

**Государственное Образовательное Учреждение  
Лицей №1523**

**ЮАО г.Москва**

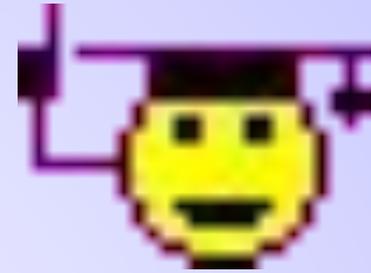
# **Лекции по геометрии**

## **10 класс**

**© Хомутова Лариса Юрьевна**

**© Крайко Мария Александровна**

# Лекция №1



**Аксиомы стереометрии и  
следствия из них**

# 1. Аксиомы стереометрии

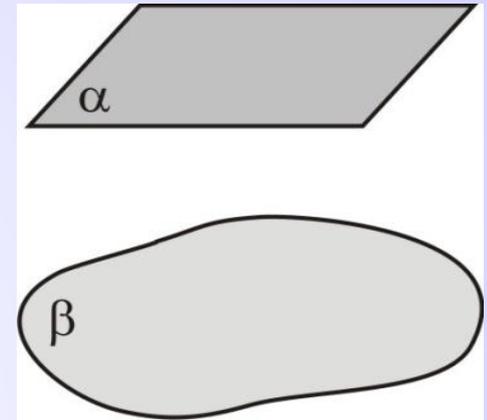
*Стереометрия* - это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве

В планиметрии основными фигурами являются точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается еще одна основная фигура - **плоскость**.

Наряду с этими фигурами будем рассматривать геометрические тела и их поверхности.

***Плоскость*** - геометрическая фигура простирающаяся неограниченно во все стороны.

На чертеже плоскости чаще всего изображаются параллелограммами и обозначаются греческими буквами; иногда плоскости изображаются другими плоскими фигурами (на рисунке 1 представлены возможные изображения плоскостей).



**Рисунок 1**

**Замечание:** В каждой плоскости пространства выполняются не только все аксиомы планиметрии, но также и все остальные факты, доказанные в курсе 7-9 классов.

**A1**: Через любые три не лежащие на одной прямой точки можно провести единственную плоскость (рисунок 2).

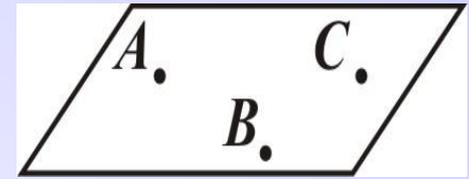


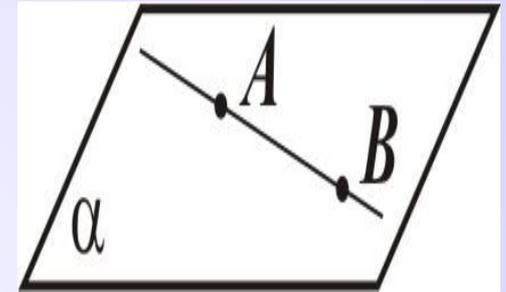
Рисунок 2

Задание плоскости тремя точками породило обозначение плоскости тремя точками (к примеру, на рисунке 2 изображена плоскость  $(ABC)$ ).

**A2**: Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

( рисунок 3 )

$$\left. \begin{array}{l} A \in \alpha, \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \subset \alpha$$



**Рисунок 3**

**Замечание** : Из аксиомы А2 следует, что если прямая и плоскость имеют 2 общие точки, то эта прямая лежит в плоскости, т.е. имеет с ней бесконечное число общих точек.

Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то говорят, что ***прямая параллельна плоскости*** (на рисунке 4  $a \parallel \alpha$ ).

Если прямая и плоскость имеют ровно одну общую точку, то говорят, что ***прямая пересекает эту плоскость*** (на рисунке 5  $a \cap \alpha = A$ ).

К примеру, всякая прямая, лежащая в плоскости пола стандартной комнаты, параллельна плоскости потолка этой же комнаты, поскольку они не имеют общих точек.

