

Параллельность прямых, прямой и плоскости

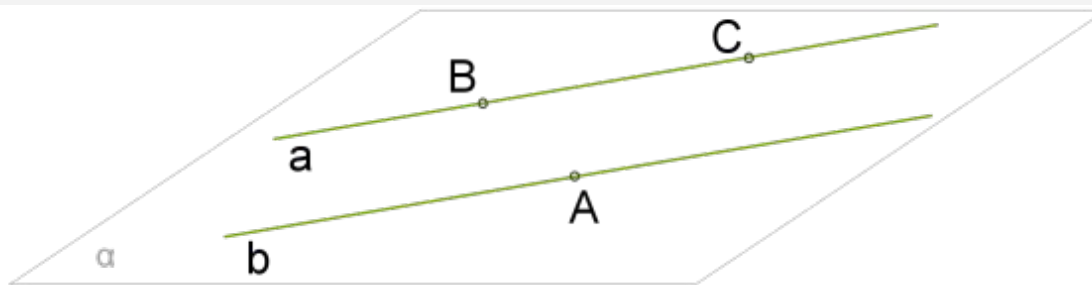
ТЕПЛОВ Н.В.

1. Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых **a** и **b** обозначается так: $a \parallel b$ или $b \parallel a$.

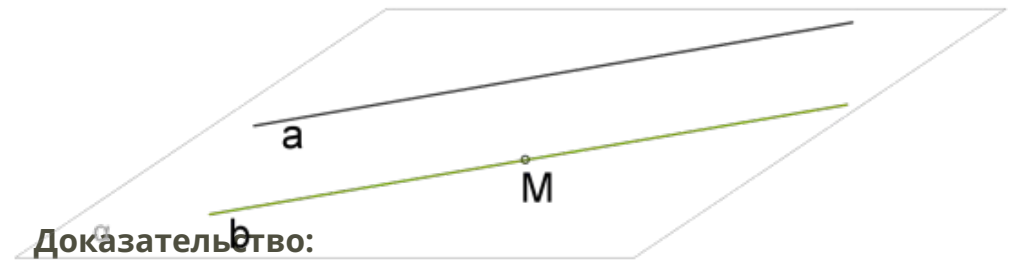
Теорема 1. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при том только одну.



Доказательство:

1. Так как прямые **a** и **b** параллельны, из определения следует, что через них можно провести плоскость **α**.
2. Чтобы доказать, что такая плоскость только одна, на прямой **a** обозначаем точки **B** и **C**, а на прямой **b** точку **A**.
3. Так как через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость (2 аксиома), то **α** является единственной плоскостью, которой принадлежат прямые **a** и **b**.

Теорема 2. Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при том только одну.



Доказательство:

1. Через данную прямую a и точку M , которая не лежит на прямой, проводится плоскость α .
2. Такая плоскость только одна (т.к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).
3. А в плоскости α через точку M можно провести только одну прямую b , которая параллельна прямой a .

Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

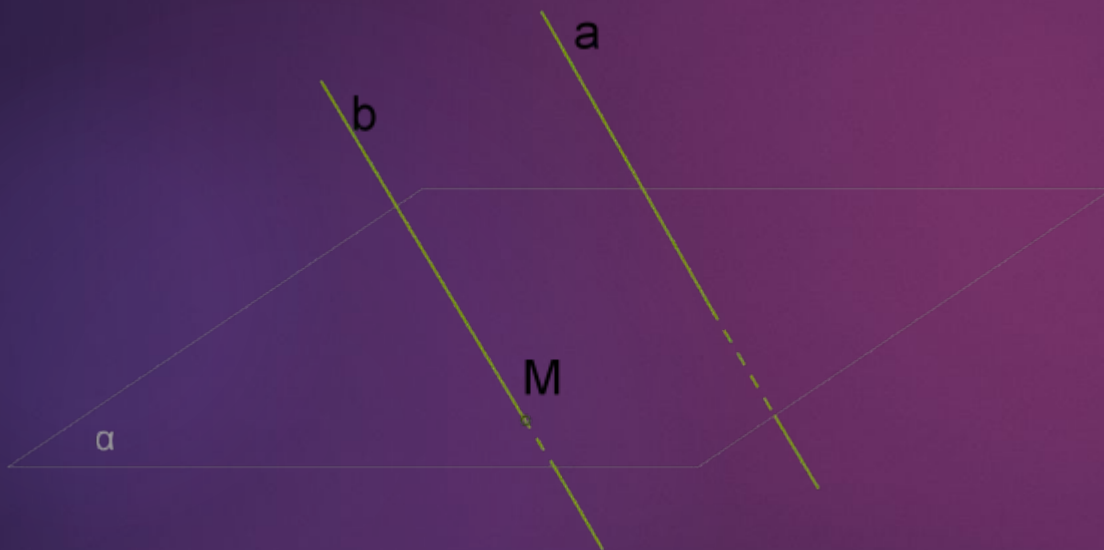


РИС. 1

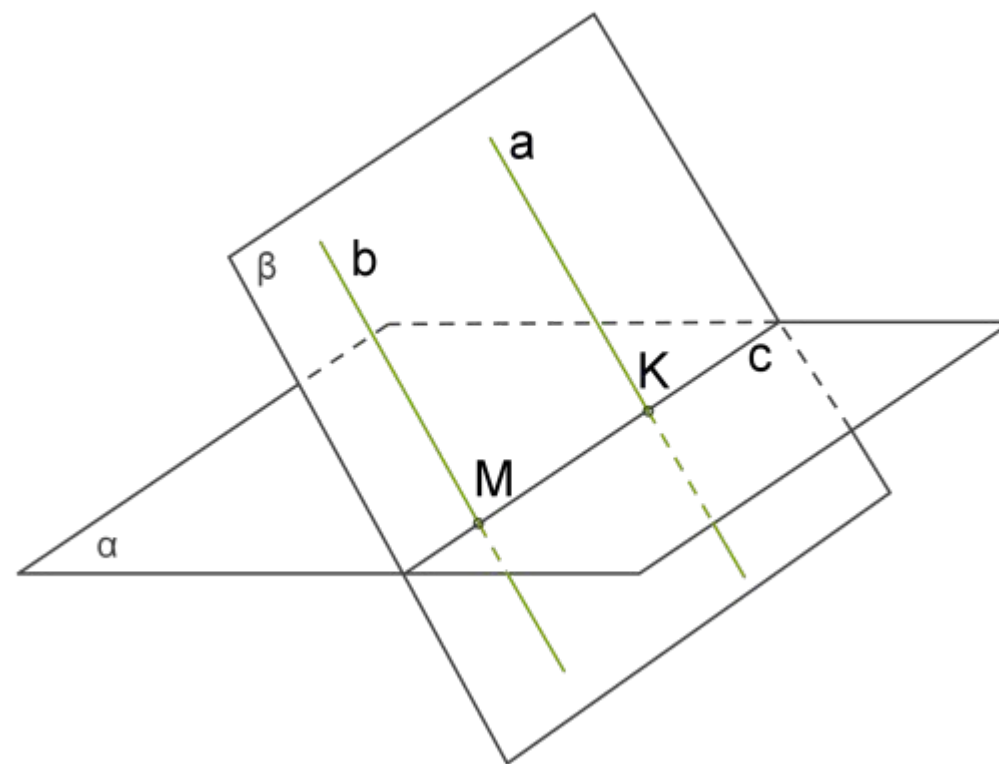


РИС. 2

Доказательство:

Рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке M (1. рис.).

