Закон сохранения механической энергии

Полная механическая энергия W системы материальных точек складывается из её кинетической энергии $W_к$ и потенциальной энергии $W_п$, т.е.

$$W = W_k + W_n .$$

При движении точек системы под действием внутренних и внешних сил, действующих на эти точки, изменяются как скорости точек, так и их взаимное расположение. Следовательно, изменяются и кинетическая, и потенциальная энергия системы.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Изменение кинетической энергии материальной точки за некоторый промежуток времени равно суммарной работе, совершённой всеми (по второму закону Ньютона) силами, действующими на точку, в течение этого промежутка времени.

Следовательно, для произвольной $i^{-й}$ точки системы,

$$\Delta W_{ki} = A_i ,$$

где A_i — работа, совершённая за некоторый промежуток времени всеми действующими на материальную точку силами, как внутренними, так и внешними;

$\Delta W_{кi}$ — изменение кинетической энергии $i^{-й}$ материальной точки за тот же промежуток времени.

Просуммируем для всех точек системы

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta W_{ki} = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Так как сумма изменений каких-либо величин равна изменению суммы этих величин, то левая часть этого равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta W_{ki} = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} W_{ki}\right) = \Delta W_k$$

представляет собой изменение кинетической энергии системы.

Правую же часть, которая равна суммарной работе всех сил, действующих на все точки системы, можно представить в виде суммы трёх работ:

1. $A_{конс}$ — работы всех внутренних консервативных сил;
2. $A_{дисс}$ — работы всех внутренних диссипативных сил;
3. $A_{внеш}$ — работы внешних сил.

Таким образом

$$\Delta W_к = \mathrm{A}_{\text{конс}} + A_{дисс} + A_{внеш}\,.$$

Суммарная работа всех внутренних консервативных сил $A_{конс}$ равна с обратным знаком изменению потенциальной энергии системы ΔW_n.

Следовательно,

$$\Delta W_к = -\Delta W_п + A_{дисс} + A_{внеш}.$$

Отсюда

$$\Delta W_к + \Delta W_п = \Delta\left(W_к + W_п\right) = A_{дисс} + A_{внеш}.$$

А так как $W = W_к + W_п$, то

$$\Delta W = A_{дисс} + A_{внеш}.$$

Это выражение представляет собой *закон изменения механической энергии.*

- Если система замкнута, т.е. сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то

$$\Delta W = A_{дисс}.$$

Следовательно, в системе будет переход механической энергии в другие виды энергии или наоборот, а потому механическая энергия сохраняться не будет.

- Если система не замкнута, но консервативна, то

$$\Delta W = A_{внеш},$$

т.е. внешние силы будут производить над системой работу.

- Если система замкнута и консервативна, то

$$\Delta W = 0 \quad и \quad W = W_k + W_n = const,$$

т.е. полная механическая энергия в замкнутой консервативной системе не изменяется с течением времени.

Это и есть закон сохранения механической энергии, представляющий собой частный случай закона сохранения энергии.

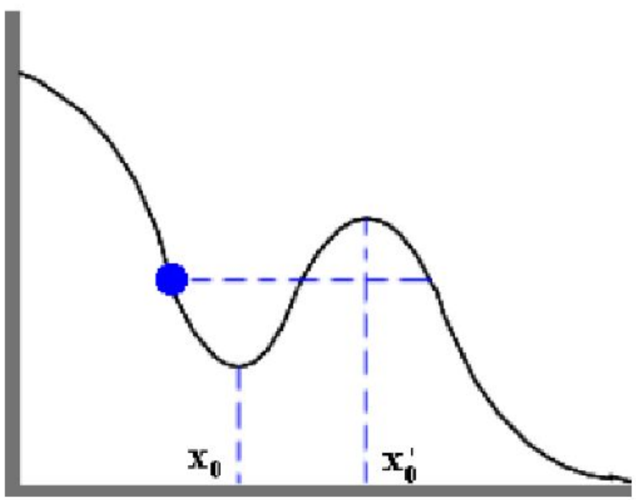
Условие равновесия механической системы

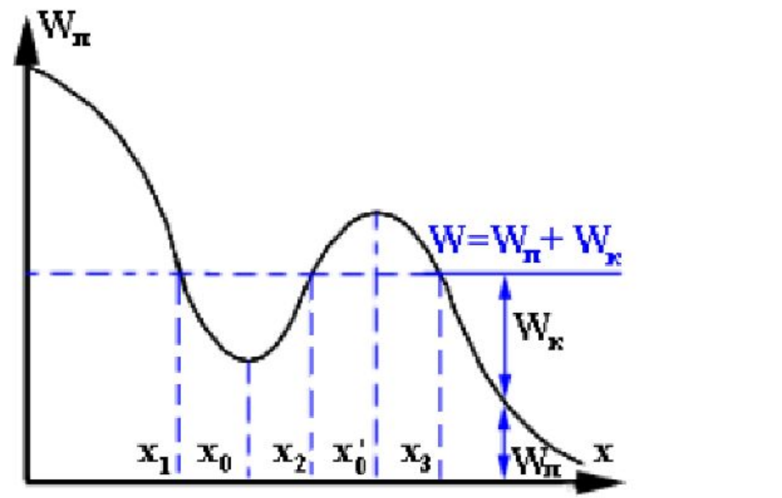
В замкнутой консервативной системе полная энергия остаётся постоянной, поэтому кинетическая энергия может возрастать только за счёт уменьшения потенциальной энергии.

