# ТЕМА 5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

1. Основные понятия алгебры логики
2. Элементарные булевы функции
3. Полнота системы булевых функций
4. Законы и тождества алгебры логики
5. Представление булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами
6. Синтез комбинационных схем

# 1 Основные понятия алгебры логики

Математический аппарат, базирующийся на алгебре логики, широко используется для описания функционирования, анализа и синтеза цифровых схем.

Основным понятием алгебры логики является высказывание.

***Высказыванием*** называется всякое суждение (утверждение), которое либо истинно, либо ложно. Одновременно истинным и ложным высказывание быть не может.

Истинность высказывания обозначается единицей, а ложность – нулем.

***Простое высказывание*** не зависит от значений других высказываний.

Значение истинности ***сложного высказывания*** зависит от истинности других высказываний, составляющих его.

Любое сложное высказывание можно считать *логической функцией* от простых высказываний (аргументов).

Логическая функция, как и ее аргументы, принимает только два значения: *единица или нуль*.

Множество символов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, каждый из которых принимает значения единица или нуль, называется **множеством переменных или аргументов**.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве всевозможных наборов аргументов из $X$ и принимающая значения единица или нуль, называется **функцией алгебры логики или булевой функцией**.

Областью определения булевой функции служит совокупность всевозможных $n$-мерных наборов из единиц и нулей.

**Три способа задания булевых функций:**

1. *Формула,* указывающая в явном виде последовательность операций, производимых над переменными:

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. *Таблица истинности,* в левой части которой перечисляются все возможные комбинации значений аргументов $x_1$, $x_2$,..., $x_n$, а в правой – значения функции. При $n$ переменных число строк таблицы равно $2^n$.
3. *Логическая схема* или условное графическое изображение логической функции.

Число различных функций алгебры логики, зависящих от $n$ аргументов, конечно и равно $2^{2^n}$.

| Количество входных переменных | 1 | 2 | 3 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|
| Число входных наборов | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | … | $2^n$ |
| Число логических функций | $2^2$ | $2^4$ | $2^8$ | … | $2^{2^n}$ |

Значения функции могут быть заданы не на всех возможных наборах аргументов. Функции, значения которых на некоторых наборах не определены, называются ***не полностью определенными***.

Функция $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ ***существенно зависит*** от аргумента $x_i$, если имеет место соотношение

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},0,\,x_{i+1},\dots,x_n) \neq f(x_1,\dots,x_{i-1},\,1,\,x_{i+1},\dots,x_n).$$

В противном случае функция зависит от $x_i$ несущественно и $x_i$ является ее ***фиктивным аргументом***.

Функция не изменится, если к ее аргументам дописать любое число фиктивных аргументов или зачеркнуть те аргументы, которые для данной функции являются фиктивными.

# 2 Элементарные булевы функции

Элементарные булевы функции образуются путем использования однородных связей между двоичными переменными.

Элементарных функций, которые часто употребляются в алгебре логике и ее приложениях:

- Две функции, которые не зависят ни от одного аргумента ($n$=0 ). Это $\boldsymbol{f_1}$ = 0 – ***константа нуль*** и $\boldsymbol{f_2}$ = 1 – ***константа единица***.

- При $n$ = 1 имеем две функции, существенно зависящие от одного аргумента $x$.

$\boldsymbol{f_3} = x$ - ***функцией прямой передачи сигнала***,

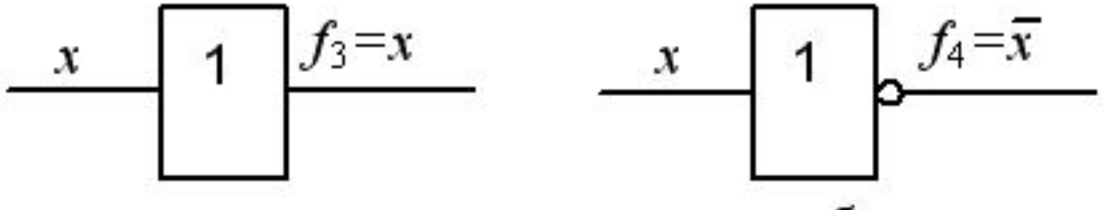
$f_4 = \bar{x}$ - ***функцией отрицания или инверсии***

| $x$ | $f_3(x)$ | $f_4(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются **логическими элементами.**

Их входы соответствуют булевым переменным, а выход – реализуемой функции. Для обозначения логических элементов используют упрощенные изображения в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующей функции.

Элемент НЕ (инвертор)




а б

Существует 16 функций, существенно зависящих от двух аргументов $x_1$ и $x_2$.

| Переменные | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **Функции** | | | | | |
| $f_0$ | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $f_1$ | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $f_2$ | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $f_3$ | | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $f_4$ | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $f_5$ | | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $f_6$ | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $f_7$ | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $f_8$ | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $f_9$ | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f_{10}$ | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f_{11}$ | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $f_{12}$ | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $f_{13}$ | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $f_{14}$ | | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $f_{15}$ | | 1 | 1 | 1 | 1 |