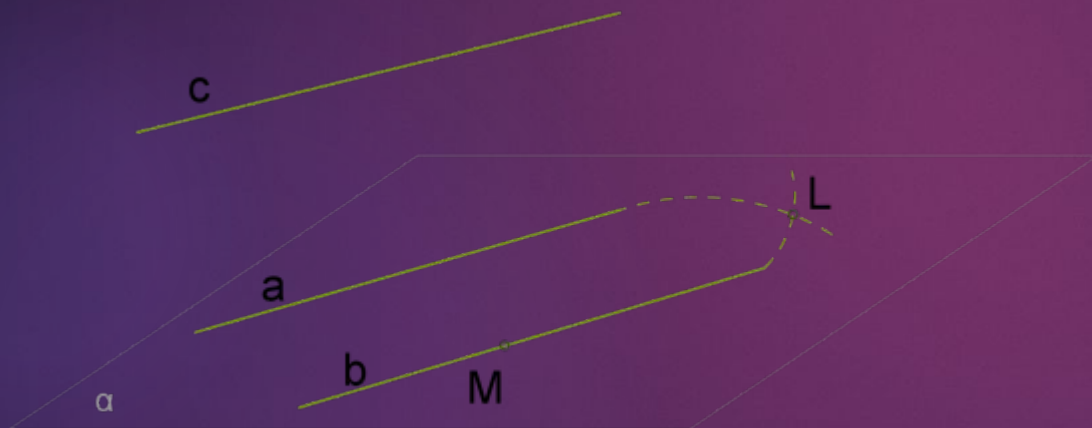
Из 1-ой теоремы известно, что через параллельные прямые a и b можно провести только одну плоскость β .

Так как точка M находится на прямой b , то M также принадлежит плоскости β (2. рис.). Если у плоскостей α и β есть общая точка M , то у этих плоскостей есть общая прямая c , которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).

Прямые a , b и c находятся в плоскости β . Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую c , то вторая прямая a тоже пересекает c .

Точку пересечения прямых a и c обозначим за K . Так как точка K находится на прямой c , то K находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α . Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке K .

Теорема 4. Две прямые,
параллельные третьей
прямой, параллельны.



Дано: $a \parallel c$ и $b \parallel c$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

Выберем точку M на прямой b .

Через точку M и прямую a , которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость α (Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:

1) прямая b пересекает плоскость α или 2) прямая b находится в плоскости α .

Пусть прямая b пересекает плоскость α .

Значит, прямая c , которая параллельна прямой b , тоже пересекает плоскость α . Так как $a \parallel c$, то получается, что a тоже пересекает эту плоскость. Но прямая a не может

одновременно пересекать плоскость α и находиться в плоскости α . Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая b пересекает плоскость α , является **неверным**.

Значит, прямая b находится в плоскости α .

Теперь нужно доказать, что прямые a и b параллельны.

Пусть у прямых a и b есть общая точка L .

Это означает, что через точку L проведены две прямые a и b , которые параллельны прямой c . Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые a и b не имеют общих точек.

Так как прямые a и b находятся в одной плоскости α и у них нет общих точек, то они параллельны.

Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется пучком параллельных прямых.

Выводы:

1) Любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.

2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

2. Параллельность прямой и плоскости

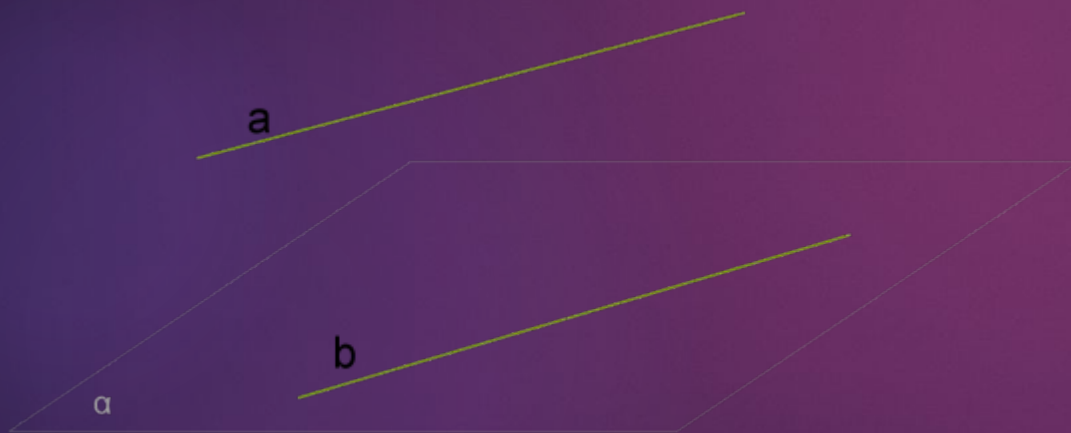
СОГЛАСНО АКСИОМАМ, ЕСЛИ ДВЕ ТОЧКИ ПРЯМОЙ НАХОДЯТСЯ В НЕКОТОРОЙ ПЛОСКОСТИ, ТО ПРЯМАЯ ЛЕЖИТ В ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ. ОТСЮДА СЛЕДУЕТ, ЧТО ВОЗМОЖНЫ ТРИ СЛУЧАЯ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ:

