



**Понятие логарифма.
Свойства логарифма.
Десятичные и
натуральные
логарифмы.**



Основные вопросы:

- 1. Понятие логарифма. Свойства логарифма.*
- 2. Формула перехода к другому основанию.*
- 3. Десятичные и натуральные логарифмы.*



Немного истории



Потому-то, словно пена
Опадают наши рифмы
И величие степенно
Отступает в логарифмы.

Борис Слуцкий

Первый изобретатель
логарифмов —
шотландский барон **Джон**
Непер (1550—1617)



Решите уравнение.

1) Решить уравнение $0,5^x = 32$,
Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание 0,5, чтобы получить 32.
значит, $x = -5$, найти показатель степени,

2) в который надо возвести основание a ,
чтобы получить число b .
Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание a , чтобы получить 27.

3) Показатель степени – это и есть логарифм

$4^x + 4^x = 320$, Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание 4, чтобы получить 64.
 $4^x(4+1) = 320$,
 $4^x = 64$,

$x = 3$.



Слово **ЛОГАРИФМ** происходит от греческих слов **λογος** - **число** и **αριθμος** - **отношение**

- Первые таблицы логарифмов назывались
 - *«Описание удивительной таблицы логарифмов»*
(1614 г.) и
 - *«Устройство удивительной таблицы логарифмов»*
(1619 г.)



Определение *логарифма*

Логарифмом числа $b > 0$ по основанию $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показатель степени*, в которую надо возвести число a , чтобы получить число b .

Логарифм числа b по основанию a обозначается

$$\log_a b$$



ПРИМЕРЫ

1) $\log_2 32$, здесь $b = 32$, $a = 2$, $c = 5$.
 $\log_2 32 = 5$, т. к. $2^5 = 32$.

2) $\log_5 0,04$,
здесь $b = 0,04$, $a = 5$, $c = -2$.
 $\log_5 0,04 = -2$, т. к. $5^{-2} = 1/25 = 0,04$.

3) Найти x , такое, что $\log_8 x = 1/3$.
По определению логарифма

$$x = 8^{1/3} = 2.$$



Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

Откуда получаем основное логарифмическое тождество

$$(b > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$$a^{\log_a b} = b$$



ПРИМЕРЫ

$$1) 0,5^{\log_{0,5} 6} = 6 .$$

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{5}^{2\log_5 3} &= ((\sqrt{5})^2)^{\log_5 3} \\ &= 5^{\log_5 3} = 3. \end{aligned}$$



Свойства логарифма

1. Логарифм единицы

$$\log_a 1 = 0$$

2. Логарифм основания

$$\log_a a = 1$$



Свойства логарифма

3. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$





Свойства логарифма

4. Логарифм частного равен логарифмов делимого без логарифма делителя:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$



Свойства логарифма

5.1. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$5.1) \log_a x^p = p \cdot \log_a x.$$



Свойства логарифма

5.2. При возведении **основания в некоторую (не нулевую) степень логарифм делится на этот показатель степени:**

$$5.2) \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$



Свойства логарифма

6. Логарифм **корня равен отношению логарифма подкоренного выражения и показателя корня:**

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}$$



Свойства логарифма

7. Переход от одного основания к другому

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$





Следствия

$$1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$2) \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$$

$$3) \log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$$



Свойства логарифмов: ПРИМЕРЫ

- 1. Вычислить: $\log_6 12 + \log_6 3$

Решение:

$$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

Ответ: 2.

- 2. Вычислить: $\log_5 250 - \log_5 2$.

Решение:

$$\log_5 250 - \log_5 2 = \log_5 (250/2) = \log_5 125 = 3$$

Ответ: 3.

- 3. Вычислить: $27^{\log_3 2}$

Решение:

$$27^{\log_3 2} = 3^{3 \log_3 2} = 3^{\log_3 8} = 8$$

Ответ: 8.



Натуральный и десятичный логарифмы.

Десятичным называется логарифм,
основание которого равно 10.
Обозначается $\lg b$, т.е. **$\lg b = \log_{10} b$** .

Натуральным называется логарифм,
основание которого равно e .
Обозначается $\ln b$, т.е. **$\ln b = \log_e b$** .



Свойства натуральных логарифмов

Чтобы по известному десятичному логарифму числа x найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа x на десятичный логарифм числа e :

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0.43429} \approx 2.30259 \lg x$$

Чтобы по известному натуральному логарифму числа x найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм числа x на десятичный логарифм числа e :

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x \approx 0.43429 \ln x$$

Число $\lg e = 0.43429$ называется модулем десятичных логарифмов и обозначается через M .





Решение упражнений



$$1) \log_5 16 \cdot \log_2 25 =$$

Воспользуемся сначала свойством $\log_a b^n = n \log_a b$

$$= \log_5 2^4 \cdot \log_2 5^2 = 4 \log_5 2 \cdot 2 \log_2 5 =$$

Теперь перейдем к основанию 2 $\log_a b = \frac{1}{\log_c a}$

$$= 8 \cdot \frac{1}{\log_2 5} \cdot \log_2 5 = 8$$



2) Найдите значение выражения

$$3^{2 + \frac{\log_5 7}{\log_5 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_3 4}} = 3^{2 + \log_3 7} - 9 \cdot 4^{\log_4 3} =$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_c a}$$

$$= 3^2 \cdot 3^{\log_3 7} - 9 \cdot 4^{\log_4 3} =$$

$$= 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3 = 9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36$$



3) Найдите значение выражения $\log_a(a^5 b^2)$, если $\log_b a = \frac{2}{7}$

Решение:

$$\begin{aligned}\log_a(a^5 b^2) &= \log_a a^5 + \log_a b^2 = \\ &= 5 + 2 \cdot \frac{1}{\log_b a} = 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 12\end{aligned}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Ответ: 12