Если система находится в таком состоянии, что скорости всех тел равны нулю, а потенциальная энергия имеет минимальное значение, то без воздействия извне тела системы не могут прийти в движение, т.е. система будет находиться в равновесии.

Таким образом, *для замкнутой консервативной системы равновесной может быть только такая конфигурация тел, которая соответствует минимуму потенциальной энергии системы.*

Рассмотрим случай, когда взаимное расположение тел системы может быть определено с помощью только одной величины, например, координаты x. Возьмём систему земля — шарик, скользящий без трения по укреплённой неподвижно изогнутой проволоке.





Система может совершать движение либо в пределах от x_1 до x_2, либо в пределах от x_3 до бесконечности. В область $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ система проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может стать больше полной энергии. Следовательно, $x_2 < x < x_3$ — потенциальный барьер, через который система не может проникнуть, имея данный запас полной энергии.

Минимуму W_n соответствует значение $x = x_0$ (для $x = x_0^{'}$ равновесие является неустойчивым).

Условие минимума W_n имеет вид

$$\frac{dW_{\text{п}}}{dx} = 0 \text{ или } F = 0.$$

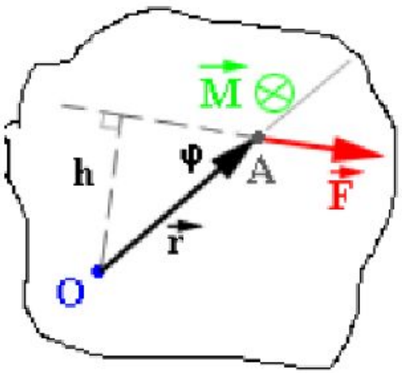
Таким образом, *конфигурация системы, соответствующая минимуму потенциальной энергии, обладает тем свойством, что силы, действующие на тела системы, равны нулю.*

Этот результат справедлив и в общем случае, когда W_n является функцией нескольких переменных.

Динамика твёрдого тела

Твёрдое тело наряду с поступательным движением может совершать вращение вокруг центра или оси. Вращательный эффект силы характеризуется её *моментом*. *Моментом силы* (рис. 37), *действующим на материальную точку А, относительно точки О называют величину, равную векторному произведению радиуса-вектора, проведённого в точку приложения силы на эту силу*

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$



Под $\vec{F}$ здесь, как и в других случаях, понимается равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку.

Вектор момента силы, определённый по правилу векторного произведения, направлен перпендикулярно плоскости чертежа «от нас».

Найдём его численное значение

$$M = r\sin\varphi = F \cdot h.$$

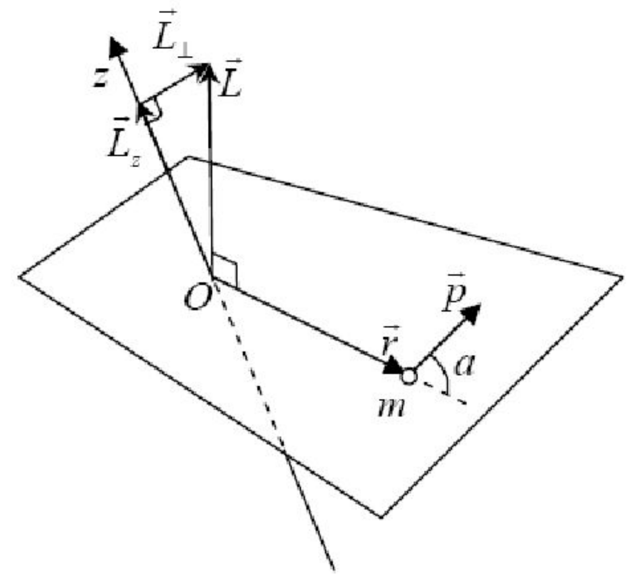
Величина h, являющаяся кратчайшим расстоянием между точкой, относительно которой определяется момент силы, и её линией действия, называется плечом силы.

Момент импульса

Введем понятия момента импульса

Момент импульса материальной точки относительно точки (О) равен векторному произведению радиус-вектора на вектор импульса материальной точки.

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]}.$$



$\vec{L}$ - момент импульса (количества движения).