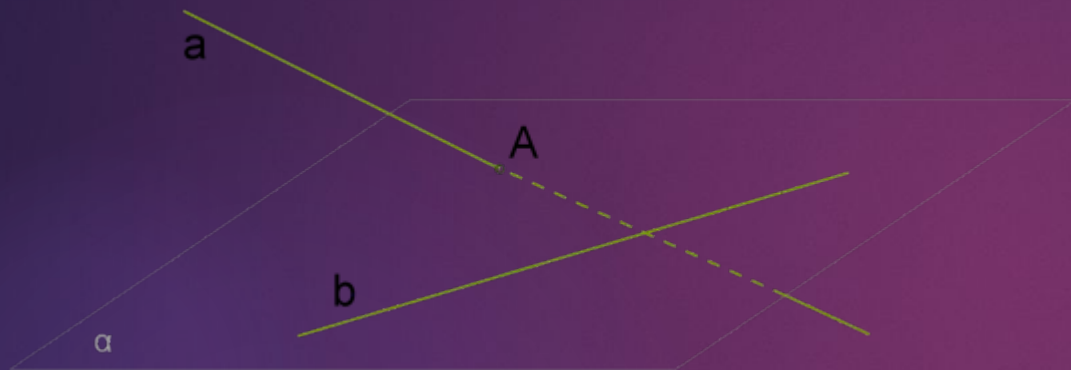
- 1) ПРЯМАЯ ЛЕЖИТ (НАХОДИТСЯ) В ПЛОСКОСТИ
- 2) ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ИМЕЮТ ТОЛЬКО ОДНУ ОБЩУЮ ТОЧКУ (ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ)
- 3) ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ НЕ ИМЕЮТ ОБЩИХ ТОЧЕК

**ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ
НАЗЫВАЮТСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ, ЕСЛИ
ОНИ НЕ ИМЕЮТ ОБЩИХ ТОЧЕК.**

Теорема 5 „Признак
параллельности прямой и
плоскости”.

Если прямая, не лежащая в
данной плоскости, параллельна
какой-нибудь прямой на этой
плоскости, то эта прямая
параллельна данной плоскости.





Мы пришли к противоречию. Так как согласно данной информации $a \parallel b$, они не могут быть скрещивающимися. Значит прямая a должна быть параллельна плоскости α .

Доказательство:

Доказательство проведем от противного. Пусть a не параллельна плоскости α , тогда прямая a пересекает плоскость в некоторой точке A .

Причем A не находится на b , так как $a \parallel b$. Согласно признаку скрещивающихся прямых, прямые a и b скрещивающиеся.

Теорема 6.

Если плоскость β проходит через данную прямую a , параллельную плоскости α , и пересекает эту плоскость по прямой b , то $b \parallel a$.

Прямую b иногда называют следом плоскости β на плоскости α .

Теорема 7.

Если одна из двух параллельных прямых $a \parallel b$ параллельна данной плоскости α , то другая прямая либо параллельна этой плоскости либо лежит в этой плоскости.

