

Диэлектрики в электрическом поле

- **Свободные и связанные заряды**

- **Связанными** зарядами называют заряды, входящие в состав атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических веществах с ионной решеткой. Все остальные заряды называют **свободными**. Примерами свободных зарядов могут служить электроны проводимости в металлах, ионы в газах и электролитах.

Ионами называются атомы или молекулы, имеющие либо избыток, либо недостаток электронов по сравнению с нормальным состоянием этих атомов или молекул.

Электроны, оторвавшиеся от атомов при их ионизации, не всегда присоединяются к другим атомам; часто они остаются свободными.

Диэлектриками называются вещества, в которых отсутствуют свободные заряды (или их присутствие незначительно и этим присутствием можно пренебречь в условиях рассматриваемой задачи).

В диэлектрике все заряды связаны.

В диэлектриках свободные заряды отсутствуют. Когда на диэлектрик переходит свободный электрон, он тут же присоединяется к какому-либо атому или молекуле.

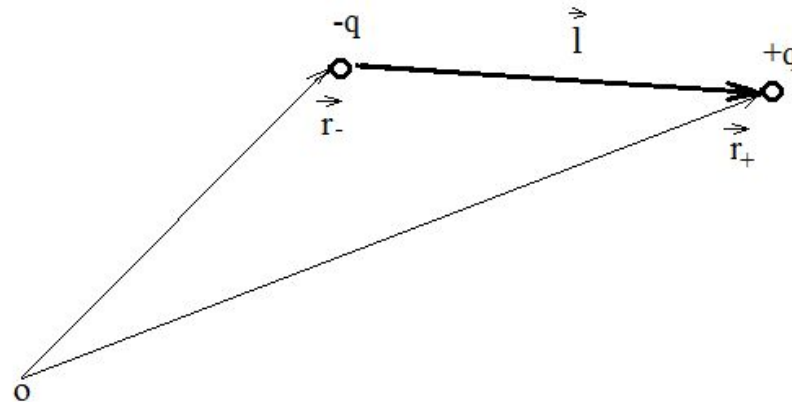
Диполь

Диполь – система связанных противоположных зарядов. Если говорить более точно, система двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку зарядов называется *диполем*, а $l = |\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-|$ - *плечом диполя* (расстояние между зарядами). При этом заряды не обязательно являются точечными, и если они не точечные, $\mathbf{r}_+$ и $\mathbf{r}_-$ - радиус-векторы электрических центров зарядов, образующих диполь.

Точечный диполь. Пусть размеры заряженных тел, образующих диполь, и расстояние между ними (плечо диполя) малы по сравнению с расстоянием от точки наблюдения до центра диполя. (Другими словами, последнее расстояние так велико, что в условиях рассматриваемой задачи два противоположных заряда можно считать слившимися в одну точку.) В этом случае диполь называется *точечным*.

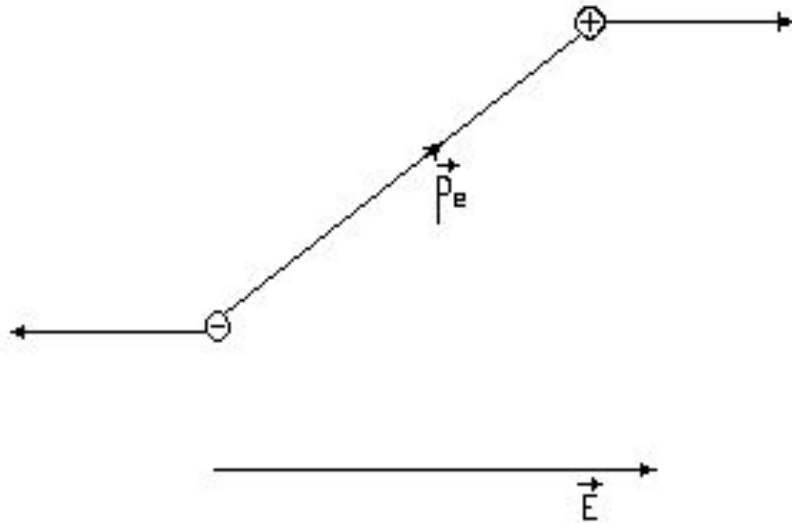
Дипольный момент или электрический момент диполя

- Дипольный момент (электрический) определяется вектором $\vec{p}_e = ql$ (1)
- Здесь - l вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному.



