

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Предположения для модели А

А.1 Модель линейна по параметрам и правильно задана.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + u$$

А.2 Не существует точной (строго соответствующей) линейной зависимости между независимыми переменными регрессии в выборке(между регрессорами в выборке).

А.3 Математическое ожидание остаточного члена равно нулю.

А.4 Случайный член гомоскедастичен.

А.5 Значения случайного члена имеют независимые распределения.

А.6 Случайный член имеет нормальное распределение .

Переходя от простой к множественной регрессионной модели, мы начнем с повторения условий (допущений), относящихся к модели регрессии.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Допущения для модели А

А.1 Модель линейна по параметрам и правильно задана.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + u$$

А.2 Не существует точной (строго соответствующей) линейной зависимости между независимыми переменными регрессии в выборке (между регрессорами в выборке).

А.3 Математическое ожидание остаточного члена равно нулю.

А.4 Случайный член гомоскедастичен.

А.5 Значения случайного члена имеют независимые распределения.

А.6 Случайный член имеет нормальное распределение

Мы видим, что только пункт П.2 имеет отличие.

Ранее утверждалось, что в переменной X должно быть какое-то изменение.

Мы объясним разницу в одном из последующих слайдов

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Допущения для модели А

А.1 Модель линейна по параметрам и правильно задана.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + u$$

А.2 Не существует точной (строго соответствующей) линейной зависимости между независимыми переменными регрессии в выборке(между регрессорами в выборке).

А.3 Математическое ожидание остаточного члена равно нулю.

А.4 Случайный член гомоскедастичен.

А.5 Значения случайного члена имеют независимые распределения.

А.6 Случайный член имеет нормальное распределение .

При условии, что допущения модели регрессии действительны, методы оценки OLS в модели множественной регрессии являются беспристрастными и эффективными, как и в простой модели регрессии.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

Мы не будем пытаться доказать эффективность.

Однако, мы опишем доказательство несмещенности (отсутствия смещенности).

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

Первым шагом, как всегда, является замена Y из действительной взаимосвязи. Составляющие Y из $\hat{\beta}_2$ фактически находятся в виде Y_i минус его среднее значение, поэтому для этого удобно получить выражение.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i$$

После подстановки и упрощения мы можем сделать вывод о том, что $\hat{\beta}_2$ можно разложить на : истинное значение β_2 плюс взвешенная линейная комбинация значений случайного члена в примере, приведенном выше.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i$$

На слайде представлено то, что мы нашли в простой модели регрессии. Разница в том, что выражение для определения значимости, которое зависит от всех значений X_2 и X_3 в образце, значительно усложняется.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i \\ E(\hat{\beta}_2) &= \beta_2 + E\left(\sum a_{i2}^* u_i\right) = \beta_2 + \sum E(a_{i2}^* u_i) \end{aligned}$$

Достигнув этого момента, доказать несмещенность легко.

Принимая ожидания, β_2 не изменяется, будучи постоянным.

Ожидание суммы равно сумме ожиданий.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i \\ E(\hat{\beta}_2) &= \beta_2 + E\left(\sum a_{i2}^* u_i\right) = \beta_2 + \sum E(a_{i2}^* u_i) = \beta_2 + \sum a_{i2}^* E(u_i) = \beta_2 \end{aligned}$$

А * члены нестационарны, так как они зависят только от значений X_2 и X_3 . Следовательно, члены а * могут быть выведены из ожиданий как факторы.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i \\ E(\hat{\beta}_2) &= \beta_2 + E\left(\sum a_{i2}^* u_i\right) = \beta_2 + \sum E(a_{i2}^* u_i) = \beta_2 + \sum a_{i2}^* E(u_i) = \beta_2 \end{aligned}$$

По предположению А.3, $E(u_i) = 0$ для всех i . Следовательно, $E(\hat{\beta}_2)$ равно (β_2) и, следовательно, является несмещенной оценкой. Точно так же является несмещенной оценкой $\hat{\beta}_3$

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

Наконец, мы покажем, что это несмещенная оценка $\hat{\beta}_1$. Это довольно просто, поэтому вы должны попытаться сделать это самостоятельно, прежде чем смотреть на остальную часть этой последовательности.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

Сначала замените среднее значение выборки $\bar{Y}$.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + E(\bar{u}) - \bar{X}_2 E(\hat{\beta}_2) - \bar{X}_3 E(\hat{\beta}_3)$$

Теперь первый момент. Первые три условия являются нестационарными, поэтому они не зависят от ожиданий.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + E(\bar{u}) - \bar{X}_2 E(\hat{\beta}_2) - \bar{X}_3 E(\hat{\beta}_3)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 - \bar{X}_2 \beta_2 - \bar{X}_3 \beta_3$$

Ожидаемое значение среднего члена возмущения равно нулю, так как $E(u)$ равно нулю в каждом наблюдении. Мы только что показали, что $E(\hat{\beta}_2)$ равно β_2 и что $E(\hat{\beta}_3)$ равно β_3 .

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + E(\bar{u}) - \bar{X}_2 E(\hat{\beta}_2) - \bar{X}_3 E(\hat{\beta}_3)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 - \bar{X}_2 \beta_2 - \bar{X}_3 \beta_3$$

$$= \beta_1$$

Следовательно $\hat{\beta}_1$ - это несмещенная оценка β_1 .