

9. Аксиоматические системы и их свойства

9.1. Отношения между объектами

Определение. В математике отношение выражает связь между элементами $x, y, \dots$, некоторых множеств $A, B, \dots$

Пример. Отношения: равенства, больше/меньше, конгруэнтности.

Определение. Отношения между двумя элементами $x \in A$ и $y \in B$ называют двухместными или бинарными отношениями. Все такие отношения будем обозначать $\mathfrak{D}(x, y)$, при $x \in A, y \in B$.

Пример. Отношение равенства $1+2=2+1$ бинарное. Отношение «больше» тоже бинарное

Аналогично двухместному, определяются n -местные отношения – отношения между элементами $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$ некоторых множеств $A_1, \dots, A_n$.

Пример. Отношение «точка A на прямой лежит между точками B и C » - *трехместное* $P(A, B, C)$.

Определение. Отношение $\sim(x, y)$ между элементами множества M называется отношением эквивалентности, обозначим его $(x \sim y)$, если выполняются три условия:

1. Рефлексивности: $x \sim x$;
2. Симметричности: если $x \sim y$, то $y \sim x$;

Пример. Отношения эквивалентности:

1) числовые равенства

Рефлексивность $x = x$

Симметричность $x=y \Rightarrow y=x$

Транзитивность $x=y$ и $y=z \Rightarrow x=z$

ДА

2) числовые неравенства

Рефлексивность $x \neq x$

Симметричность $x \neq y \Rightarrow y \neq x$

Транзитивность $x \neq y$ и $y \neq z \Rightarrow x \neq z$

НЕТ

Пример. Отношения эквивалентности:

3) отношение «>»

Рефлексивность $x > x$

Симметричность $x > y \Rightarrow y > x$

Транзитивность $x > y$ и $y > z \Rightarrow x > z$

НЕТ

4) конгруэнтность фигур. Пусть заданы фигуры А, В, С.

Рефлексивность $A \approx A$

Симметричность $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

Транзитивность $A \approx B$ и $B \approx C \Rightarrow A \approx C$

ДА

Пример. Отношения эквивалентности:

5) подобие фигур. Пусть заданы фигуры A, B, C .

Рефлексивность $A \sim A$

Симметричность $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

Транзитивность $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

ДА

6) параллельность прямых. Пусть заданы прямые a, b, c

Рефлексивность $a \parallel a$

Симметричность $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$

Транзитивность $a \parallel b$ и $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

ДА

Утверждение. Любое отношение эквивалентности $\mathcal{E}(x,y)$, заданное на множестве M , определяет множество классов эквивалентности: два элемента $x, y \in M$ попадают в один класс тогда и только тогда, когда $x \sim y$ (эти классы непересекающиеся).

Пример 1. Рассмотрим множество выражений:

$\{1+5, 2+1, 2+3, 2+4, 1+2, 1+4, 3+3, 1+1+1, 4+2, 1+3\}$.

Сколько всего классов эквивалентности по отношению «числовое равенство» ?

такие классы эквивалентности:

$[\{1+5, 2+4, 3+3, 4+2\}, \{2+1, 1+2, 1+1+1\},$

$\{2+3, 1+4\}, \{1+3\}]$

Таким образом, задание отношения эквивалентности на некотором множестве равносильно разбиению этого множества на непересекающиеся подмножества.

Пример 2. После выставления оценок за КН студенты разбиваются на 3 класса экв-ти: получившие 0,1,2 баллов.

9.2. Аксиоматические теории и математические структуры

Все примеры математических «языков» - числовые системы, евклидова геометрия, векторы, геометрия Лобачевского - построены по общему правилу.

Рассмотрим это общее правило – формирование математической структуры на основе аксиоматического подхода

Определение. Любая система аксиом - это система утверждений $T = \{T_1, T_2, \dots\}$, задающих систему отношений $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ между элементами некоторых базовых множеств $M_1, \dots, M_m$.

Пример. 20 аксиом Гильберта описывают отношения между точками, прямыми, плоскостями, отрезками, углами и числами. Здесь:

Утверждения: (это сами аксиомы) $T = \{T_1, T_2, \dots, T_{20}\}$.

