Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств

Решение логарифмических неравенств имеет много общего с решением показательных неравенств:

а) При переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, мы также сравниваем основание логарифма с единицей;

б) Если мы решаем логарифмическое неравенство с помощью замены переменных, то нужно решать относительно замены до получения простейшего неравенства.

Однако, есть одно очень важное отличие: поскольку логарифмическая функция имеет ограниченную область определения, при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, необходимо учитывать область допустимых значений.

Если при решении логарифмического уравнения можно найти корни уравнения, а потом сделать проверку, то при решении логарифмического неравенства этот номер не проходит: при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма необходимо записывать ОДЗ неравенства

Теория

Решение логарифмических неравенств основано на монотонности логарифмической функции. Поэтому решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к решению соответствующих неравенств для функций f (x) и g (x).

<u>Обрати внимание!</u>

Если основание a>1, то переходят к неравенству f (x) > g (x) (знак неравенства не меняется),т.к в этом случае логарифмическая функция возрастающая.

Если основание 0<a<1, то переходят к неравенству f (x) < g (x) (знак неравенства

Свойства логарифмов.

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$

2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

4. $\log_a x^n = n \log_a x$

5. $\log_a a = 1$

6. $\log_a 1 = 0$

7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к другому основанию

9. $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

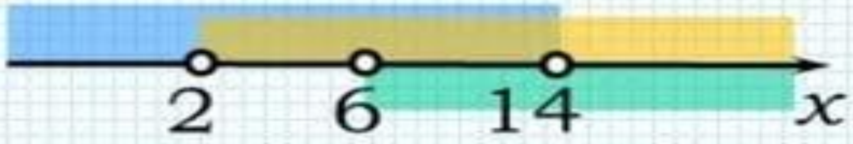
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$т.к.\ \ a = 3 > 1,\ то$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

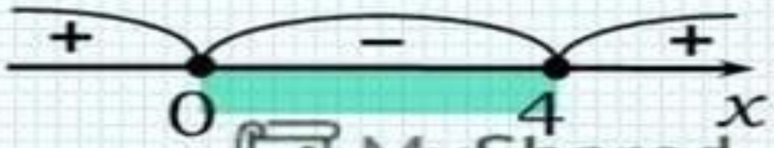
$т.к.\ \ a = \frac{1}{2} < 1,\ то$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \ -лишнее\ условие \end{cases}$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].