$L = rp\sin a$

Представим вектор $\vec{L}$, как сумму векторов моментов импульсов относительно произвольной оси (z) и перпендикулярной ей составляющей: $\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp$ (см. рис.).

Момент импульса материальной точки $\vec{L}_z$ относительно оси вращения – это параллельная выбранной оси составляющая момента импульса $\vec{L}$ относительно точки О, лежащей на оси, и определяемая соотношением:

$\vec{L}_z = [\vec{r} \cdot \vec{p}]_z$.

Вектор $\vec{L}_z$ направлен вдоль оси z.

Найдем связь между $\vec{M}$ и $\vec{L}$ для материальной точки.

Возьмем производную от момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r}\vec{p}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon}] + [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M} .$$

$[\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon}] = 0$, так как синус угла между векторами =0.

Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту сил и определяется уравнением моментов:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ относительно точки,

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

Закон сохранения момента импульса.

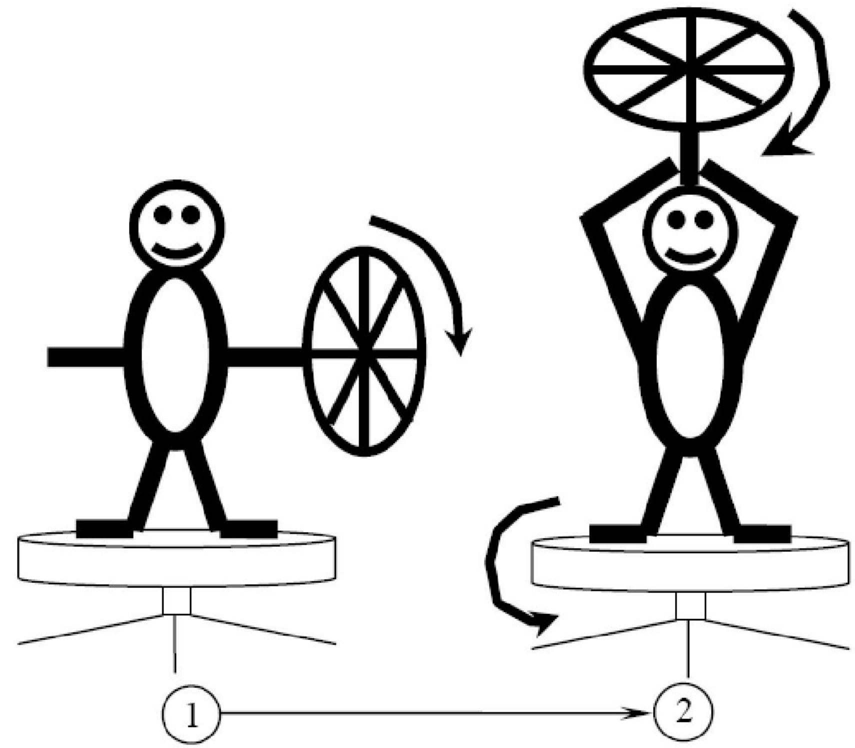
Если для системы материальных точек:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0, \text{ то } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Следовательно, $\vec{L} = const$.

***Закон сохранения момента импульса:** суммарный момент импульса системы материальных точек относительно точки (оси) есть величина постоянная, если векторная сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю.*

Рассмотрим опыт со скамьей Жуковского. Человек стоит на скамье и держит вращающееся колесо горизонтально. Следовательно, суммарный момент импульса относительно вертикали равен нулю. Подняв вращающееся колесо над головой, момент импульса колеса относительно вертикали перестает быть равным нулю. Исходя из закона сохранения, суммарный момент импульса системы относительно вертикали, должен оставаться равным нулю. Значит, должен появиться противоположный по направлению момент импульса скамьи. В результате чего мы наблюдаем вращающуюся в противоположную сторону скамью с человеком.



Момент инерции

- При вращении тела используется понятие **момента инерции**
- *Момент инерции относительно оси вращение* – это сумма произведений масс точек тела на квадрат расстояния от этих точек до оси вращения

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Момент инерции

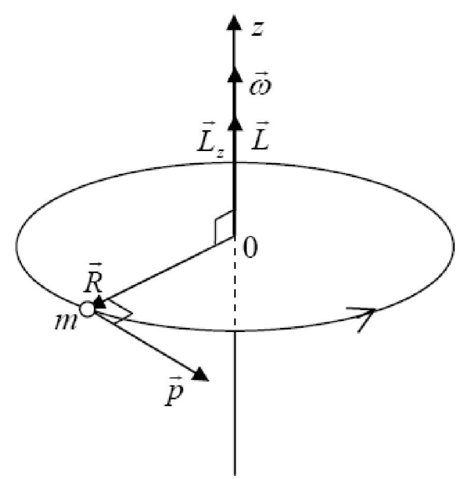
Момент инерции материальной точки относительно оси – это величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения.