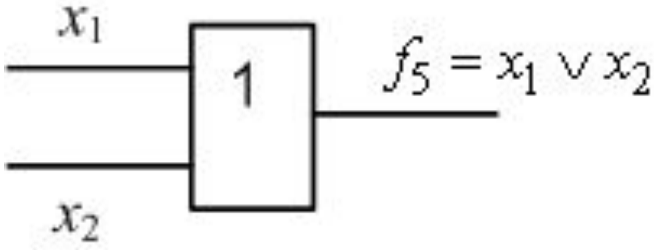
| Функция в аналити-ческом выражении | Наименование | Словестное выражение | Выражение в элементарном базисе |
|---|---|---|---|
| $f_0=0$ | Константа “0” | Всегда ложно | $x_1x_1 \vee x_2x_2$ |
| $f_1=x_1x_2$<br>$f_1=x_1\&x_2$ | Коньюнкция, И | $x_1$ и $x_2$ | $x_1\&x_2$ |
| $f_2=x_1\leftarrow x_2$ | Запрет $x_1$ | Запрет по $x_2$ | $x_1x_2$ |
| $f_3=x_1$ | Повторение $x_1$ | Повторение $x_1$ | $x_1$ |
| $f_4=x_2\leftarrow x_1$ | Запрет $x_2$ | Запрет по $x_1$ | $x_1x_2$ |
| $f_5=x_2$ | Повторение $x_2$ | Повторение $x_2$ | $x_2$ |
| $f_6=x_1\oplus x_2$ | Сложение по модулю 2, неравнозначность, исключающее ИЛИ | $x_1$ неравнозначно $x_2$ | $x_1x_2 \vee x_1x_2$ |
| $f_7=x_1 \vee x_2$<br>$f_7=x_1+x_2$ | Дизьюнкция, ИЛИ | $x_1$ или $x_2$ | $x_1 \vee x_2$ |
| $f_8=x_1\downarrow x_2$ | Стрелка Пирса[1], ИЛИ-НЕ | не $x_1$ и не $x_2$ | x1 v x2 |
| $f_9=x_1\equiv x_2$ | Равнозначность, эквивалентность | $x_1$ равнозначно $x_2$ | $x_1x_2 \vee x_1x_2$ |
| $f_{10}=x_2$ | Инверсия, отрицание $x_2$ | Не $x_2$ | $x_2$ |
| $f_{11}=x_2\rightarrow x_1$ | Импликация $x_1$ | Если $x_2$, то $x_1$ | $x_1 \vee x_2$ |
| $f_{12}=x_1$ | Инверсия, отрицание $x_1$ | Не $x_1$ | $x_1$ |
| $f_{13}=x_1\rightarrow x_2$ | Импликация $x_2$ | Если $x_1$, то $x_2$ | $x_1 \vee x_2$ |
| $f_{14}=x_1 \mid x_2$ | Штрих Шеффера[2], И-НЕ | Не $x_1$ или не $x_2$ | x1 x2 |
| $f_{15}=1$ | Константа “1” | Всегда истинно | $(x_1 \vee x_1)\ (x_2 \vee x_2)$ |

К элементарным функциям обычно относят: функцию инверсии (отрицания), конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, штрих Шеффера и стрелку Пирса.

Функция $f_5(x_1, x_2) = x_1 \cup x_2$ называется ***дизъюнкцией***, или логическим ***сложением*** . Читается «$x_1$ или $x_2$».

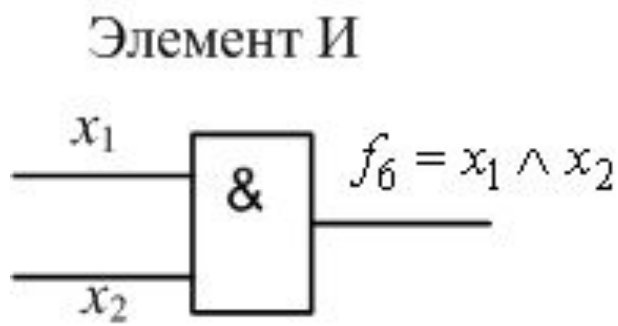
| $x_1$ | $x_2$ | $f_5$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Элемент ИЛИ



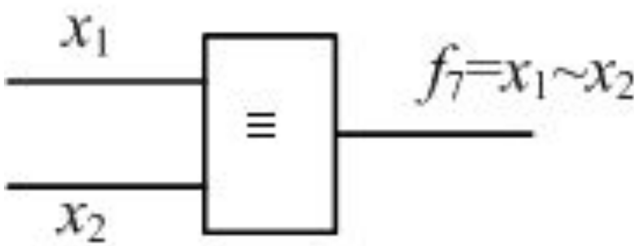
Функция $f_6(x_1, x_2) = x_1 \cap x_2$ называется ***конъюнкцией***, или ***логическим умножением*** . Читается «$x_1$ и $x_2$».

| $x_1$ | $x_2$ | $f_6$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



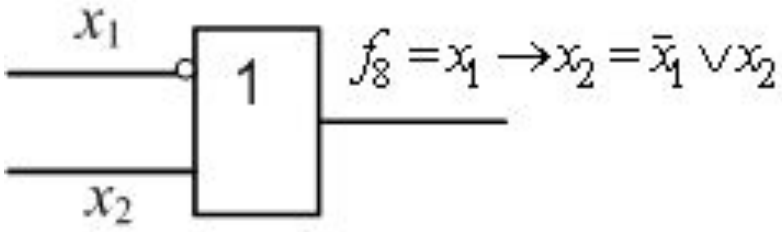

Функция $f_7(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ называется ***функцией эквивалентности***, или ***функцией равнозначности***. Читается «$x_1$ эквивалентно $x_2$».