Поляризация диэлектриков

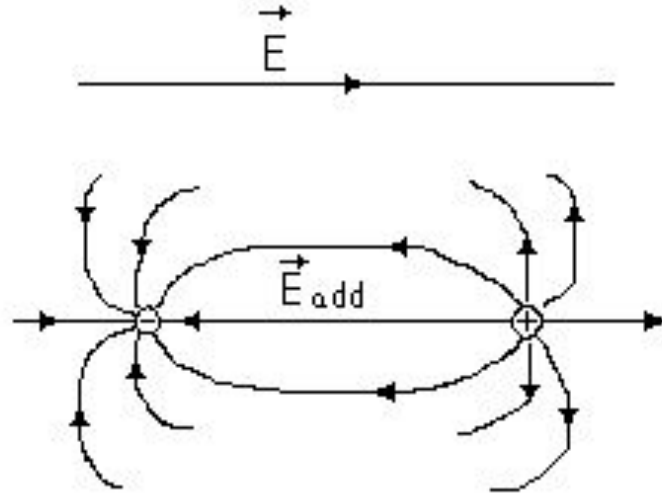
- Поляризация состоит в повороте осей жестких диполей вдоль $\vec{E}$. На диполь с моментом $\vec{p}_e$, помещенный во внешнее однородное электрическое поле, действует пара сил с моментом $[\vec{p}_e, \vec{E}]$, стремящаяся повернуть диполь в направлении напряженности поля.



Потенциальная энергия жесткого диполя, помещенного во внешнее электрическое поле, равна $W_{pot} = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}$

Знак минус показывает, что устойчивым положением диполя, соответствующим минимуму потенциальной энергии, является расположение его вектора $\vec{p}_e$ вдоль положительного направления $\vec{E}$.

Добавочное поле $\vec{E}_{add}$, созданное диполем, ослабляет внешнее поле.



Вектор поляризации

Молекула поляризованного диэлектрика может рассматриваться как **диполь**, то есть как система связанных противоположных зарядов.

Мерой поляризации диэлектрика является **вектор поляризации** $\vec{P}(\vec{r})$ или **поляризованность** в точке среды $M(\vec{r})$ и определяется по формуле

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\sum_{dV} \vec{p}_{ei}}{dV} \quad (2)$$

Здесь суммирование распространяется на все молекулы-диполи, находящиеся в физически бесконечно малом объеме, содержащем точку $M(\vec{r})$.

$\vec{p}_{ei}$ - дипольный момент i -й молекулы.

Потенциал поляризованного диэлектрика

- Пусть молекулы-диполи распределены в объеме V .
- Рассмотрим элемент объема dV' , расположенный в точке с радиус-вектором $\vec{r}'$, как точечный диполь, электрический момент которого равен $\vec{p}' = P(\vec{r}')dV'$
- Найдем потенциал, создаваемый этим диполем в точке наблюдения $M(\vec{r})$.

- Запишем приращение потенциала как для точечного заряда

$$\varphi_{\text{т.з.}}(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}') - \varphi_{\text{т.з.}}(\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{\nabla} \varphi_{\text{т.з.}}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}' + o(|\vec{l}'|)$$

Если $|\vec{l}'| \rightarrow 0$, то

$$d\varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{\text{т.з.}}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}' =$$

$$-kq \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{l}' = -k \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = k P(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) dV'$$

Здесь использовали $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{R} \right)$, $\varphi_{\text{т.з.}}(\vec{r}) = k \frac{q}{|\vec{r}|}$

$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right)$ - градиент по штрихованным координатам.

