



Логарифмические неравенства

Теория

Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

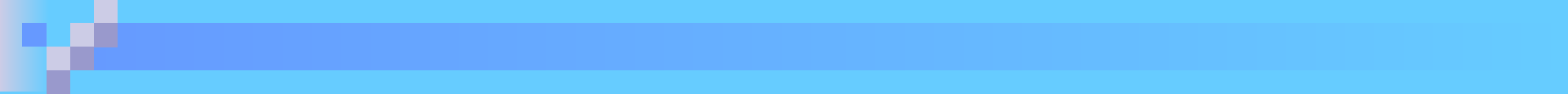
Решение

При решении логарифмических неравенств следует учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции и область ее определения. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе $f(x) > g(x) > 0$ при $a > 1$ и системе $0 < f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$.

- При изучении логарифмических функций рассматриваются неравенства вида:

$$\log_a x < b$$

$$\log_a x \geq b$$


$$\log_a x > \log_a y$$
$$x > 0; y > 0$$

- 1) если $a > 0$, то $x > y$
- 2) если $0 < a < 1$, то $x < y$

Пример №1

- Решить неравенство: $\log_3(x+2) < 3$
- $\log_3(x+2) < \log_3 3^3$
- $a=3; 3>0 \Rightarrow$ функция возрастает
- $x+2 < 27$
- $\begin{cases} x+2 < 27 \\ x+2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 25 \\ x > -2 \end{cases}$
- Ответ: $(-2; 25)$

Пример №2

Решить неравенство: $\log_{0,5}(2x+1) > -2$

$a=0,5$; $0 < 0,5 < 1 \Rightarrow$ функция убывает

$$\log_{0,5}(2x+1) > \log_{0,5} 4$$

$$2x+1 < 4$$

$$\begin{array}{|l} 2x+1 < 4 \\ 2x+1 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2x < 3 \\ 2x > -1 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x < 1,5 \\ x > -0,5 \end{array}$$

Ответ: $(-0,5; 1,5)$

Решите устно:

■ $\log_2 x > 1$ ОТВЕТЫ:

■ $(2; \infty)$

■ $\log_3 x > 2$

■ $(9; \infty)$

■ $\log_5 x \geq 0$

■ $[1; \infty)$

■ $\log_{0,5} x \geq 0$

■ $(-\infty; 1]$

■ $\log_2 x \leq 1$

ОТВЕТЫ:

■ **$(0; 2]$**

■ $\log_3 x < 2$

■ **$(0; 9)$**

■ $\log_2 x < 1/2$

■ **$(0; \sqrt{2})$**

■ $\log_3 x < 0$

■ **$(0; 1)$**

Решите неравенства:

■ $\log_3(x-2) > 1$

- $a > 1$ = >функция возрастает

- $x-2 > 3$

- $\begin{cases} x-2 > 3 \\ x-2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 5 \\ x > 2 \end{cases}$

- ответ: $(5; \infty)$

■ $\log_2(x-3) > 5$

- $a > 1$ = >функция возрастает

- $x-3 > 32$

- $\begin{cases} x-3 > 32 \\ x-3 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 35 \\ x > 3 \end{cases}$

- ответ: $(35; \infty)$

■ $\lg(x-3) \geq 2$

- $a > 1 \Rightarrow$ функция возрастает
- $x-3 \geq 100$
- $\left[\begin{array}{l} x-3 \geq 100 \\ x-3 > 0 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x \geq 103 \\ x > 3 \end{array} \right.$
- ответ: $[103; \infty)$

■ $\lg(x-1) \leq 0$

- $a > 1 \Rightarrow$ функция возрастает
- $x-1 \leq 1$
- $\left[\begin{array}{l} x-1 \leq 1 \\ x-1 > 0 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x > 1 \end{array} \right.$
- ответ: $(1; 2]$