| $x_1$ | $x_2$ | $f_7$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



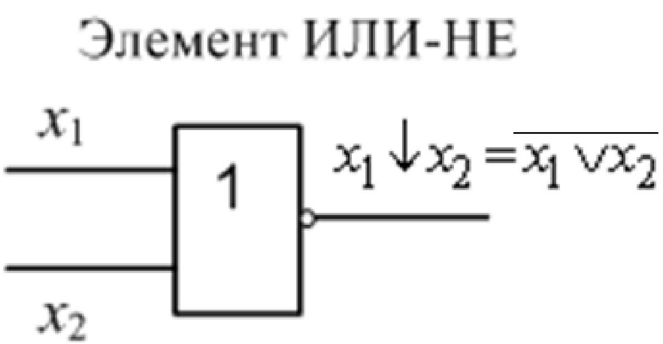
Функция $f_8(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ называется ***функцией импликации.*** Читается «если $x_1$, то $x_2$».

| $x_1$ | $x_2$ | $f_8$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



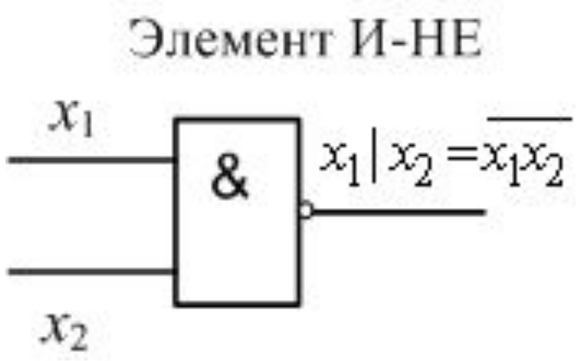

Функция $f_9(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ называется ***функцией Вебба, или стрелкой Пирса***. Читается «ни $x_1$ ни $x_2$».

| $x_1$ | $x_2$ | $f_9$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |



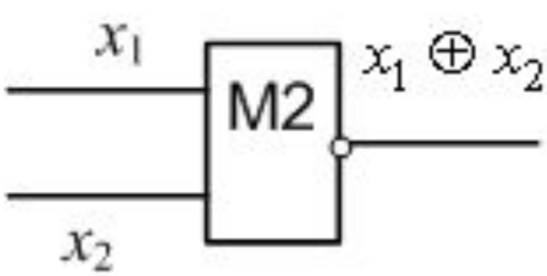
Функция $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ называется ***функцией Шеффера***. Читается «неверно, что $x_1$ и $x_2$ ».

| $x_1$ | $x_2$ | $f_{10}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |




Функция $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ называется ***функцией сложения по модулю 2***. Читается «$x_1$ неравнозначно $x_2$».

| $x_1$ | $x_2$ | $f_{11}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



# 3 Полнота системы булевых функций

Одно из основных понятий алгебры логики - понятие функциональной ***полноты системы булевых функций***.

Система булевых функций называется *функционально полной*, если она позволяет представить любую булеву функцию.

Логические элементы, соответствующие функционально полным наборам булевых функций, образуют так называемый ***базис*** и позволяют построить любую сколь угодно сложную логическую схему.

Функции от двух переменных могут быть представлены с помощью трех функций: отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

$$f_8 = x_1 \rightarrow x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) = \overline{x_1 \bar{x}_2};$$

$$f_9 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2;$$

$$f_{10} = x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1 x_2};$$

$$f_{11} = x_1 \oplus x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Наиболее распространенными являются базисы И-ИЛИ-НЕ, ИЛИ-НЕ, И-НЕ.

# 4 Законы и тождества алгебры логики

Законы алгебры логики устанавливают эквивалентность логических формул, образованных с помощью полного набора логических операций И, ИЛИ, НЕ.

1) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \quad , \; x_1x_2 = x_2x_1$$

2) Ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \quad , \; x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$$

3) Идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$$x \vee x = x$$

$$x + x = x, \; , \quad xx = x$$

4) Дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3, \quad x_1 \vee (x_2x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

5) де Моргана

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2, \qquad \overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2;$$

6) Двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

7) Склеивания

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1, \qquad x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1;$$

8) Поглощения

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1, \quad x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$$

9) Действия с константами 0 и 1

$$x \vee 0 = x, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot \bar{x} = 0, \quad x \vee \bar{x} = 1$$

**Правило 1.** Если логическая сумма двоичных переменных содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно есть некоторая переменная, а другое – ее отрицание, то она является тождественно истинной:

$$x_1 \vee \bar{x}_5 \vee x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \equiv 1.$$

**Правило 2**. Если логическое произведение двоичных переменных содержит хотя бы одну пару сомножителей, из которых один есть некоторая переменная, а другой – ее отрицание, то оно является тождественно ложным

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4x_3x_2 \equiv 0.$$

Следует отметить, что законы де Моргана справедливы для любого числа переменных:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n;$$

$$\overline{x_1x_2\ldots x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n.$$

# 5 Представление булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами

Любая логическая функция может выражаться различными логическими формулами, являющимися эквивалентными. Наиболее удобными для практического использования являются нормальные формы представления сложных логических функций.

