$

$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$

Ответ: $x = \pi/2 + \pi n$; $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$, $k, n \in Z$

?

cos x +  sin 2x = 0

Это уравнение решается с помощью формулы тригонометрии:

sin 2x = 2 sin x· cos x

В некоторых тригонометрических уравнениях предварительно требуется преобразовать выражение с помощью формул тригонометрии:

- основных тригонометрических тождеств,
- сложения,
- двойного аргумента

В результате получается уравнение, которое решается путём вынесения общего множителя за скобки

$\cos x - \underline{\sin 2x} = 0$

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$\cos x - \underline{2 \sin x \cdot \cos x} = 0$

$\cos x$ - общий множитель

$\cos x(1 - 2 \sin x) = 0$

Произведение равно «0», если .....

$\cos x = 0$

$1 - 2 \sin x = 0$

$x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z$

$\sin x = ½$

$\sin x = a \ (|a| \leq 1)$

$x=(-1)^k \cdot \arcsin a+\pi k, \ k \in Z$

$x=(-1)^k \cdot \arcsin ½+\pi k$

$x=(-1)^k \cdot \pi/6 + \pi k$

**Ответ:** $x = \pi/2 + \pi n; \ (-1)^k \cdot \pi/6+\pi k, \ k,n \in Z$

?

$$\sqrt{3} \cdot tg^2 x - 3\, tg\, x = 0$$

⇓

**Это уравнение решается путём вынесения общего множителя за скобки**

⇓

**В результате разность тригонометрических функций преобразуется в произведение, которое по условию равно «0»**

$\sqrt{3} \cdot tg^2 x - 3\,tg\, x = 0$

**tg x - общий множитель**

$tg\, x\,(\sqrt{3} \cdot tg\, x - 3) = 0$

**Произведение равно «0», если .....**

$tg\, x = 0$

$\sqrt{3} \cdot tg\, x - 3 = 0$

$x = arctg\, 0 + \pi k$

$tg\, x = 3/\sqrt{3}$

**tg x = a (a-любое число)**

$x = \pi n,\ n \in Z$

$tg\, x = \sqrt{3}$

**x=arctg a+πk, k∈Z**

$x = arctg\, \sqrt{3} + \pi k$

$x = \pi/3 + \pi k$

**Ответ: x = πn; π/3+πk, k,n ∈ Z**

# ?

$$4\cos^2 x - 1 = 0$$

**Это уравнение решается путём разложения выражения на множители**

**В результате выражение в левой части уравнения преобразуется в произведение,
которое по условию равно «0»**

$$4\cos^2 x - 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

Произведение равно «0», если …..

$2\cos x - 1 = 0$ | $2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = 1/2$ | $\cos x = -1/2$

$x = \pm \arccos 1/2 + 2\pi n$ | $x = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k$

$x = \pm \pi/3 + 2\pi n$ | $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$

$\cos x = a$

(а-любое число)

$x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$

**Ответ:** $x = \pm \pi/3 + 2\pi n$; $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$, $k,n \in Z$