- Следовательно,
- получаем после интегрирования

$$\varphi(r) = k \int_V P(r') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV'$$

- Рассмотрим действие оператора
- $$\nabla' \cdot \left(\frac{P}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \cdot P + P \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

- Выразим из этого равенства
- $$P \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{P}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot P$$

- В результате имеем
- $$\begin{aligned} \varphi(r) &= k \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{P(r')}{R} \right) dV' - \int_V \frac{1}{R} \nabla' \cdot P(r') dV' \right] = \\ &= k \left[\oint_S \frac{P(r') \cdot dS'}{R} - \int_V \frac{\nabla' \cdot P(r')}{R} dV' \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Воспользовались теоремой Остроградского-Гаусса S - граница области V

В выражении (3) поверхностный интеграл эквивалентен потенциалу некоторого поверхностного распределения зарядов; объемный интеграл – потенциалу объемного распределения зарядов. Соответствующие плотности зарядов равны:

$$\sigma_P = P_n \quad \rho_P = -\nabla \cdot P \quad (4)$$

Плотности зарядов

- При неоднородном распределении дипольных моментов представляет собой плотность тех зарядов, которые некомпенсированы из-за неоднородности распределения, а ρ_p есть плотность зарядов, возникающих на поверхности ввиду отсутствия компенсирующих соседей у тех диполей, концы которых лежат на этой поверхности

В общем случае потенциал поляризационных зарядов обоих видов выражается соотношением:

$$\Phi(r) = k \left[\oint_S \frac{\sigma_p(r') dS'}{R} + \int_V \frac{\rho_p(r') dV'}{R} \right] \quad (5)$$

Вывод. Дипольные моменты, порожденные поляризацией вещества, представляют собой разновидность источников поля .

Указанные дипольные моменты возникают в веществе под действием электрического поля, и поведение вещества можно описать с помощью вектора поляризации .

Уравнение Пуассона

- Так как источники электрического поля разделены нами на два вида, то уравнение Пуассона принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi = -\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P) \quad (6)$$

Плотность ρ_P согласно (4) выражена через дивергенцию поляризации $\vec{P}$, то формула (6) преобразуется к виду:

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7)$$

Введем вектор электрической индукции $\vec{D}$, называемый также электрическим смещением (термин, введенный еще Максвеллом):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (8)$$

Уравнение (6) можно записать теперь двумя способами:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (9)$$

$$\rho_{total} = \rho + \rho_P \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P) \quad (10)$$

Ур-е Максвелла (9) удобно для расчетов, т.к. чаще всего известна плотность ρ свободных зарядов.

Теорема Гаусса для потока электрического смещения

- С помощью теоремы Гаусса-Остроградского можно получить и соответствующие интегральные соотношения:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0} \quad (11.1) \quad (11.2)$$

$$Q = \int_{V_S} \rho dV \quad Q_{total} = Q + \int_{V_S} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV \quad (12)$$

Здесь S произвольная замкнутая кусочно-гладкая поверхность внутри диэлектрика V_S - объем, ограниченный поверхностью S

$\vec{D}$ представляет собой лишь ту часть поля, которая создается свободными зарядами.

Поле $\vec{P}$ создается только поляризационными зарядами.
Вектор $\vec{E}$ описывает поле, создаваемое как свободными, так и связанными зарядами

Диэлектрическая проницаемость среды

- Будем считать, что при **не очень сильном внешнем поле** в **изотропном диэлектрике** вектор поляризации $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ (13)

пропорционален напряженности поля.

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\Phi}{м} \quad \text{называется электрической постоянной}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E} \quad (14)$$

(8)

χ диэлектрической восприимчивостью среды

$\chi = 0$ для вакуума

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad \text{относительная диэлектрическая проницаемость} \quad (15)$$

$\varepsilon = 1$ для вакуума

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \chi) \quad \text{абсолютная диэлектрическая проницаемость среды} \quad (16)$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$$

Относительная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \quad (17)$$

Абсолютная диэлектрическая проницаемость **вакуума** $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon_0$

Для большинства применяемых в технике диэлектриков
относительная диэлектрическая проницаемость находится в пределах

$$2 \leq \varepsilon \leq 8$$

Вектор электрической индукции или электрическое
смещение равен

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

Замечание. Сказанное относится к **изотропным** диэлектрикам,
у которых векторы $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ совпадают по направлению.