***Элементарной конъюнкцией* Q** называется логическое произведение любого конечного числа переменных и их отрицаний, причем каждая переменная встречается только один раз. Число переменных, составляющих элементарную конъюнкцию, называется ее **рангом.**

***Дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций:

$$N = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k .$$

Любая булева функция может быть представлена в ДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \cup \bar{x}_1 x_3 \cup \bar{x}_2 .$$

***Элементарной дизъюнкцией D*** называется логическая сумма конечного числа переменных и их отрицаний, причем каждая переменная встречается в сумме один раз. Число переменных, составляющих элементарную дизъюнкцию, называется ее **рангом**.

$$D = x_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3 \cup x_4$$

***Конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций:

$$K = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n. \quad \longrightarrow \quad \boxed{K = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_n.}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_3) \cap (\bar{x}_1 \cup x_3) \cap (x_2 \cup \bar{x}_3).$$

$$\downarrow$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Одна и та же логическая функция путем эквивалентных преобразований может быть представлена различными ДНФ или КНФ.

Единственность представления обеспечивают совершенные нормальные формы.

***Совершенной ДНФ*** (СДНФ) логической функции $f(x_1, x_2, x_n)$ от $n$ различных переменных называется ДНФ, которая содержит только конъюнкции ранга $n$ и не содержит одинаковых конъюнкций.

Произвольная логическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приводится к СДНФ в следующей последовательности:

1) Функция $f$ приводится к какой-либо ДНФ;

2) Конъюнкции, не содержащие всех двоичных переменных, дополняются до конъюнкций $n$-го ранга;

3) Из полученной ДНФ с конъюнкциями $n$-го ранга удаляются повторяющие друг друга конъюнкции.

**Пример 1.** Привести функцию к СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

**Решение:** Дополним конъюнкции второго ранга до конъюнкций третьего ранга, используя закон склеивания:

$$\bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Просуммируем конъюнкции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Если логическая функция задана таблицей истинности, то построение СДНФ осуществляется по следующему алгоритму:

1) Выбираются наборы аргументов, на которых функция обращается в единицу;

2) Выписываются конъюнкции, соответствующие этим наборам, причем если аргумент $x_i$ входит в набор как единица, то в конъюнкцию он вписывается без изменения. Если же аргумент $x_i$ входит в данный набор как нуль, то в соответствующую конъюнкцию вписывается его отрицание;

3) Все выписанные конъюнкции соединяют знаком дизъюнкции.

Элементарные конъюнкции СДНФ называют ***конституентами единицы***.

**Пример.** Построить СДНФ для функции, заданной таблицей истинности (таблично).

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3.$$

***Совершенной КНФ (СКНФ)*** логической функции $f$ от $n$ различных переменных называется КНФ, которая содержит только дизъюнкции ранга $n$ и не содержит одинаковых дизъюнкций.

Построение СКНФ по таблично заданной функции:

1) Выбираются наборы аргументов, на которых функция обращается в нуль;

2) Выписываются дизъюнкции, соответствующие этим наборам, причем если аргумент $x_i$ входит в набор как нуль, то в дизъюнкцию он вписывается без изменения. Если же аргумент $x_i$ входит в данный набор как единица, то в соответствующую дизъюнкцию вписывается его отрицание;

3) Все выписанные дизъюнкции соединяют знаком конъюнкции.

Элементарные дизъюнкции СКНФ называют ***конституентами*** нуля.

**Пример**. Построить СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблично.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

# 6 Синтез комбинационных схем

Под комбинационной схемой понимается техническое устройство, предназначенное для преобразования дискретной информации, причем значения выходных сигналов однозначно определяются значениями входных сигналов в данный момент времени.

Предполагается, что в комбинационных схемах не происходит задержки сигнала, а входные и выходные сигналы могут принимать только значения единица и нуль (это могут быть высокий и низкий уровни напряжения).

Синтезировать комбинационную схему – это означает на основе заданного алгоритма работы построить структурную схему минимальной сложности из логических элементов заданного базиса.

Синтез комбинационных схем осуществляется в три этапа:

1) Запись условий функционирования устройства (эти условия могут быть заданы словесно, с помощью таблицы истинности, либо с помощью логической функции);

2) Минимизация логической функции и приведение ее к заданному базису;

3) Составление структурной схемы устройства.

**Пример.** Синтезировать комбинационную схему, реализующую булеву функцию в базисе И-ИЛИ-НЕ.

Рассмотреть переход к базисам И-НЕ и ИЛИ-НЕ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 / x_2) \oplus (\bar{x}_3 \to x_1)$$

Представим функцию в ДНФ. Для этого используем формулы

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2}; \qquad x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2; \qquad x_1 \oplus x_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2} \oplus (x_3 \vee x_1) =$$