Отношения: $\mathfrak{D}_1$ инцидентности,

$\mathfrak{D}_2$ порядка,

$\mathfrak{D}_3$ конгруэнтности,

$\mathfrak{D}_4$ отношения, определяющие свойства непрерывности,

$\mathfrak{D}_5$ отношение параллельности.

Множества: M_1 - множество точек, M_2 - множество прямых, M_3 - множество плоскостей, M_4 - множество отрезков, M_5 - множество углов, M_6 - множество натуральных чисел.

Определение. Математической структурой называется система отношений $\mathfrak{D}$, заданная на базовых множествах $M_1, \dots, M_m$ посредством системы аксиом T .

*Система аксиом – это набор утверждений.
Когда мы выделяем базовые множества и отношения – получаем структуру.*

Математическую структуру будем обозначать $\Sigma_T = \{T, \mathfrak{D}, M\}$. Для краткости иногда обозначается Σ_T .

Пример. Таким образом, все рассмотренные нами аксиоматики задают структуры (мы пока называли их системами):

Структура натуральных чисел – (аксиоматика Пеано для натуральных чисел),

Структура действительных чисел – (аксиоматика действительных чисел),

Структура векторных пространств – (аксиоматика векторных пространств),

Структура геометрического евклидова пространства – (аксиоматика Гильберта),

Структура арифметического евклидова пространства – (аксиоматика Вейля).

Определение. Система всех утверждений, доказываемых логическим путем в структуре Σ_T , называется аксиоматической теорией этой структуры, она обозначается T_Σ .

То есть, теория состоит из всех **возможных утверждений**, которые логически выводятся из заданных аксиом.

Примеры. 1) теорема о конгруэнтности треугольников по 3 углам является элементом теории структуры планиметрии Лобачевского.

2) теорема о подобии треугольников по 3 углам является элементом теории структуры евклидовой планиметрии

3) Утверждение о том, что 2 прямые могут иметь не более 1 общей точки является элементом и евклидовой планиметрии, и планиметрии Лобачевского.

9.3. Модель (реализация) системы аксиом.

В системе аксиом не всегда указываются конкретные объекты, к которым эти аксиомы применяются.

Например, в аксиоматике Пеано для натуральных чисел не указано, что такое числа, как они выглядят.

При этом, мы имеем как минимум две конкретные модели натурального ряда:

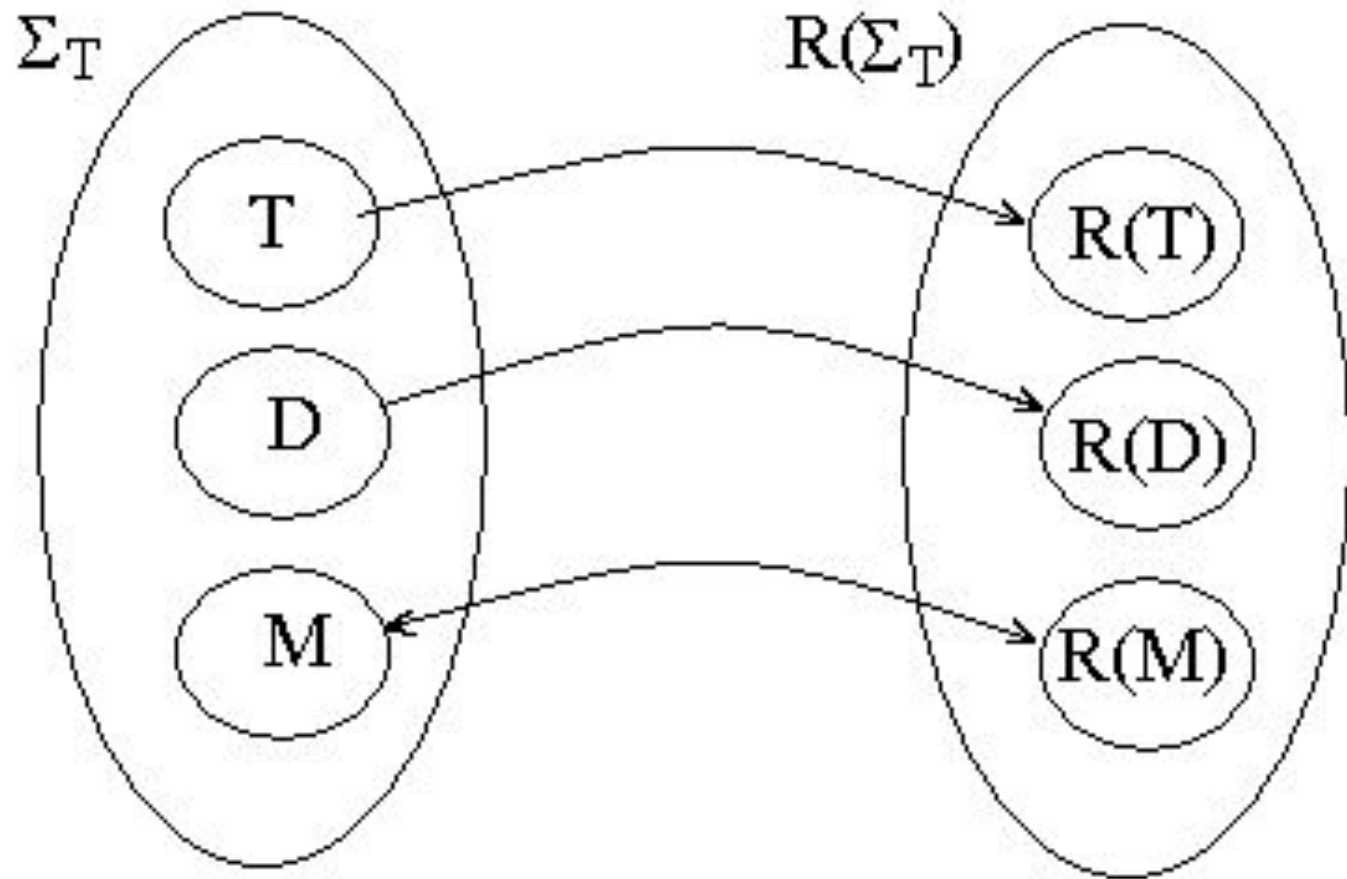
- десятичная модель: «1,2,3,4,...» и

Определение. Модель системы аксиом T (реализация системы аксиом) представляет собой такую совокупность некоторых объектов и отношений между ними, для которой выполняются все требования системы аксиом T .

То есть, реализация – это некоторый конкретный пример.

Пример. Для моделей «1,2,3,4,...» и «I,II,III,IV,V,...» выполняются все аксиомы Пеано, а вот ряд «1,2,3,3,3,4...» уже не является моделью натурального ряда.

Реализация $R(\Sigma_T)$ аксиоматической структуры Σ_T :



Примеры реализаций. 1) Пусть ε^1 – геометрическое евклидово пространство (прямая), и R^1 – арифметическая модель евклидовой прямой. То есть, $R(\varepsilon^1)=R^1$.

Тогда, например для утверждения «**точка А** **лежит левее точки В**», его реализация есть «**числовое неравенство $a < b$** », где a и b – десятичные представления точек A и B .



Пример. 2) Пусть ε^2 – геометрическое евклидово пространство (плоскость), и R^2 – арифметическая модель евклидовой плоскости. Т.е., $R(\varepsilon^2)=R^2$.

Тогда, например:

- базовое множество M_1 – это **все точки** R^2 , а его реализация $R(M_1)$ – **упорядоченные числовые пары** (x,y) .
- Базовое множество M_2 – множество **всех прямых** R^2 , а его реализация есть **множество уравнений вида** $ax+by+c = 0$.

Пример. 2) Пусть ε^2 – геометрическое евклидово пространство (плоскость), и R^2 – арифметическая модель евклидовой плоскости. Т.е., $R(\varepsilon^2)=R^2$.

Для отношения «**точка A принадлежит прямой l**», его реализация есть свойство: «**пара (x,y) удовлетворяет уравнению $ax+by+c = 0$** ».

- Для утверждения «**для любых двух прямых существует не более одной общей точки**», его реализация есть «**система уравнений... имеет не более одного решения**».

№	Структура	Реализация
1	Аксиоматика Пеано (структура натурального ряда)	Десятичная модель
2	Структура действительных чисел	Множество действительных чисел
		Евклидова прямая
3	Система аксиом трехмерного векторного пространства	1) Геометрическая модель векторного пространства.
		2) Арифметическая модель векторного пространства

№	Структура	Реализация
4	Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии	Арифметическая модель евклидова пространства R^3
5	Система аксиом Вейля евклидовой геометрии	
6	n-мерное арифметическое евклидово пространство R^n	Множество n-местных наборов чисел $(x_1, \dots, x_n)$
7	Планиметрия	Модель Пуанкаре.

9.4. Формальная и содержательная аксиоматики, теории и структуры.

Определение. Система аксиом T , ее аксиоматическая теория T_Σ и аксиоматическая структура Σ_T , определенные вне какой-либо реализации называются абстрактными. Если существует реализация $R(T)$ этой системы, то система T , теория T_Σ и структура Σ_T называются содержательными.

Примеры.

1) Содержательная теория: теория аксиоматики Гильберта (реализация ϵ^3).

Примеры.

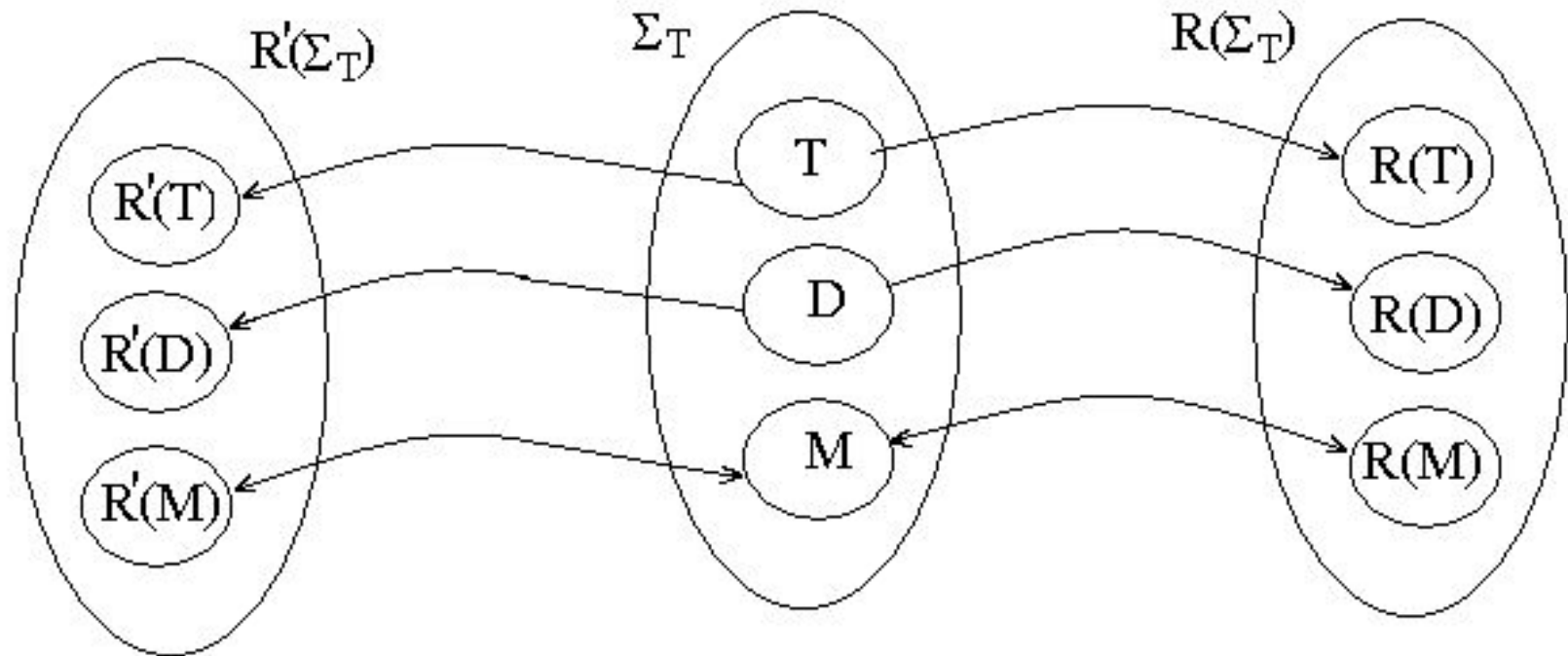
2) Классическим примером **абстрактной** теории является геометрия Лобачевского. Когда были найдены ее реализации, например, реализация Пуанкаре, геометрия Лобачевского стала **содержательной** теорией.

Как правило, сначала изучается некоторая модель, при этом выделяются аксиомы и формируется математическая структура.

Обратный случай, когда строится абстрактная аксиоматика, и затем для нее ищется модель, встречается реже.

9.5. Изоморфизм реализаций.

Пусть система аксиом T имеет две реализации: $R(T)$ и $R'(T)$.



будет ли взаимно-однозначным соответствие между реализациями отношений в R и реализациями отношений в R' ?

Определение. Две реализации $R(T)$ и $R'(T)$ системы аксиом T будем называть изоморфными, если выполняется два условия:

- 1) Существует взаимно-однозначное соответствие между реализациями $R_i(M_i)$ и $R'_i(M_i)$ всех базовых множеств M_i .
- 2) Это соответствие устанавливает взаимно-однозначное соответствие и между всеми отношениями P'_i и P_i .

Само отображение, при этом называется как изоморфизмом моделей или реализаций $R(T)$.

Пример 1. Рассмотрим абсолютную геометрию плоскости (14 аксиом аксиоматики Гильберта - геометрия **без аксиомы параллельности**).

Мы имеем две реализации этой планиметрии:

- 1) арифметическая модель R^2 евклидовой плоскости;
- 2) модель Пуанкаре L_2 (плоскости Лобачевского).

С одной стороны, **можно установить взаимно-однозначное соответствие** между точками M из R^2 и точками N из L_2 , а также между прямыми из R^2 и прямыми из L_2 .

В то же время не всем отношениям между точками и прямыми в L_2 можно найти соответствующие отношения в R^2 .

Например, отношение **{прямые a_1 и a_2 не параллельны и не пересекаются}** может выполняться в L_2 и не имеет аналога в R^2 .

Аналогично, не всем утверждениям в теории $T(L_2)$ можно найти соответствующие утверждения в $T(R^2)$.

Например, утверждение **{если три угла треугольни-ка конгруэнтны, то треугольники конгруэнтны}** выполняется в $T(L_2)$ и не имеет аналога в $T(R^2)$.

Пример 2. Пусть ε^2 - геометрическая модель векторного пространства (объекты: направленные отрезки). Пусть E^2 -арифметическая модель векторного пространства (объекты: пары чисел (x, y)).

Между этими моделями существует взаимно-однозначное отображение.

При этом это отображение сохраняет все определенные в векторной структуре отношения между соответствующими векторами.

Следовательно, это отображение – изоморфизм.

Другими словами, изоморфизм моделей - это такое взаимно-однозначное соответствие между элементами моделей, которое сохраняет отношения этих элементов, задаваемые системой аксиом.

В примере 1,
арифметическая модель R^2 евклидовой плоскости,
модель Пуанкаре L_2 (плоскости Лобачевского),
модели R^2 и L_2 не изоморфны.

В примере 2,
 ϵ^2 - геометрическая модель векторного
пространства, E^2 - арифметическая модель
векторного пространства.
модели ϵ^2 и E^2 изоморфны.

- Почему возникают две такие неравнозначные ситуации?
- Чем принципиально могут различаться системы аксиом?
- Какой должна быть СА, чтобы все реализующие ее модели были изоморфны?
- Какой должна быть СА, чтобы среди ее моделей можно было найти неизоморфные?