$$\boxed{I_z = mR^2}.$$

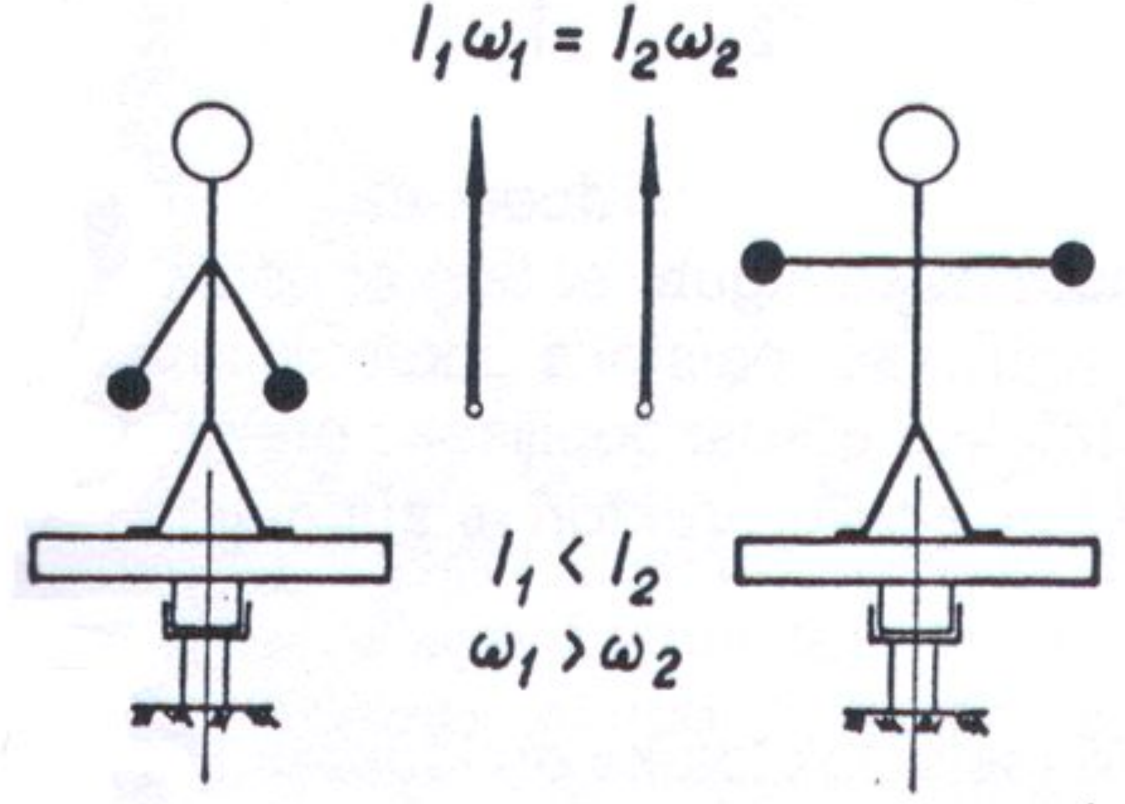
$$\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}] = \vec{L}_z \,,$$

$$L_z = \left|\vec{L}_z\right| = Rp\sin\frac{\pi}{2} = Rm\upsilon = Rm\omega R = mR^2\omega \,.$$

$$L = I\omega$$



Закон сохранения момента импульса



Если момент импульса постоянен относительно оси, то при *уменьшении момента инерции, угловая скорость будет возрастать* ($\vec{L}_z = const \ \ I_z \downarrow \Leftrightarrow \omega \uparrow$ *и* $I_z \uparrow \Leftrightarrow \omega \downarrow$).

Это применяют фигуристы, балерины в своих выступлениях, вытягивая руки в стороны и прижимая их к себе, чтобы изменить скорость вращения.

Основное уравнение динамики вращательного движения.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси. Момент импульса тела относительно оси:

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}.$$

Действие внешних сил на тело приведет к изменению угловой скорости вращения и изменению момента импульса. Возьмем производную по времени от обеих частей уравнения:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Учитывая, что

$\dfrac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$, а $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, получим:

$\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}_z}{I_z}}$ **– основное уравнение динамики вращательного движения.**

Во втором законе Ньютона масса материальной точки является мерой инертности в динамике ее движения. В динамике вращательного движения такой мерой инертности является момент инерции тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кинетическая энергия точки

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω, то линейная скорость его i-й точки $v_i = \omega r_i$.