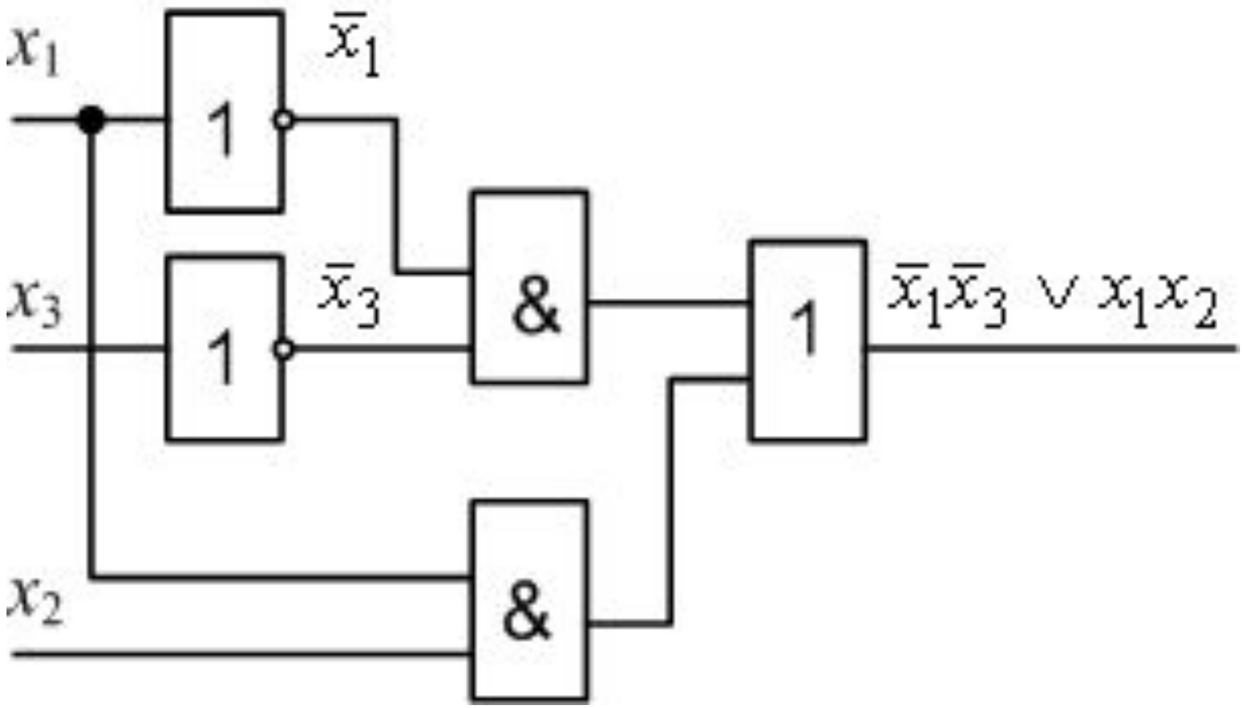
$$= \overline{x_1 x_2}\,\overline{(x_3 \vee x_1)} \vee \overline{\overline{x_1 x_2}}(x_3 \vee x_1) =$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 (x_3 \vee x_1) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \overbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3}^{1} \vee x_1 x_2$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2.$$

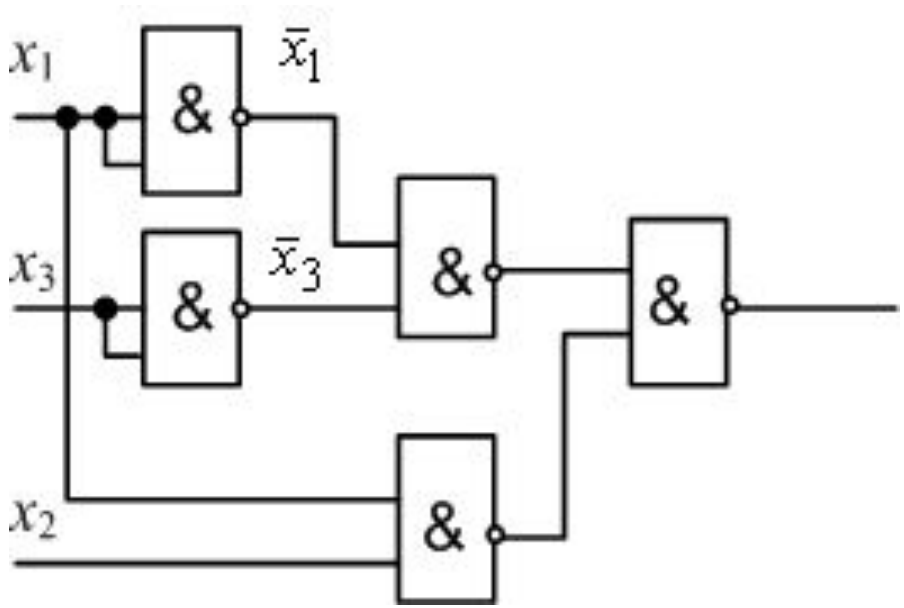
Логическая схема, реализующая эту функцию в базисе И-ИЛИ-НЕ.



Преобразуем $f(x_1, x_2, x_3)$ к базису И-НЕ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2}} = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3} \cdot \overline{x_1x_2}}.$$

