

Глава 6

Элементарные функции и задаваемые ими конформные отображения

6.1 Линейная функция

Определение. Линейной называется функция $w = az + b$, где a, b — комплексные постоянные и $a \neq 0$.

Область определения $D = \mathbb{C}$, функция однолистка, $w' = a$, следовательно функция аналитична на $\mathbb{C}$.

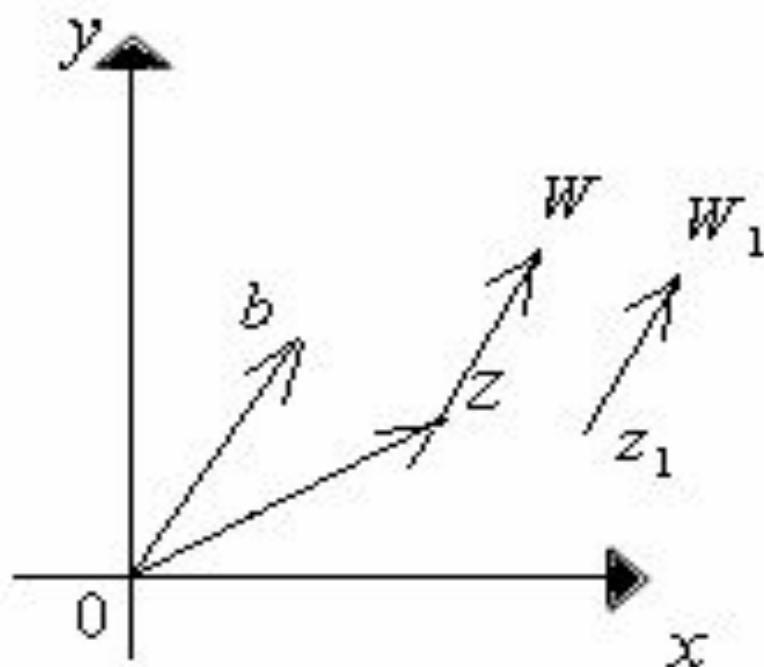
Эта функция устанавливает...? отображение...? рода.

Итак, линейная функция устанавливает конформное отображение 1 рода с постоянным коэффициентом растяжения $k = \|a\|$ и одинаковым углом поворота равным $Arg a$.

Изучим подробнее отображение, осуществляемое данной функцией. При этом совместим плоскости (z) и (w) так, чтобы совпали их оси координат.

Рассмотрим сначала частные случаи.

1. Пусть $a = 1$. Функция примет вид (2) $w = z + b$. Эта функция каждой точке z ставит в соответствие т. $w = z + b$.
Так как сложение комплексных чисел геометрически сводится к сложению векторов, то при отображении $w = z + b$ каждая т. z смещается в соответствующую т. w на вектор b , изображающий число b .



В виду того, что b постоянно, вектор сдвига одинаков для всех точек плоскости, и мы имеем преобразование параллельного переноса.

Если положим $z = x + iy$, $b = b_1 + ib_2$, $W = U + iV$, то равенство

$$(2) \quad w = z + b \text{ запишется в равносильном ему виде } (3) \quad \begin{cases} U = x + b_1, \\ V = y + b_2, \end{cases}$$

формулы параллельного переноса в декартовых координатах.

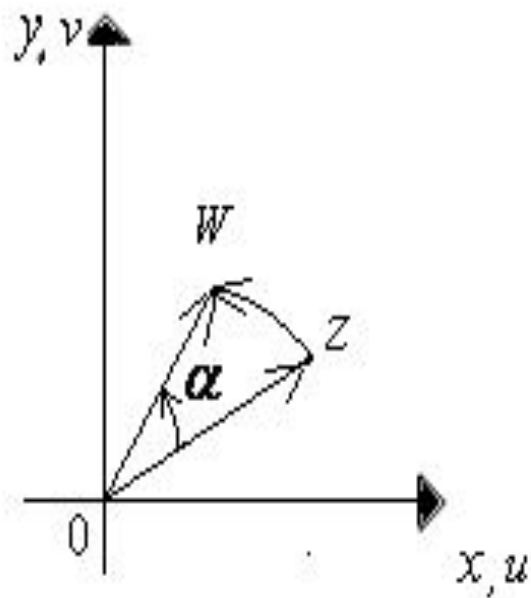
2. $|a| = 1, b = 0$.

Запишем a в тригонометрической форме (4) $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Функция примет вид $w = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot z$.

Очевидно $|w| = |z|$ и $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z + \alpha$.

Поясните?



Следовательно, точки z и w находятся на одинаковом расстоянии от нулевой точки и аргументы их отличаются на один угол α .