Классификация сред

- Свойства среды по отношению к электрическому полю определяются параметром ϵ_a .
- Различают следующие среды.
- **Линейные**, в которых параметр ϵ_a не зависит от величины электрического поля
нелинейные, в которых параметр ϵ_a зависит от величины электрического поля
однородными называют диэлектрики, параметр ϵ_a которых не зависит от координат
Среды, у которых этот параметр является функцией координат, называют **неоднородными**
Если свойства диэлектрика одинаковы по разным направлениям, то его называют **изотропным**.
Соответственно среды, свойства которых различны по разным направлениям, называют **анизотропными**.

В изотропных диэлектриках векторы $\overset{\nabla}{P}, \overset{\nabla}{E}$ $\overset{\nabla}{D}, \overset{\nabla}{E}$ параллельны

В изотропных диэлектриках ϵ_a - скалярные величины

В анизотропных этот параметр является тензором (линейным оператором).

$$\overset{\nabla}{D} = \epsilon_a \overset{\nabla}{E}$$

Теорема Гаусса для различных сред

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_V \rho dV \quad \begin{array}{l} \text{-для линейной изотропной} \\ \text{однородной среды} \end{array} \quad (18)$$

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad \text{-для вакуума} \quad (19)$$

Для линейной изотропной среды в общем случае $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ теорема Гаусса в дифференциальной форме имеет вид

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}) = \rho \quad (20)$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}(\varepsilon(\vec{r}) \operatorname{grad} \varphi) = -\rho \quad (21)$$

Минус в (21) возникает за счет появления потенциала

Кусочно-однородная среда

Рассмотрим случай кусочно-однородной среды. Пусть для определенности имеется две различные среды, заполненные однородными средами с различными ϵ .

Условие сопряженности

Рассмотрим границу раздела двух диэлектриков с относительными проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2

Для элементарного контура $pqrs$,

расположенного по обе стороны границы раздела, запишем **закон электромагнитной индукции**

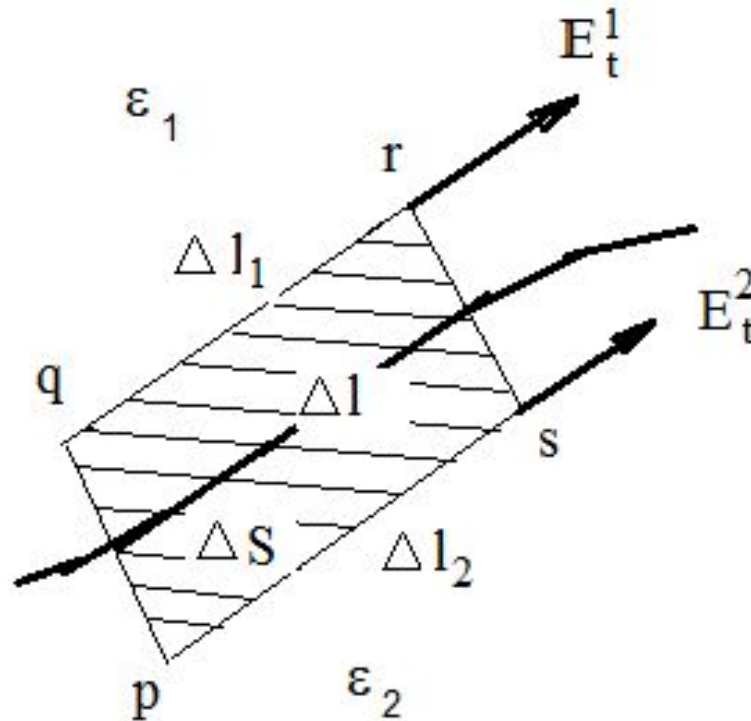
$$\oint_{pqrs} (\vec{E}, d\vec{l}) = - \frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta S \quad (22)$$

B_n нормальная составляющая индукции к площадке ΔS ,
охваченной контуром интегрирования

Условие сопряженности

Распределение B_n в пределах малой площадки ΔS принято считать равномерным.

Такое же предположение примем и в отношении составляющих напряженности на границах контура qr и ps



Условие сопряженности

Сделанные предположения позволяют (22) записать в виде

$$E_t^1 \Delta l_1 - E_t^2 \Delta l_2 + \int_{pq,rs} (\vec{E}, d\vec{l}) = - \frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta S \quad (23)$$

E_t^1 и E_t^2 касательные составляющие вектора напряженности электрического поля на отрезках Δl_1 и Δl_2

При предельном переходе, когда контур стягивается к границе раздела

Δl , имеем $\Delta l_1 \rightarrow \Delta l$ $\Delta l_2 \rightarrow \Delta l$
Длины qr и ps
отрезков

стремятся к нулю, также стремится к нулю и

ΔS

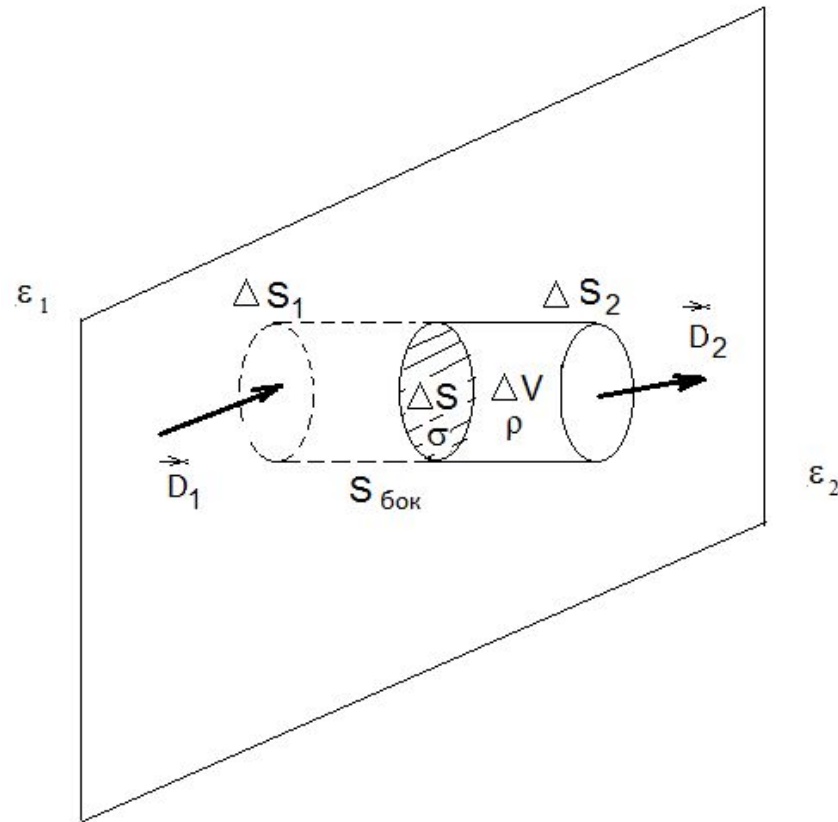
площадь

Из (23) получаем условие $E_t^1 = E_t^2$ (24)

На границе раздела диэлектриков касательные составляющие вектора напряженности электрического поля равны.

Вектор смещения на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим элементарный цилиндрический объем ΔV , охватывающий границу раздела двух диэлектриков ΔS . Пусть внутри рассматриваемого объема имеются не только объемно распределенные заряды, но и распределенный на границе раздела заряд с поверхностной плотностью σ .



В этом случае из постулата Максвелла следует

$$\oint_S (\overset{\sqcup}{D}, \overset{\sqcup}{dS}) = \sigma \Delta S + \rho \Delta V \quad (25)$$

Пусть S поверхность цилиндра. Принимая условие постоянства нормальных составляющих вектора $\overset{\sqcup}{D}$ на малых торцевых поверхностях цилиндра ΔS_1 , ΔS_2 , перепишем (25) в виде

$$-D_n^1 \Delta S_1 + D_n^2 \Delta S_2 + \oint_S (\overset{\sqcup}{D}, \overset{\sqcup}{dS}) = \sigma \Delta S + \rho \Delta V \quad (26)$$

При стягивании цилиндра к границе раздела ΔS

объем цилиндра будет стремиться к нулю: $\Delta V \rightarrow 0$

Также $\Delta S_1 \rightarrow \Delta S$, $\Delta S_2 \rightarrow \Delta S$, $\Delta S_{\text{бок}} \rightarrow 0$ Из (26) получаем

$$D_n^2 - D_n^1 = \sigma \quad (27)$$

Условия (24) и (27) являются граничными условиями на границе раздела диэлектриков