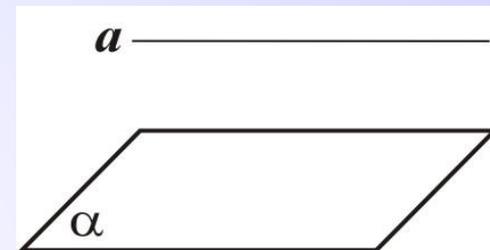


Рисунок 4

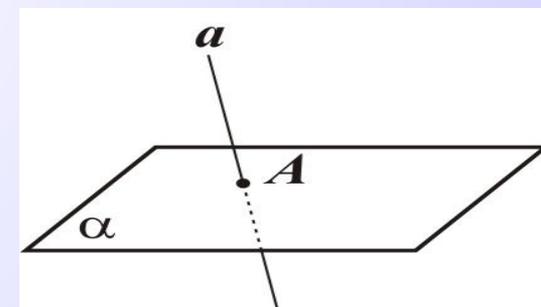


Рисунок 5

**А3:** Если две несовпадающие плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, содержащей эту точку.

Аксиома А3 фактически утверждает, что

- две плоскости либо совпадают,
- либо пересекаются по прямой (на рисунке 6  $\alpha \cap \beta = a$ ),
- либо вовсе не имеют общих точек.

Две *плоскости*, не имеющие общих точек, называются *параллельными* (на рисунке 7  $\alpha \parallel \beta$ ).

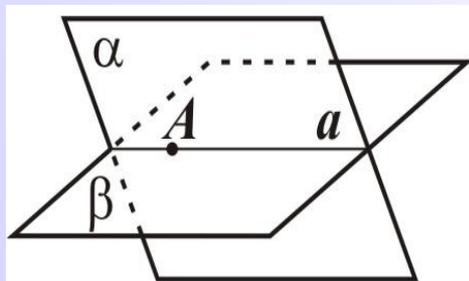


Рисунок 6

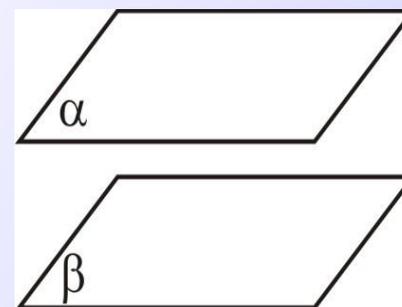


Рисунок 7

## 2. Следствия из аксиомы стереометрии

### Теорема о задании плоскости прямой и не лежащей на ней точкой:

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.

**Дано:**

$a$ , т.  $A \notin a$ .

**Доказать:**

$\exists! \alpha: A \in \alpha$ ,

$a \subset \alpha$ .

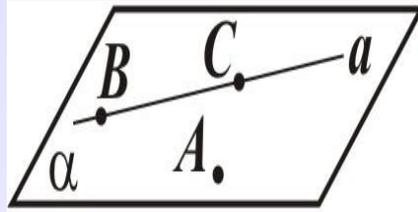


Рисунок 8

**Доказательство:**

$\exists$ : Возьмем  $\forall$  т.  $B, C \in a$  (рисунок 8) и проведем через 3 неколлинеарные точки  $A, B$  и  $C$  плоскость  $\alpha$  (это можно сделать в соответствии с аксиомой A1). Докажем, что  $\alpha$  – искомая плоскость: т.  $B$  и т.  $C$  лежат в плоскости  $\alpha$ , то по аксиоме A2 плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$ .

**!:** Допустим, что помимо плоскости  $\alpha$  существует плоскость  $\beta$ , содержащая точку  $A$  и прямую  $a$ .  $B, C \in a \subset \beta, \Rightarrow$  плоскость  $\beta$  содержит точки  $A, B$  и  $C$ . Таким образом, через 3 неколлинеарные точки  $A, B$  и  $C$  проходят сразу 2 плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , что противоречит аксиоме A1. А значит, плоскость  $\alpha$  – единственная. #

Доказанная только что теорема утверждает, что плоскость задается прямой и не лежащей на ней точкой. В связи с этим используется следующее обозначение плоскости, проходящей через прямую  $a$  и не лежащую на ней точку  $A$ : плоскость  $(a; A)$ .