Таким образом, отображение осуществляемое функцией есть вращение на угол α вокруг начала координат. Если $z = x + iy$, $w = U + iV$, то отображение $w = az$, $|a| = 1$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} U &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ V &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad (5) - \text{формулы вращения в}$$

декартовых координатах.

3. В этом случае коэффициент при z , т.е. a является действительным положительным числом $a = k$. Функция $w = kz$ ставит в соответствие каждому комплексному числу z комплексное число w такое, что $\|w\| = k \|z\|$, $Arg w = Arg z$. Это значит, что точки z и w лежат на одном луче, исходящем из нулевой точки и отношение $\frac{\|w\|}{\|z\|} = k$.

Следовательно отображение является ... ?

гомотетией с центром в нулевой точке и коэффициентом k .
При $k > 1$ имеем растяжение, при $k < 1$ - сжатие, при $k = 1$ -
тождественное преобразование плоскости.

Вернемся к рассмотрению общего случая.

Положим $a = k (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, тогда (1) примет вид

$w = k (\cos \alpha + i \sin \alpha) z + b$. Это преобразование может быть

получено путем последовательного выполнения преобразований:

$\xi = (\cos \alpha + i \sin \alpha) * z$ – вращение на угол α ,

$\tau = k * \xi$ – гомотетия,

$w = \tau + b$ – параллельный перенос.

Укажем некоторые свойства линейной функции

1. Линейная функция $w = az + b$, где $\|a\| = 1$.

Сохраняет расстояние между точками.

Доказательство.

Пусть z_1, z_2 — произвольные точки комплексной плоскости (z)

$$w_2 - w_1 = az_1 + b - (az_2 + b) = a(z_1 - z_2).$$

Так как $\|a\| = 1$, то $\|w_2 - w_1\| = \|z_2 - z_1\|$.

2. Линейная функция $w = az + b$ отображает треугольник на подобный ему треугольник.

Доказать самостоятельно.

2. Линейная функция $w = az + b$ отображает окружность на окружность.

Доказательство.

Данное свойство вытекает из того, что составляющие преобразования (вращение, гомотетия, параллельный перенос) обладают этим свойством.

6.2 Функция $w = \frac{1}{z}$

Функция $w = \frac{1}{z}$ определена на множестве $D = \mathbb{C} - \{0\}$,
однолистка на D , имеет на этом множестве производную
 $w' = \frac{-1}{z^2} \neq 0$. Следовательно отображение, осуществляемое
функцией $w = \frac{1}{z}$ конформное первого рода во всех точках
плоскости $\mathbb{C}$ за исключением $z = 0$.

Запишем z в тригонометрической форме $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

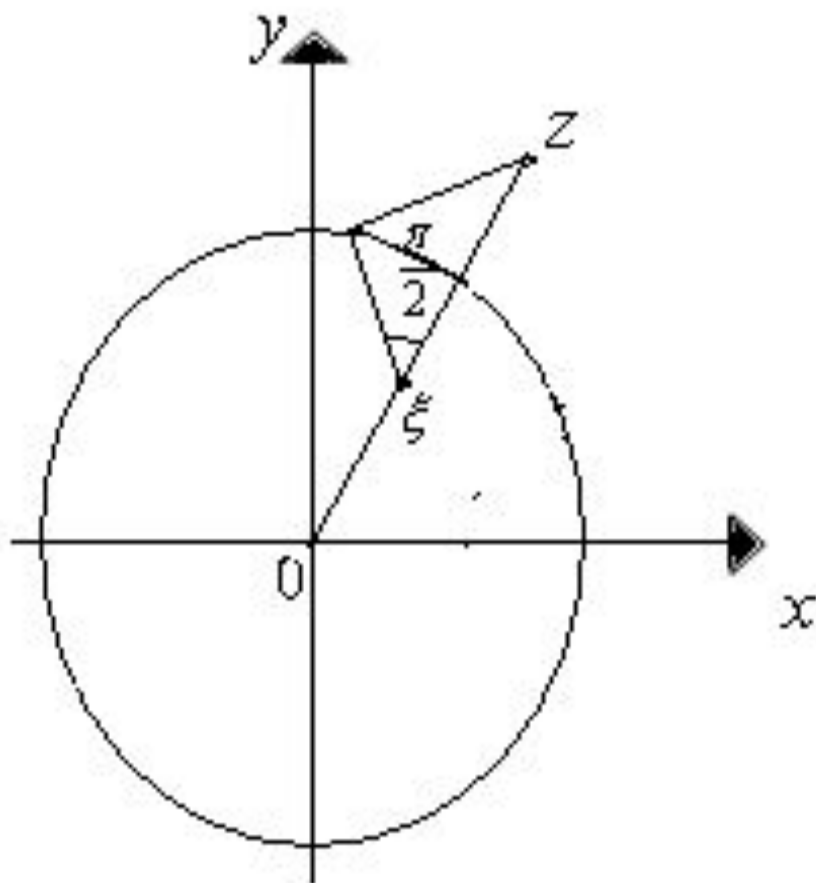
$$\text{Тогда } w = \frac{1}{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Отсюда следует: $\|w\| = \frac{1}{r}$, $\text{Arg } w = -\varphi + 2\pi K$.

Введем вспомогательную функцию $\xi = w = \frac{1}{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

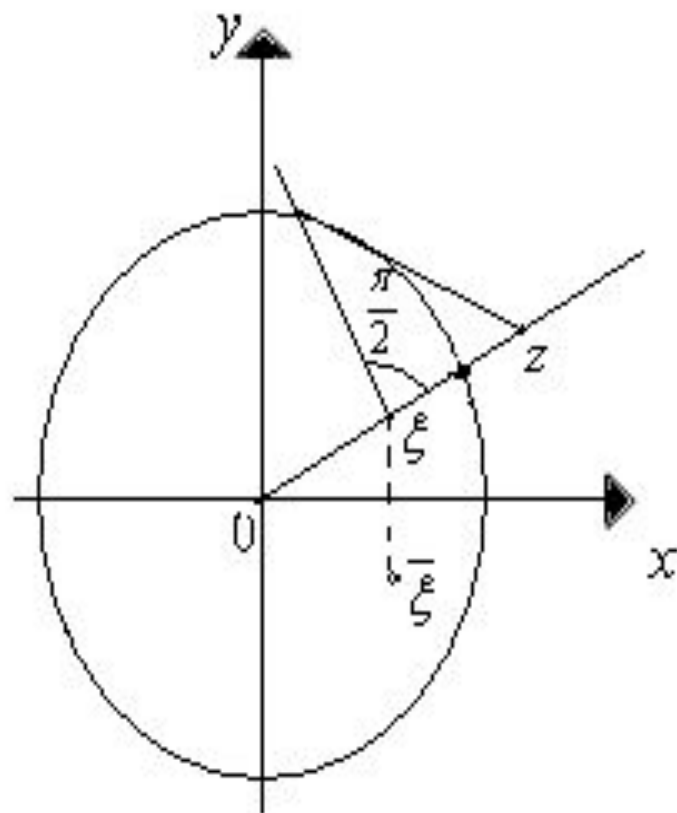
Очевидно $\|\xi\| = \frac{1}{r}$, $Arg \xi = -\varphi + 2\pi K$. Следовательно точки ξ и z находятся на одном луче, выходящем из нулевой точки, что и z , а произведение их модулей $\xi * r = 1$.

Значит точки ξ и z взаимно инверсны относительно единичной окружности $\|z\| = 1$.



Построение инверсных точек
 в случае $|z| > 1$ осуществляется
 следующим образом: из т. z
 проводим касательную к
 единичной окружности и из
 точки касания опускаем
 перпендикуляр на луч Oz .
 Основание перпендикуляра
 является точкой инверсной z .

Если z находится внутри круга $|z|=1$, т.е. $|z|<1$, то построение инверсной т. ξ производится в обратном порядке. Точки единичной окружности при инверсии остаются неподвижными.



После построения т. ξ
 инверсной т. z относительно
 единичной окружности $|z|=1$,
 построение $w = \bar{\xi}$ состоит в
 нахождении точки, симметричной
 точке ξ относительно
 действительной оси.

Итак, преобразование $w = \frac{1}{z}$ есть
 наложение двух преобразований
 относительно единичной окружности
 и отражения относительно
 действительной оси $\xi = \frac{1}{z}$, $w = \bar{\xi}$.

Функция $w = \frac{1}{z}$ не определена в т. $z = 0$ и $z = \infty$. Доопределим эту функцию положив в т. $z = 0$ $w = \infty$, а в т. $z = \infty$ $w = 0$. Теперь эта функция определена на расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$.

Это отображение конформно на $\overline{C}$, если условиться считать, что угол между кривыми в бесконечно удаленной точке равен углу между образами кривых в начале координат.

Круговое свойство отображения $w = \frac{1}{z}$.

Докажем, что функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует прямую в окружность или в прямую и преобразует окружность в окружность или в прямую. Если считать прямую окружностью бесконечно большого радиуса, то можно сказать, что функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует окружность в окружность. Это свойство называется круговым.

Для доказательства запишем уравнение произвольной окружности в декартовых координатах:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (*)$$

Заметим, что при $A = 0$ уравнение изображает прямую, а при $D = 0$ - линию, проходящую через т. $z = 0$. Из соотношения

$$w = \frac{1}{z} \text{ находим } z = \frac{1}{w} \text{ или } x = iy = \frac{1}{U + Vi} = \frac{U - Vi}{U^2 + V^2} \text{ откуда}$$

$$x = \frac{U}{U^2 + V^2} \text{ и } y = \frac{-V}{U^2 + V^2}.$$

Подставляя в уравнение $(*)$ эти значения x и y , находим $A + BU - CV + D(U^2 + V^2) = 0$. Мы получили уравнение окружности в обобщенном виде.

При $D = 0$ это уравнение изображает прямую.

Итак, функция $w = \frac{1}{z}$ отображает прямую или окружность, проходящие через т. $z = 0$ в прямую, а не проходящие – в окружность.

6.3 Дробно-линейная функция

Определение 1. Дробно-линейной называется функция

$$(1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } c \neq 0, ad - bc \neq 0.$$

Смысл ограничений состоит в том, что:

1. при $c = 0, d \neq 0$ $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ - функция линейна,

2. при $ad - bc = 0$ функция сводится к постоянной $w = \frac{a}{c}$ и преобразует всю плоскость в одну точку.

Доопределим функцию (1) в точках $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$, положив

$$w\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty \text{ и } w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

При этих дополнениях функция определена на всей расширенной плоскости (z).

Функция осуществляет взаимно-однозначное отображение плоскости (z) на плоскость (w) .

Каждому $w \left(w \neq \frac{a}{c}, w \neq \infty \right)$ соответствует значение $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$,

а при $w = \frac{a}{c}$ и $w = \infty$ имеем $z \left(\frac{a}{c} \right) = \infty$, $z(\infty) = -\frac{d}{c}$.

Функция $w = \frac{az + b}{cz + d}$ имеет производную $w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$ во всех

точках плоскости (z) кроме $z = -\frac{d}{c}$, следовательно она

аналитична на всей плоскости (z) кроме $z = -\frac{d}{c}$.

Так как $w'(z) \neq 0$, то отображение, осуществляемое этой

функцией конформно во всей плоскости (z) исключая т. $z = -\frac{d}{c}$.

Покажем, что функция конформна в т. $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$. Пусть

γ_1 и γ_2 две кривые образующие угол с вершиной в т. $z = -\frac{d}{c}$.

Их образы — кривые Γ_1 и Γ_2 проходят через т. $w = \infty$. Как было показано ранее угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 в т. $w = \infty$

принимается равным между их образами Γ_1 и Γ_2 в нулевой

точке при отображении $\xi = \frac{1}{w}$. Очевидно, что Γ'_1 и Γ'_2 являются

образами кривых γ_1 и γ_2 при отображении $\xi = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}$, а это

отображение конформно в т. $z = -\frac{d}{c}$.

Поэтому угол между γ_1 и γ_2 в т. $z = -\frac{d}{c}$ равен углу между Γ'_1 и Γ'_2 в нулевой точке и следовательно углу между Γ_1 и Γ_2 в т. $w = \infty$.

Итак, отображение конформно в т. $z = -\frac{d}{c}$. Конформность дробно линейного отображения в т. $z = \infty$ следует из конформности обратного отображения в т. $w = \frac{a}{c}$.

Записав дробно-линейную функцию в виде $w = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$,

замечаем, что она может быть рассмотрена как наложение преобразований (3) $\xi = z + \frac{d}{c}$, $\tau = \frac{1}{\xi}$, $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \tau$, т.е.

параллельного переноса в т. $-\frac{d}{c}$, инверсии с полюсом в т. $-\frac{d}{c}$,

отражением относительно прямой, проходящей через т. $-\frac{d}{c}$,

параллельно действительной оси, и, наконец, линейного преобразования.

Укажем два важных свойства дробно-линейного преобразования:

1. Круговое свойство. Каждое из трех преобразований (3) обладает круговым свойством, поэтому дробно-линейное преобразование обладает этим свойством.

Дробно-линейная функция преобразует окружность или прямую, проходящие через точку $z = -\frac{d}{c}$ в прямую, а не проходящие через эту точку – в окружность.
Почему?

Это становится ясным, если заметить, что т. $z = -\frac{d}{c}$ переходит в $w = \infty$ и образ линии, проходящей через т. $z = -\frac{d}{c}$ не может быть ограниченным.

2. Симметрия и ее сохранение.

Определение 2. Точки z и ξ , расположенные на радиусе некоторой окружности S и его продолжении так, что

$\|Oz\| * \|\xi O\| = R^2$, где O и R обозначают центр и радиус окружности

S , называются сопряженными или симметричными относительно S . Центр окружности S считается сопряженным с бесконечно удаленной точкой.

Теорема. Произвольное дробно-линейное преобразование переводит точки z и ξ , симметричные относительно окружности C , в т. w и ω , симметричные относительно образа C этой окружности.