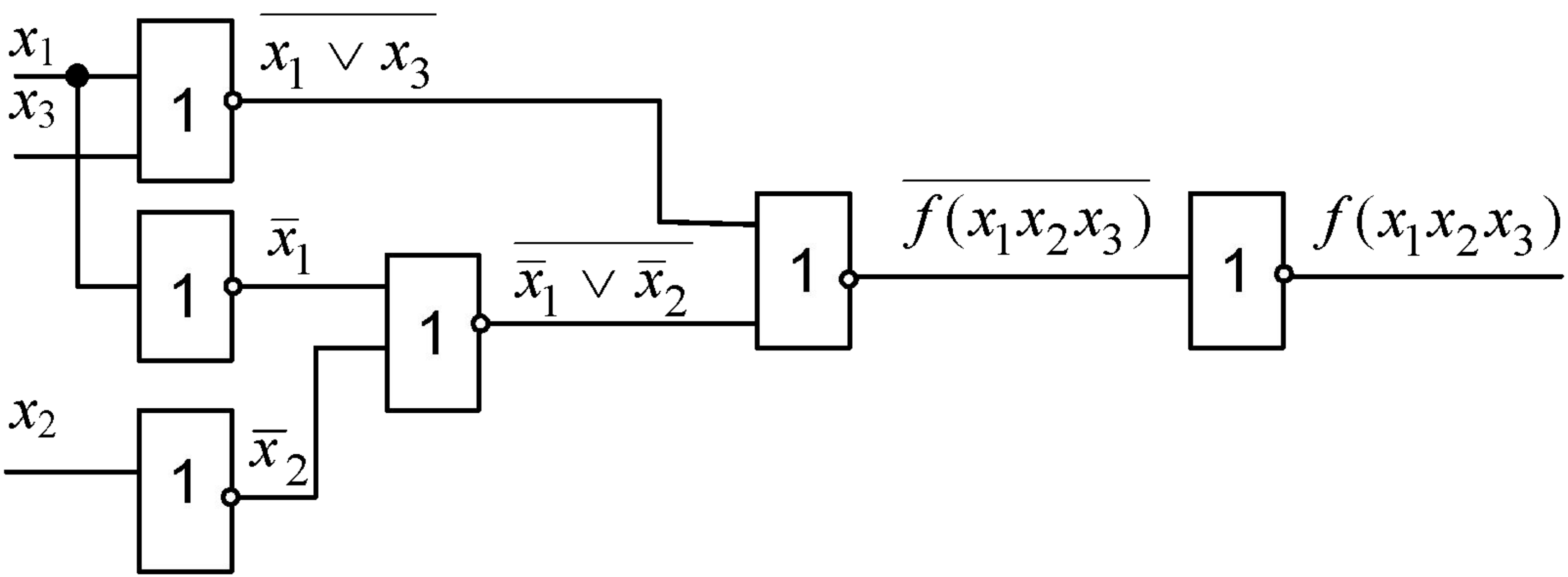
Реализация функции в базисе И-НЕ



Преобразуем $f(x_1, x_2, x_3)$ к базису ИЛИ-НЕ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}} \vee \overline{\overline{x_1x_2}} =$$

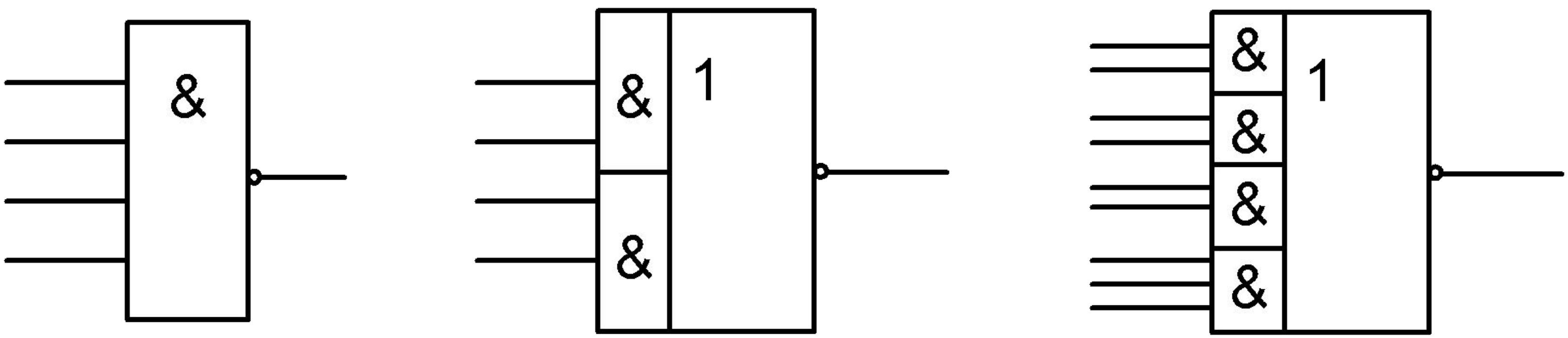
$$= \overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{\overline{\overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}}}.$$



**Пример .** Построить комбинационную схему для функции, заданной таблично в базисах И-НЕ и ИЛИ-НЕ

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

В серийно выпускаемых интегральных микросхемах в одном корпусе могут быть объединены несколько логических схем, например, элемент 4И-НЕ, элемент 2И-ИЛИ-НЕ, элемент 2-2-2-3И-4ИЛИ-НЕ.