**Теорема о задании плоскости двумя пересекающимися прямыми:** Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

**Дано:**

$a \cap b = ! A.$

**Доказать:**

$\exists ! \alpha: a,$

$b \subset \alpha.$

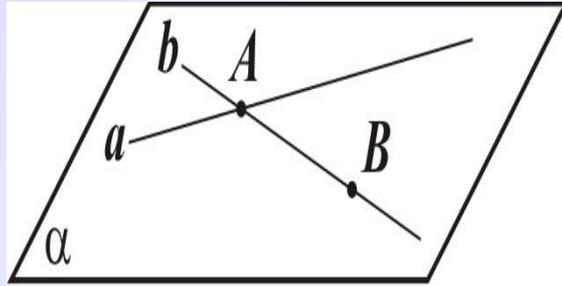


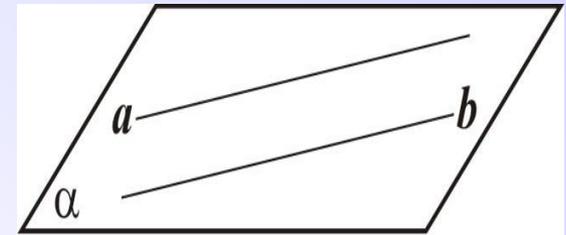
Рисунок 9

**Доказательство:**

**∃:** Возьмем на прямой  $b \forall$  т.  $B$ , отличную от  $A$  (рисунок 9), и проведем через прямую  $a$  и точку  $B \notin a$  плоскость  $\alpha$  (это можно сделать в соответствии с теоремой о задании плоскости прямой и не лежащей на ней точкой). Докажем, что  $\alpha$  – искомая плоскость: точки  $A$  и  $B$ , принадлежат прямой  $b$ , следовательно по А2 прямая  $b \subset \alpha$ .

**!:** Допустим, что помимо плоскости  $\alpha$  существует плоскость  $\beta$ , содержащая прямые  $a$  и  $b$ .  $B \in b \subset \beta, \Rightarrow$  плоскость  $\beta$  содержит прямую  $a$  и точку  $B$ . Таким образом, через прямую  $a$  и не лежащую на ней точку  $B$  проходят сразу 2 плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , что противоречит теореме о задании плоскости прямой и не лежащей на ней точкой. Следовательно, плоскость  $\alpha$  – единственная.

Две *прямые* в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (на рисунке 10  $a \parallel b$ ).



Рисунок

**Замечание** : Требование принадлежности параллельных прямых одной плоскости является существенным: Из того, что прямые не пересекаются, не вытекает их параллельность. К примеру, если рассмотреть две прямые, одна из которых лежит в плоскости пола, а вторая – в плоскости потолка стандартной комнаты, то, не имея общих точек, они далеко не всегда будут параллельными, поскольку не всегда будут лежать в одной плоскости. Позже будет показано, что такие прямые называются скрещивающимися.

**Теорема о задании плоскости двумя параллельными прямыми:**  
Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

**Дано**

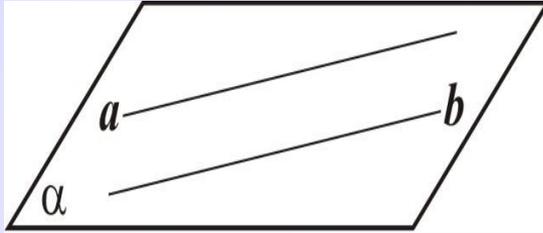
:

$a \parallel b$ .

**Доказать:**

$\exists ! \alpha: a,$

$b \subset \alpha.$



Рисунок

**Доказательство:**

$\exists$ : По условию  $a \parallel b$ ,  $\Rightarrow$  по определению параллельных прямых существует плоскость  $\alpha$ , содержащая каждую из прямых  $a$  и  $b$  (рисунок 10).

**!:** Допустим, что помимо плоскости  $\alpha$  существует плоскость  $\beta$ , содержащая прямые  $a$  и  $b$ . Но тогда плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются сразу по двум общим прямым  $a$  и  $b$ , что противоречит аксиоме А3. Следовательно, плоскость  $\alpha$  – единственная.