Тогда

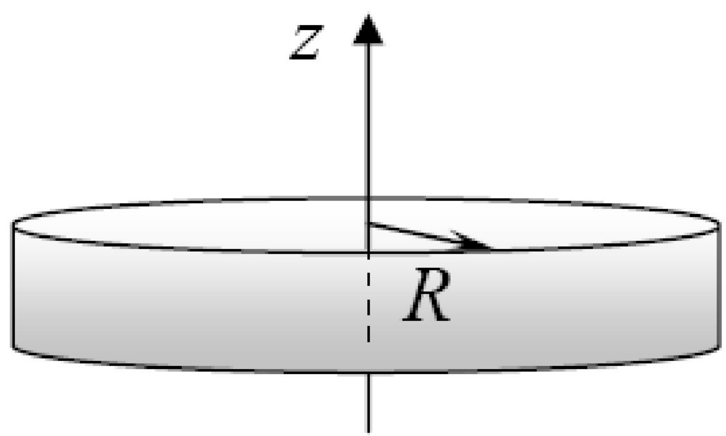
$$W_{\hat{e}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения.

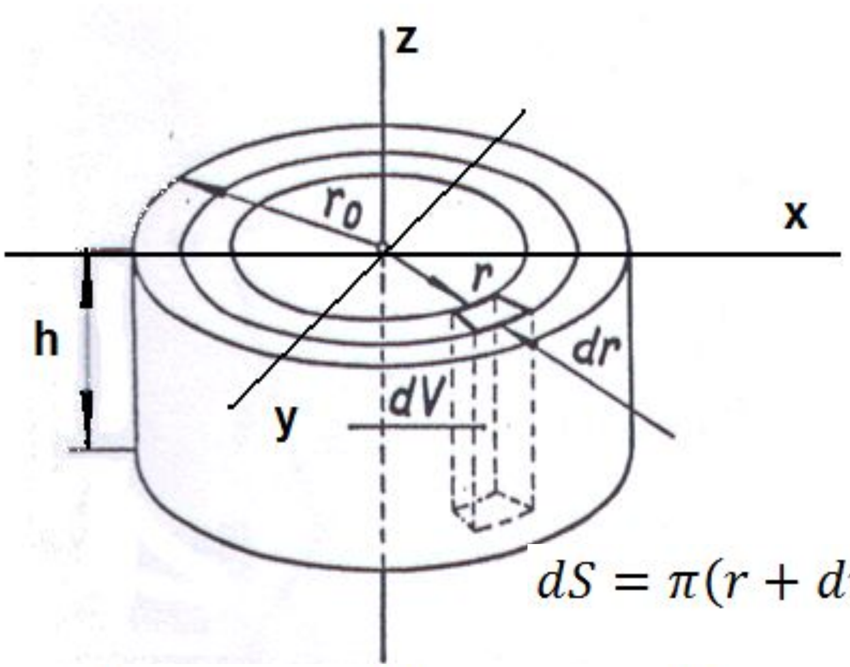
Эта формула ещё раз подтверждает, что при вращательном движении мерой инертности тела является его момент инерции.

момент инерции бесконечно тонкого круглого кольца относительно оси z

$I_z = \int\limits_0^m R^2 dm = R^2 \int\limits_0^m dm = mR^2$, где R — радиус кольца, m — его масса. Формула верна и для полого однородного тонкого цилиндра.



Момент инерции сплошного цилиндра



$$I_z = \frac{1}{2}\, mR^2$$

$$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r\,dr - \pi r^2 = 2\pi r\,dr$$

$$I = \int_0^{r_0} r^2\,dm = \int_0^{r_0} r^2 \underbrace{\rho\,dV}_{dm} = \int_0^{r_0} r^2 \rho \underbrace{h\,dS}_{dV} = \int_0^{r_0} r^2 \rho h \underbrace{2\pi r\,dr}_{dS} = 2\pi\rho h \int_0^{r_0} r^3\,dr =$$

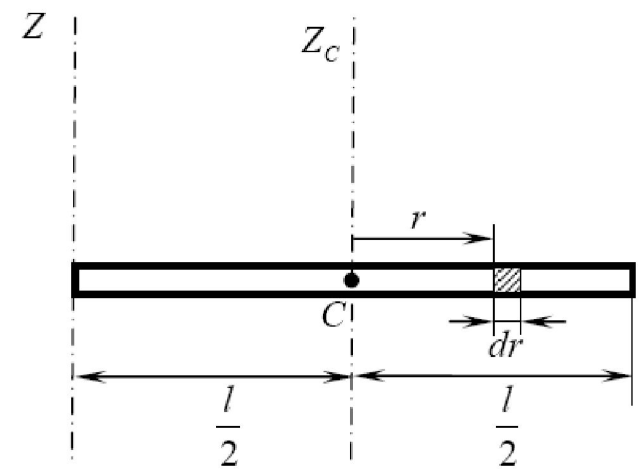
$$= 2\pi\rho h \frac{r_0^4}{4}\ \Big|_o^{r_0} = \frac{1}{2} r_0^2 \cdot \underbrace{\pi\rho h r_0^2}_{m} = \frac{1}{2} m r_0^2$$

Момент инерции однородного стержня.

Для вывода формулы для момента инерции стержня (I_C) длиной l и массой m относительно оси Z_C, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр, разобьем его на элементарные участки длиной dr (см. рис.) Масса такого участка $dm = \frac{m}{l}dr$, а его момент инерции $dI_C = r^2 dm = \frac{m}{l} r^2 dr$.

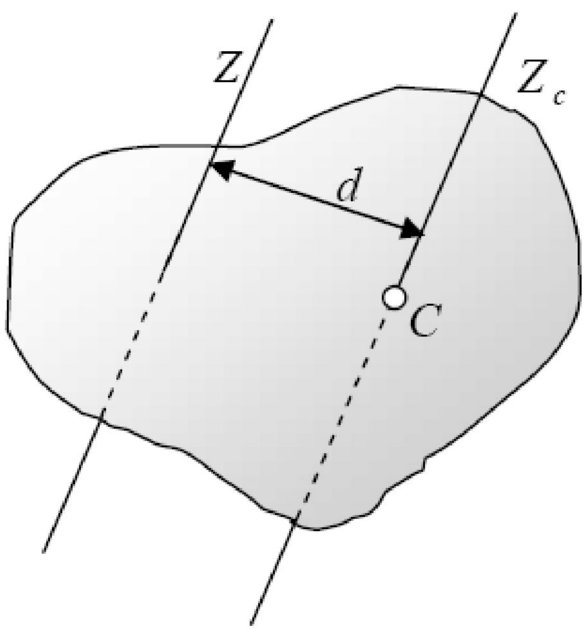
Момент инерции всего стержня: $I_C = 2\int\limits_0^{l/2} dI_C = 2\frac{m}{l}\int\limits_0^{l/2} r^2 dr = 2\frac{m}{l}\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}$.

Таким образом, момент инерции стержня относительно оси симметрии Z_C равен $I_C = \frac{1}{12}ml^2$.



Теорема Штейнера

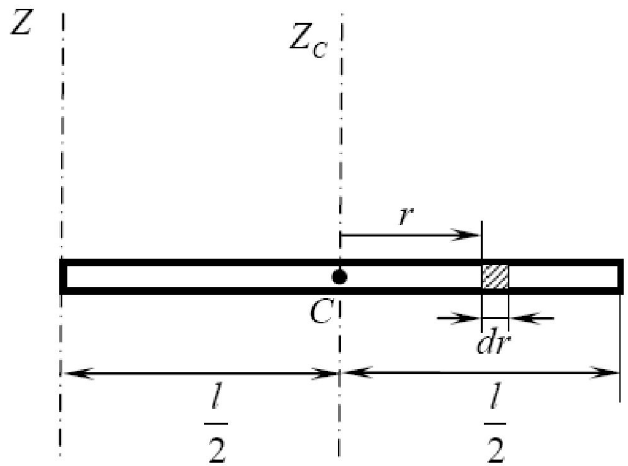
Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между ними.

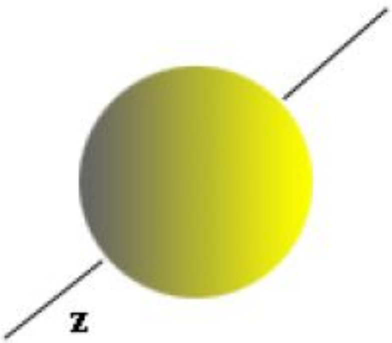


$$I = md^2 + I_c$$

Теперь получим формулу для момента инерции относительно оси Z, параллельной оси Z_C, но проходящей через конец стержня (см. рис.). Для этого применим теорему Штейнера:

$$I_Z = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

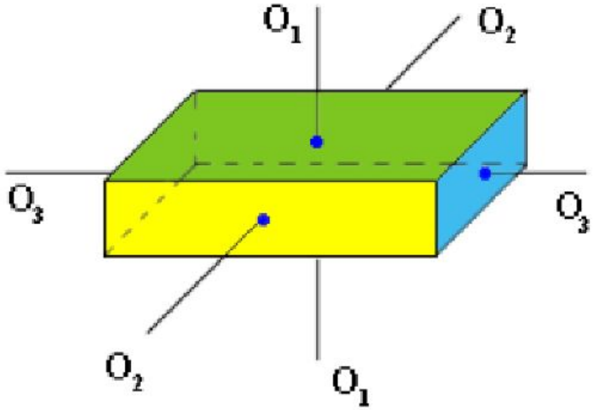




Момент инерции шара относительно одного из его диаметров равен $I_z = \frac{2}{5} mR^2$.

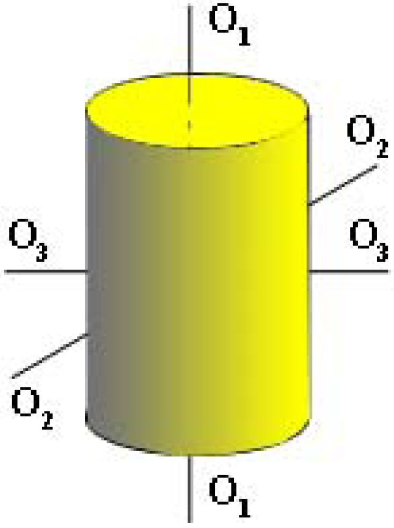
Главные оси инерции

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела оси, которые могут служить свободными осями. Они называются *главными осями инерции тела.*



У *однородного параллелепипеда* (рис. 49) главными осями инерции будут, очевидно, оси O_1O_1, O_2O_2, O_3O_3, проходящие через центры противоположных граней. Все три оси фиксированы.

- У тела, обладающего *осевой симметрией* (например, у однородного цилиндра), одной из главных осей инерции является ось симметрии, в качестве двух других осей могут служить две взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии и проходящие через центр инерции тела. Таким образом, у *тела с осевой симметрией* фиксирована только одна из главных осей инерции.



- У тела с *центральной симметрией*, т.е. у шара, плотность которого зависит только от расстояния до центра, главными осями инерции являются три любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр инерции тела. Следовательно, *ни одна из главных осей инерции не фиксирована.*
- *Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции тела.*
- В общем случае эти моменты различны

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 .$$

Такие тела называют *асимметричными волчками.*

Для тела *с осевой симметрией* два главных момента инерции имеют одинаковую величину, третий же, вообще говоря, отличен от них

$$I_1 = I_2 \neq I_3 .$$

Такие тела ведут себя как однородные тела вращения, Их называют *симметричными волчками.*

И, наконец, в случае тела *с центральной симметрией* все три главных момента инерции одинаковы

$$I_1 = I_2 = I_3 .$$

Равными значениями главных моментов инерции обладает не только однородный шар, ни и, скажем, однородный куб. В общем случае такое равенство может наблюдаться при надлежащем распределении массы для тела произвольной формы. Все подобные тела называют *шаровыми волчками.*

Если тело вращается в условиях, когда какое-либо *воздействие извне отсутствует,* то устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих *максимальному и минимальному* значениям момента инерции. Вращение вокруг оси, соответствующей промежуточному по величине моменту, *будет неустойчиво*.

При *наличии внешнего воздействия*, например, со стороны нити, за которую подвешено вращающееся тело, устойчивым оказывается только вращение вокруг главной оси, соответствующей *наибольшему значению момента инерции.*

Тонкое кольцо.

$$I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2} = \frac{MR^2}{2}.$$

Круглый диск

$$I_1 = I_2 = \frac{MR^2}{4}, \quad I_3 = \frac{MR^2}{2}$$

Работа и мощность при вращении

Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси. $d\vec{\varphi}$ – элементарное угловое перемещение. $\vec{M}_z$ – результирующий момент сил относительно оси.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{M}_z d\vec{\varphi} \; .$$

Пределы интегрирования (1) и (2) соответствуют состояниям абсолютно твердого тела в моменты времени t_1 и t_2, когда угол поворота изменяется от φ_1 до φ_2, а угловая скорость от ω_1 до ω_2.

Докажем, что этот интеграл равен работе сил при вращательном движении.

$$\vec{M}_z d\vec{\varphi} = M_z d\varphi = \frac{dL_z}{dt} d\varphi = d(I_z\omega)\frac{d\varphi}{dt} = I_z d\omega \cdot \omega \; .$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \omega d\omega = I_z \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega = I_z\left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2}\right) = \frac{I_z\omega_2^2}{2} - \frac{I_z\omega_1^2}{2} = W_{к2} - W_{к1} = \Delta W_к \; .$$

. изменение кинетической энергии равно работе $(\Delta W_k = A)$

Работа и мощность при вращении

$$\boxed{A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{M}_z d\vec{\varphi}}$$

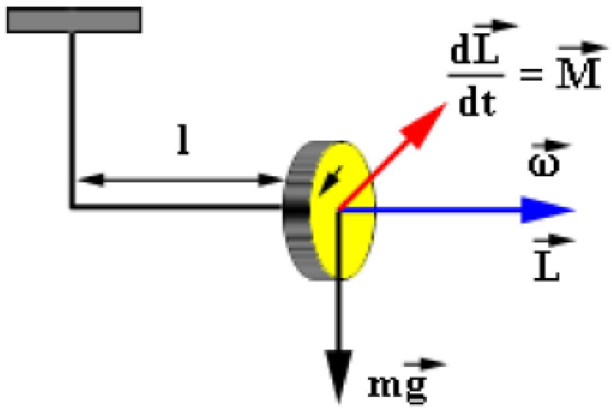
$$A_{\text{вращение}} = M\varphi = Fr\varphi$$

$$P = M\omega$$

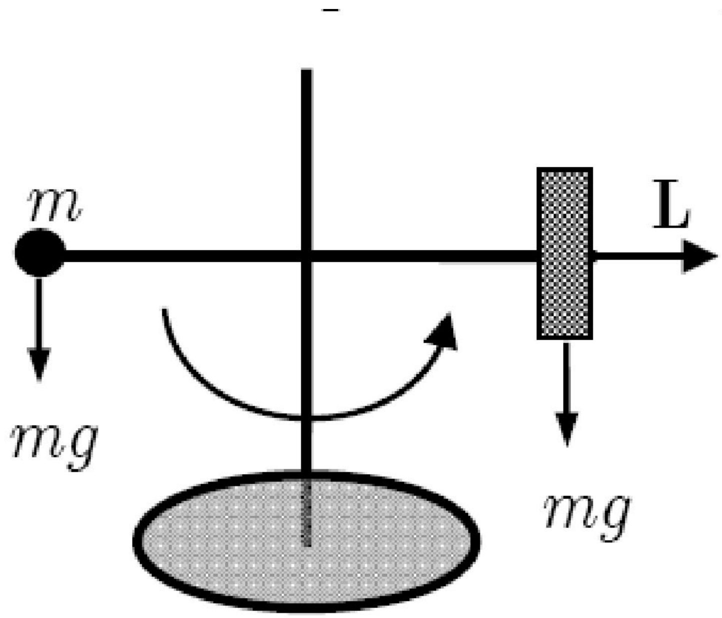
Гироскоп

Твёрдое осесимметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей геометрической оси, называется (техническим) гироскопом. При таком вращении вектор момента импульса $\vec{L}$ (как и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$) будет направлен вдоль оси тела.

До тех пор, пока на гироскоп не действуют никакие силы, его ось будет сохранять своё направление в пространстве: в силу закона сохранения момента импульса направление (как и величина) вектора $\vec{L}$ остаётся неизменной. Такой гироскоп носит название *свободного*.



- Если же приложить к гироскопу внешние силы, его ось начнёт отклоняться. Именно это движение гироскопа нас и будет интересовать: его называют *прецессией.*



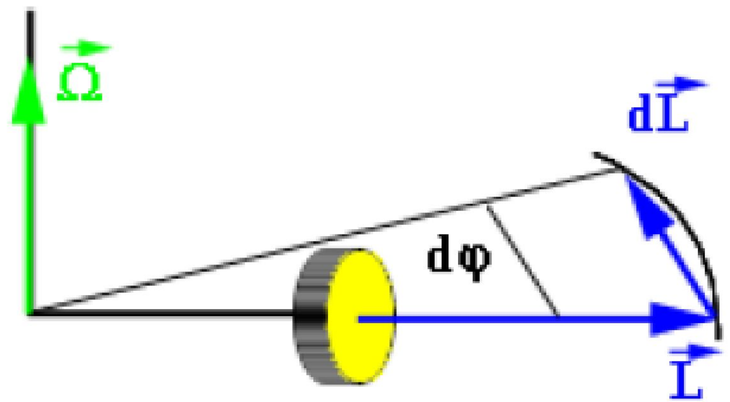
- Пусть гироскоп, имеющий массу *m*, раскручен до скорости $\vec{\omega}$ и отпущен. Под действием момента силы тяжести начнёт изменяться момент импульса гироскопа, и он придёт в движение в направлении $\vec{M}$
- Таким образом, приложение к гироскопу некоторой силы вызывает поворачивание его оси в направлении, перпендикулярном направлению силы. Это свойство гироскопа носит название *гироскопического эффекта.*

Скорость прецессии

Найдём скорость этого прецессионного движения.

Угол поворота $d\varphi = \dfrac{dL}{L} = \dfrac{Mdt}{L}$.

Скорость поворота $\Omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{M}{L} = \dfrac{mgl}{I\omega}$.



Напомним, что вращение гироскопа предполагается достаточно быстрым.

Мы можем уточнить это условие: должно быть $\omega >> \Omega$.

- Характерной особенностью прецессии является то, что она не имеет «инерции» — прецессионное движение прекращается в момент прекращения действия сил, это с очевидностью вытекает из уравнения моментов.
- $$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$
- Поэтому её поведение аналогично не скорости, а ускорению, потому что ускорение прекращается одновременно с прекращением действия силы.

- Из эксперимента следует, что, если замедлять прецессионное движение, то ось гироскопа начинает опускаться, а если ускорять, то она поднимается. В этом проявляется принцип Ле Шателье Брауна, согласно которому на внешнее воздействие система реагирует так, чтобы ослабить, ликвидировать это воздействие.

- Нутация— колебание, происходящее одновременно с прецессией движение твёрдого тела, при котором изменяется угол между осью собственного вращения тела и осью, вокруг которой происходит прецессия; этот угол θ называется *углом нутации.*
- Из-за наличия сопротивления (трения) нутационные колебания довольно быстро затухают, после чего гироскоп совершает чисто прецессионное движение.