а б в

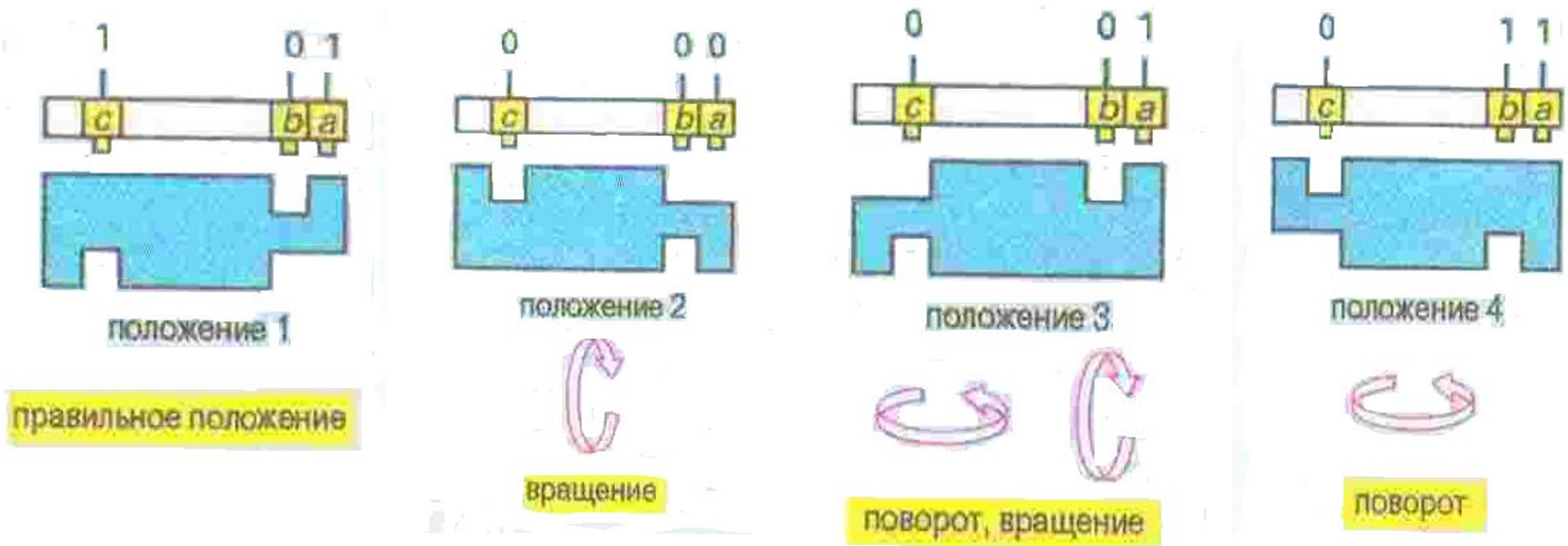
**Пример. Требуется разработать схему вращательно-поворотного механизма .**

Питатель для отштампованных из металлического листа деталей снабжен поворотным механизмом, включаемым по сигналу $w$=1, и механизмом вращения, включаемым по сигналу $d$=1. Возможно и одновременное включение обоих устройств.

Из магазина питателя штампованные детали должны поступать на пресс всегда в положении 1.

Если заготовки подаются в положениях 2, 3, или 4, они будут автоматически поворачиваться до достижения правильного положения 1.

Для этого штампованные детали опрашиваются тремя бесконтактными сигнальными датчиками *a*,*b*, *c*, которые подают сигнал со значениями 0, если они находятся точно напротив места врезания, в противном случае выводится сигнал со значениями 1.



Требуется разработать схему вращательно-поворотного механизма с выходными сигналами $w$ и $d$ и входными сигналами $a$,$b$, $c$.

Дополнительно надо составить схему, способную остановить устройство по сигналу $s$, когда сигнальными датчиками $a$,$b$, $c$ фиксируется заготовка, не относящуюся к указанным четырем положениям.

Составим таблицу функционирования устройства

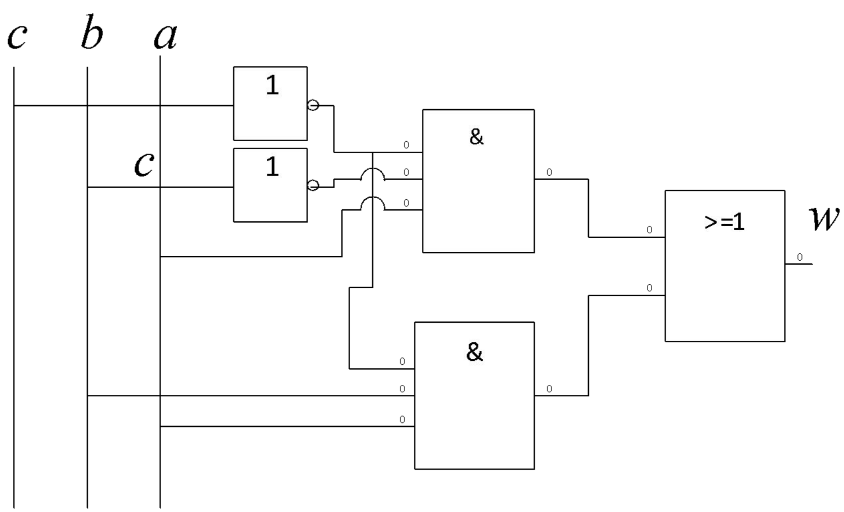
| ***c*** | ***b*** | ***a*** | ***w*** | ***d*** | ***s*** | ***Примечание*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | Положение 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | Положение 3 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | Останов |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | Положение4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | Останов |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | Положение1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | Останов |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | Останов |

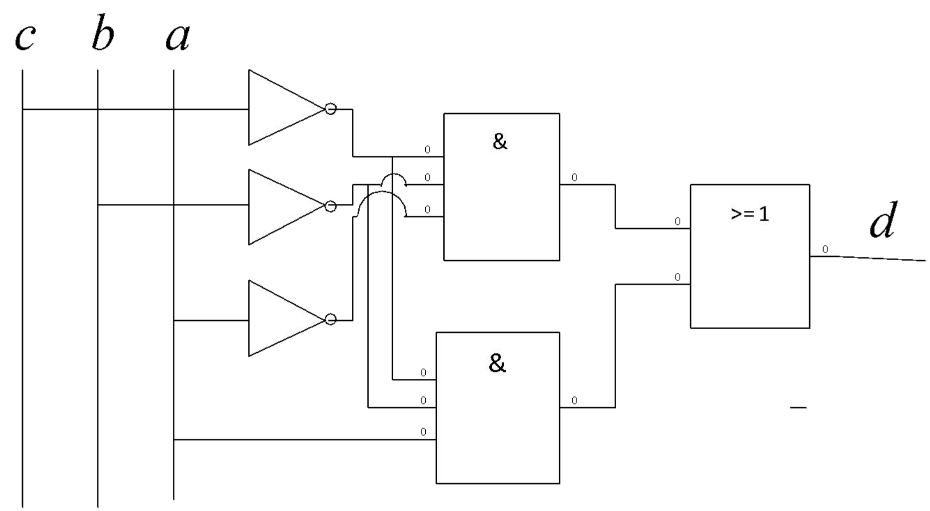
Запишем логические выходные функции для $w$ , $d$ , $s$ в виде СДНФ.

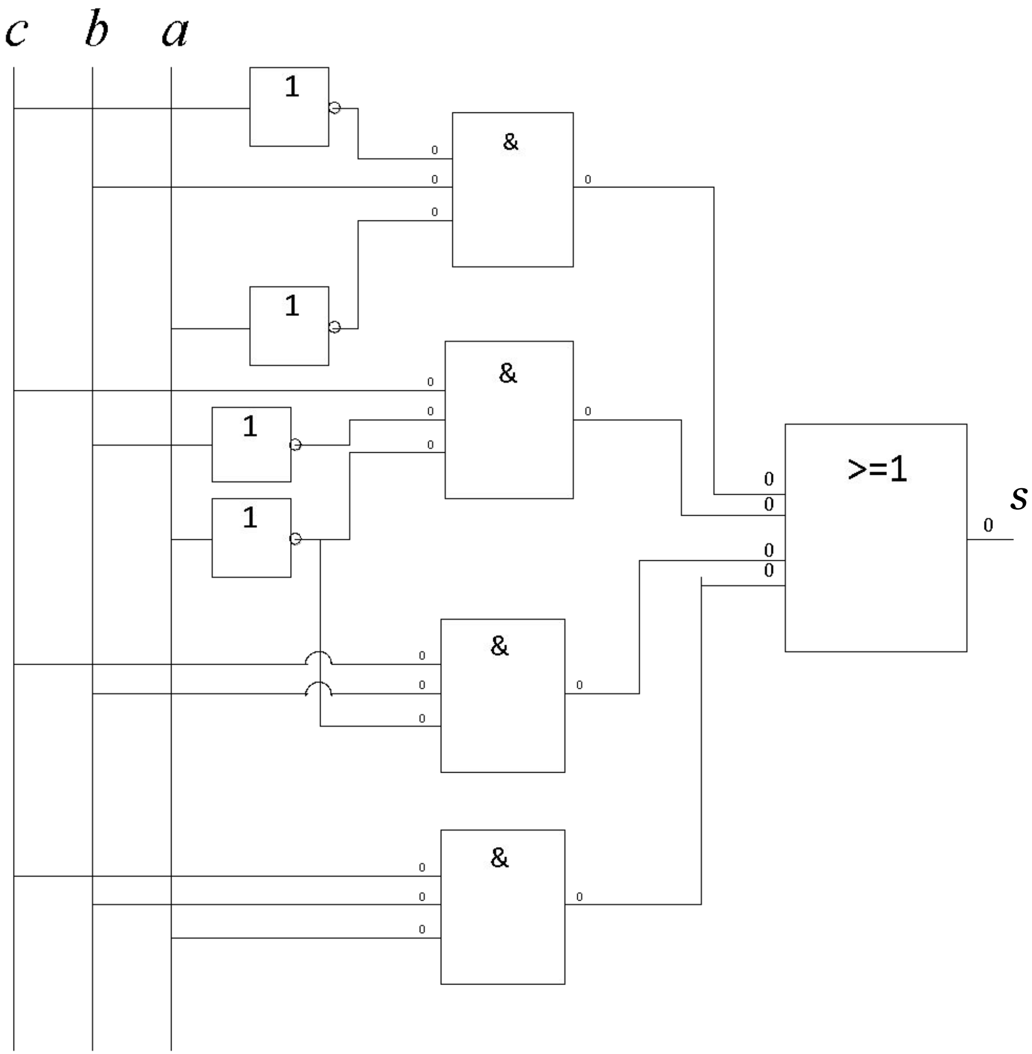
$$w(a,b,c) = \bar{c}\bar{b}a \vee \bar{c}ba$$

$$d(a,b,c) = \bar{c}\bar{b}\bar{a} \vee \bar{c}\bar{b}a$$

$$s(a,b,c) = \bar{c}b\bar{a} \vee c\bar{b}\bar{a} \vee cb\bar{a} \vee cba$$




c
b
a
1
1
1
1
&
&
&
&
>=1
s
0

Пример синтеза преобразователя кода Грея в арифметический двоичный код.

Такой преобразователь может понадобиться для согласования сигналов кодового датчика положения с микропроцессорной системой управления, ведущей обработку числовой информации в двоичном арифметическом коде.

Приведена таблица истинности.

Комбинации соответствуют сигналам, которые должны формироваться на выходе преобразователя кода при подаче на его вход сигналов кода Грея, формируемых датчиком положения.

| Позиция | Входные сигналы | | | | Выходные сигналы | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *X1* | *X2* | *X3* | *X4* | *Y1* | *Y2* | *Y3* | *Y4* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |