Лекция №3. Тема : Сложение гармонических колебаний.

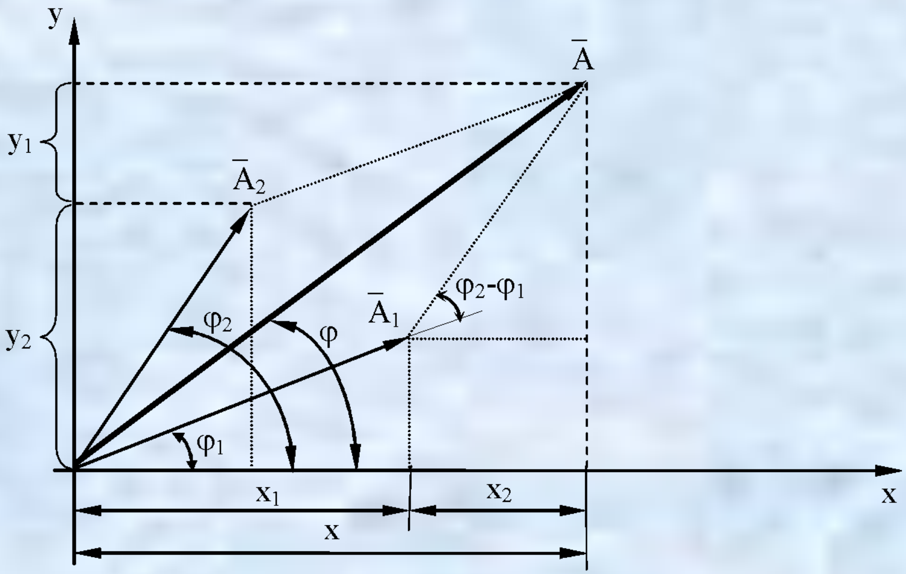
Вопросы.

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и частоты.
2. Биения.
3. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний.

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Пусть складываются два ГК :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t - \varphi_2)$$



$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t - \varphi) - (1)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + 2\mathrm{A}_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \ (2)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \ (3)$$

Тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одной частоты, совершает также гармонические колебания в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.
Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз склады-ваемых колебаний.

2. Биения

Биениями называют периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

$$x = \left(2A\cos(\Delta\omega t/2)\right)\cos\omega t \qquad A_{\text{биен}} = \left|2A\cos(\Delta\omega t/2)\right|$$

$$\omega_{\text{биен}} = \Delta\omega \qquad T_{\text{биен}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

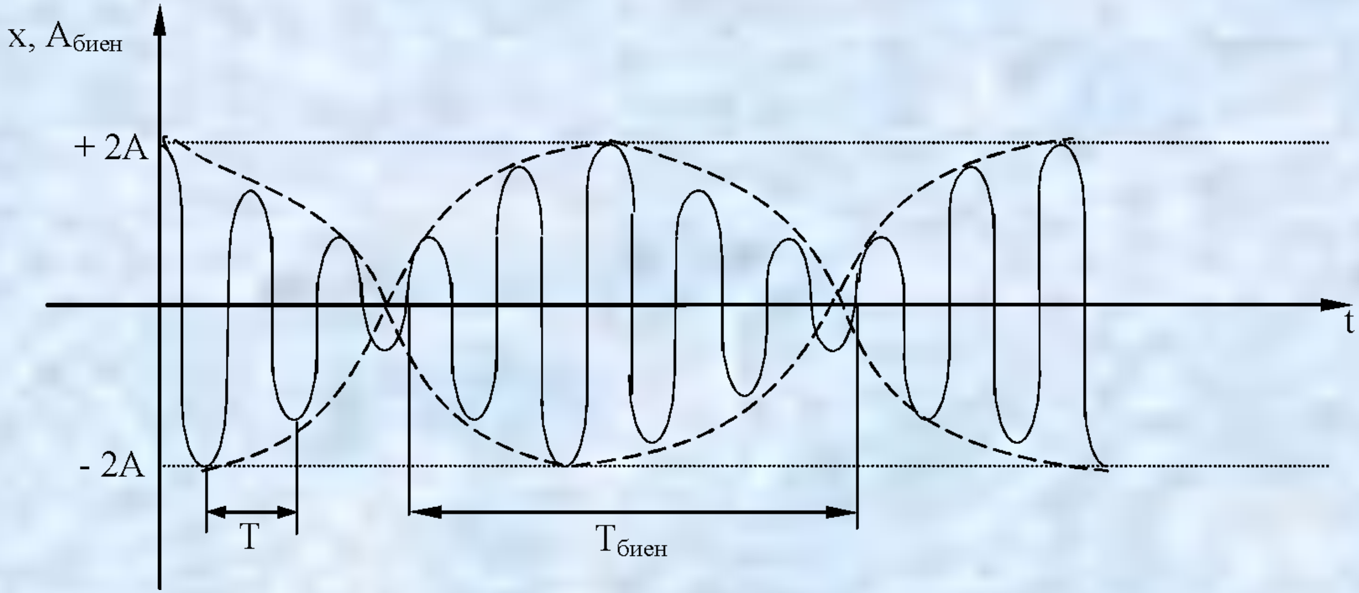


График результирующего колебания дают жирные линии, а огибающие их – график изменения с течением времени амплитуды.

3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Складываются два ГК одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y.

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Чтобы найти уравнение траектории результирующего колебания *y=f* (*x*) необходимо исключить зависимость от времени (*t*) в системе уравнений.

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{yx}{BA}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

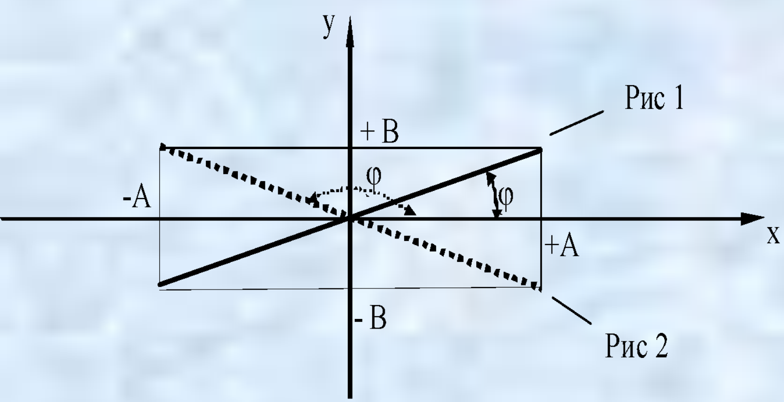
-уравнение траектории результирую-щего колебания, уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно.

Частные случаи:

1. ϕ = mπ/2 (m = 0, ±1, ± 2…),то рис.1., если m –четное, и рис. 2, если m –нечетное

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \qquad y = \pm x\frac{B}{A}$$

- эллипс вырождает-ся в отрезок прямой



2. Если ϕ = (2m+1)π/2 (m = 0, ±1, ±2,…), то **уравнение траектории - уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам.**

Если A=B, то эллипс вырождается в окружность, а колебания называются поляризованными по кругу.

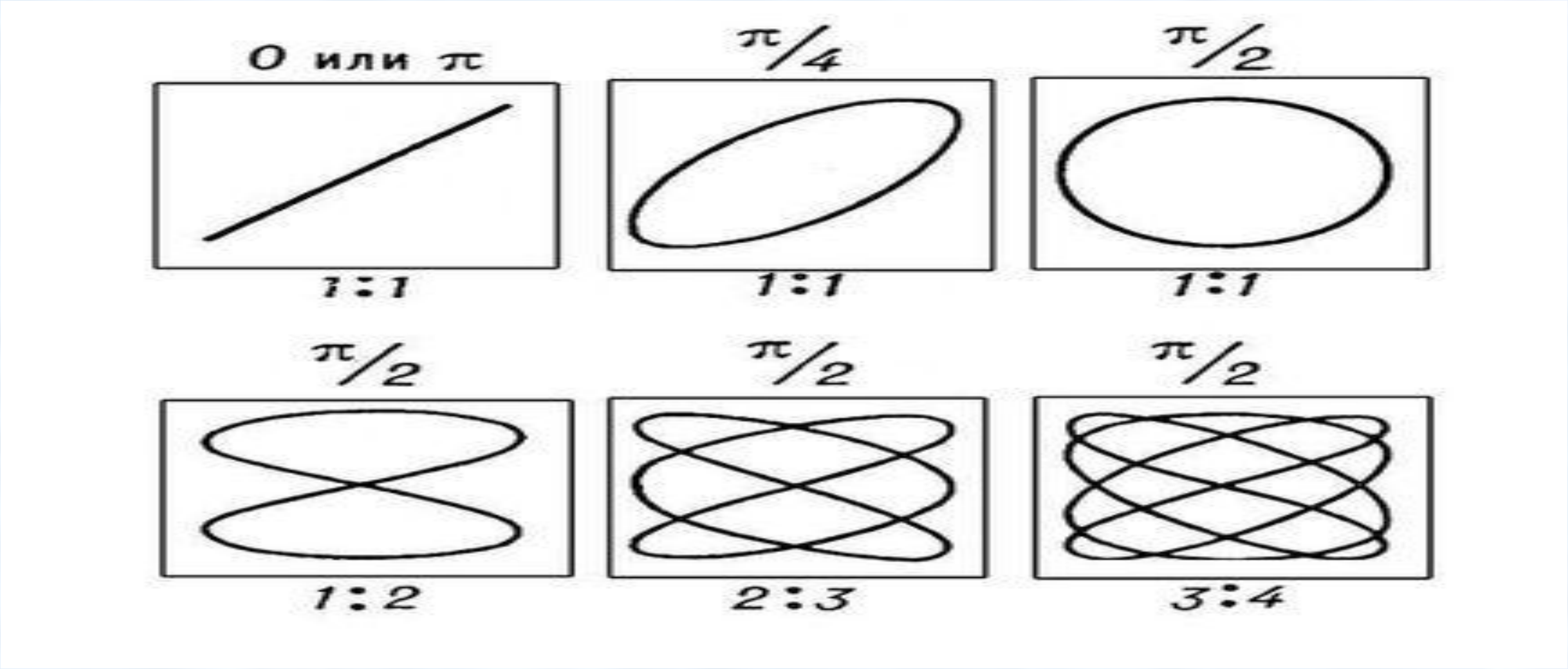
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

4. Фигуры Лиссажу

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то траектория результирующего колебания сложна и называются фигурами Лиссажу.

Ж. Лиссаж – (1822-1880) – французский физик.

Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. Виды фигур Лиссажу



Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат.

.Тема :
Волновые процессы.

Вопросы.

1. Продольные и поперечные волны.
2. Уравнение бегущей волны.
3. Фазовая и групповая скорости.
4. Интерференция волн.
5. Стоячие волны.
6. Электромагнитные волны.

5. Продольные и поперечные волны

Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия.

Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и его энергия.

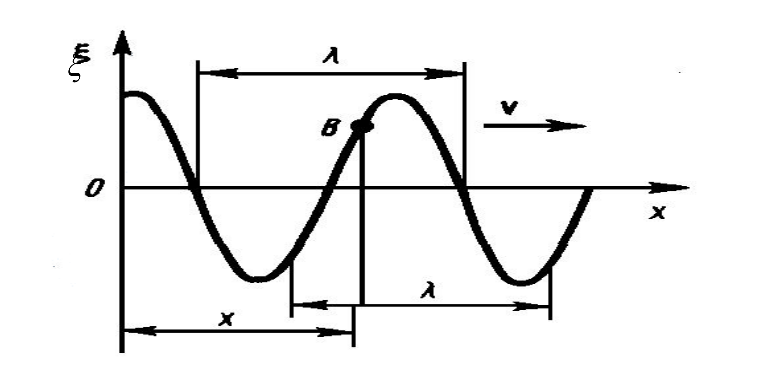
Основное свойство всех волн не зависимо от их природы: **перенос энергии осуществляется без переноса вещества**.

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания являются гармоническими.

Фронтом волны называется геометрическое место точек, до которых дошли колебания в данный момент времени *(t).*

Волновой поверхностью называют геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей существует бесконечно много, а **волновой фронт для каждого момента времени один**.



$\xi -$ (кси) обозначим смещение частицы из положения равновесия.

Расстояние, на которое переместилась волна за период, называется длиной волны.

$$\lambda = VT \qquad \nu\lambda = V$$

$\xi = f(x) -$ график волны.

6. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение

Бегущими называются волны, переносящие в пространстве энергию.

Перенос энергии волнами характеризуют вектором плотности потока энергии – вектором Умова.

$$\xi = f(x,t) = A\cos(\omega(t-\tau)+\varphi) = A\cos(\omega(t-x/V)+\varphi)$$

-уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в по-ложительном направлении оси x, V- фазовая скорость.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{V} = \frac{\omega}{V}$$ - волновое число

$$\Delta\xi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$ -волновое уравнение, где Δ -оператор Лапласа

Любую волну (согласно принципу суперпозиции и разложения Фурье) можно представить в виде суммы гармонических волн, или группы волн, т.е. в виде **волнового пакета**.

Волновым пакетом **называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.**

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с понятием когерентности.

Волны называются когерентными, если разность фаз остается постоянной или изменяют-ся по вполне определенному закону.

Пусть простейший волновой пакет состоит из 2 ^{x} распространяю-щихся вдоль положительного направления оси x гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$.

7.Групповая скорость

Уравнение, описывающее распространение волнового пакета имеет вид:

$$\xi = A_0\cos(\omega t - kx) + A_0\cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = 2A_0\cos(\frac{td\omega - xdk}{2})\cdot\cos(\omega t - kx)$$

$$A = \left|2A_0\cos(\frac{td\omega - xdk}{2})\right|$$ -амплитуда колебаний волнового пакета

- **Групповая скорость –скорость движения группы волн, образующих в данный момент времени локализованный в пространстве волновой пакет - U.**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = U \qquad U = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}$$ - формула связи между групповой и фазовой скоростями

В **недиспергирующей среде групповая скорость совпадает с фазовой.**

Понятие групповой скорости очень важно, т.к. именно она фигурирует при изменении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т.д.

В теории относительности доказывается, что **групповая скорость U≤ c,** в то время как **для фазовой скорости ограничений не существует.**

7. Интерференция волн

Волны называются когерентными, если разность фаз остается постоянной или изменяются по вполне определенному закону.

В результате наложения когерентных волн в разных точках пространства возникают максимумы и минимумы интенсивности, т.е. происходит перераспределение интенсивности - *I*.

$$\begin{cases} \xi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \xi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Если $\cos(\phi_2 - \phi_1) > 0$, то $A^2 > A_1^2 + A_2^2$
Если $\cos(\phi_2 - \phi_1) < 0$, то $A^2 < A_1^2 + A_2^2$

$$I \sim A^2$$

Результирующая интенсивность определяется выражением:

$$I^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

8. Стоячие волны

Волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распростра-няющихся навстречу друг другу одинаковыми частотами и амплитудами, называются стоячими .

Падающая на преграду волна отражается от преграды и накладывается на бегущую ей навстречу волну.

$$\begin{cases} \xi_1 = A\cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 = A\cos(\omega t + kx) \end{cases}$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx \cos\omega t$$ - уравнение стоячей волны

$$2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$ - амплитуда стоячей волны

В точках среды, для которых $2\pi x/\lambda$ кратен четному числу $\pi/2$, **амплитуда стоячей волны максимальна**

Точки среды, в которых амплитуда стоячей волны максимальна, называ-ются пучностями, а точки среды, в которых амплитуда стоячей волны минимальна, называются узлами.

$$x_{\text{пучн}} = \pm\frac{2m\lambda}{4} \qquad x_{\text{узл}} = \pm\frac{2(m-1)\lambda}{4}$$ - координаты пучностей и узлов стоячей волны

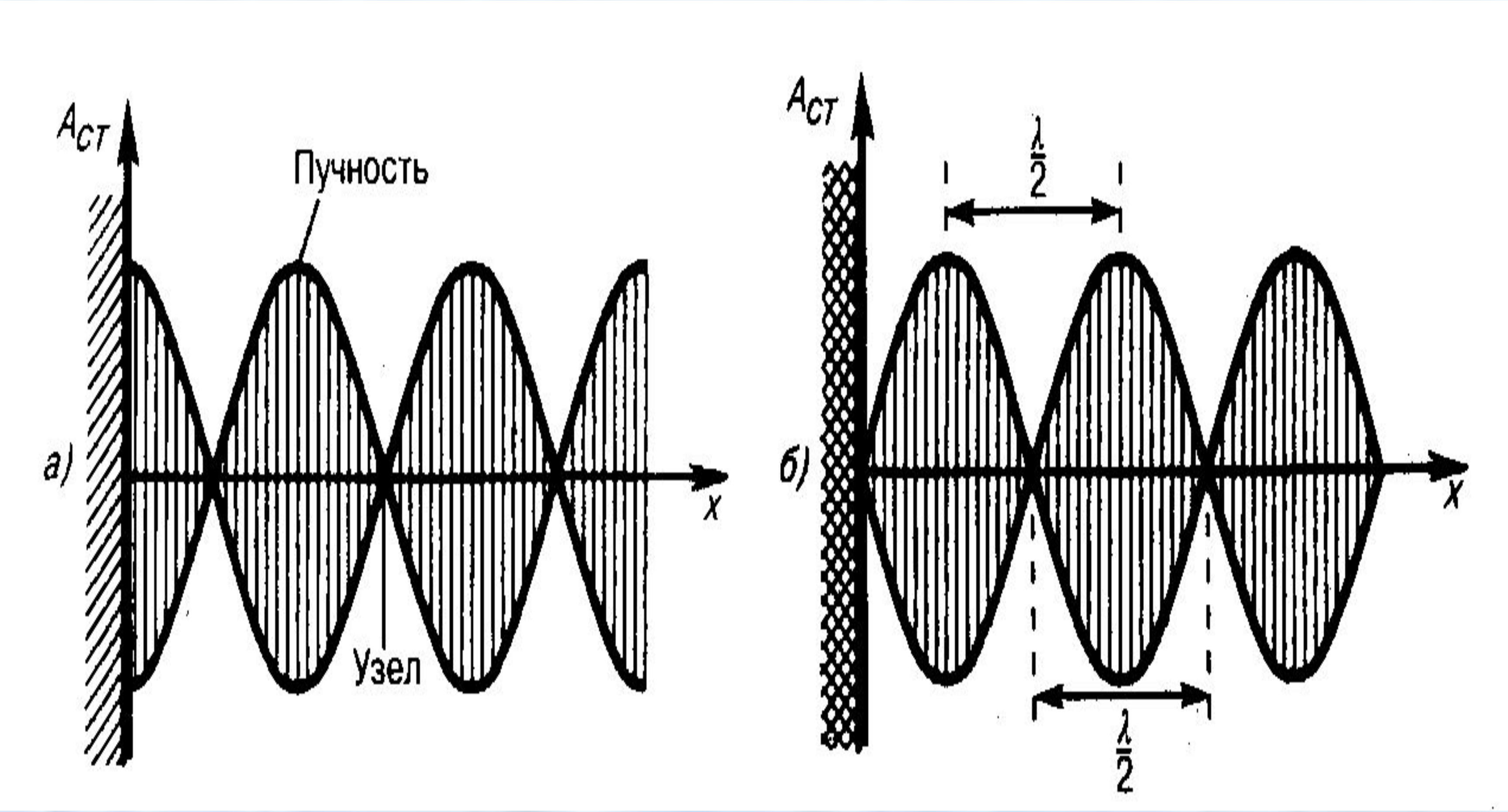
$$x_{\text{пучн.1}} - x_{\text{пучн.0}} = \lambda/2$$
$$x_{\text{узл.1}} - x_{\text{узл.0}} = 3\lambda / 2 - \lambda / 4 = \lambda / 2$$

-расстояние между двумя соседними пучностями или узлами стоячей волны

Если среда, от которой отражается стоячая волна, менее плотная, то вместе отражения получается пучность.

Если наоборот – более плотная, то возникает узел.

В случае стоячей волны переноса энергии нет.



9. Электромагнитные волны

Электромагнитные волны - переменное электромагнитное поле, распростра-няющееся в пространстве со скорость света в вакууме.

Существование электромагнитных волн вытекает из системы уравнений Маквелла. Источник ЭМВ - любой колебательный контур, по которому течет переменный электрический ток. Например, открытый колебательный контур

Таблица 1. Электромагнитные волны

Тип излучения	Длина волны (м)	Частота (Гц)	Вид источника колебания
Радиоволны	10^{-3} - 10^{-4}	3×10^{5} - 3×10^{12}	Колебательный контур, вибратор Герца.
Световые волны	5×10^{-4} - 8×10^{-12}	10^{11} - 10^{14}	лазеры, лампы
Рентгеновское излучение	10^{-9} - 10^{-12}	10^{17} - 10^{19}	Трубки Рентгена
γ - излучение	$\lambda<10^{-12}$	$\nu > 10^{19}$	радиоактивные распады, процессы, космические, ядерные процессы.

10. Дифференциальное уравнение ЭМВ

Векторы напряженностей электрического и магнитного переменного поля, удовлетворяют волновому уравнению:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,(1), \qquad \Delta\vec{H} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\,(2),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

где, Δ – **оператор Лапласа,**

V – фазовая скорость

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - kx), \quad \vec{H} = \vec{H}_0\cos(\omega t - kx)\,(3)$$

- решение уравнений (1) и (2)

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (1) и (2) , описывает волну.

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

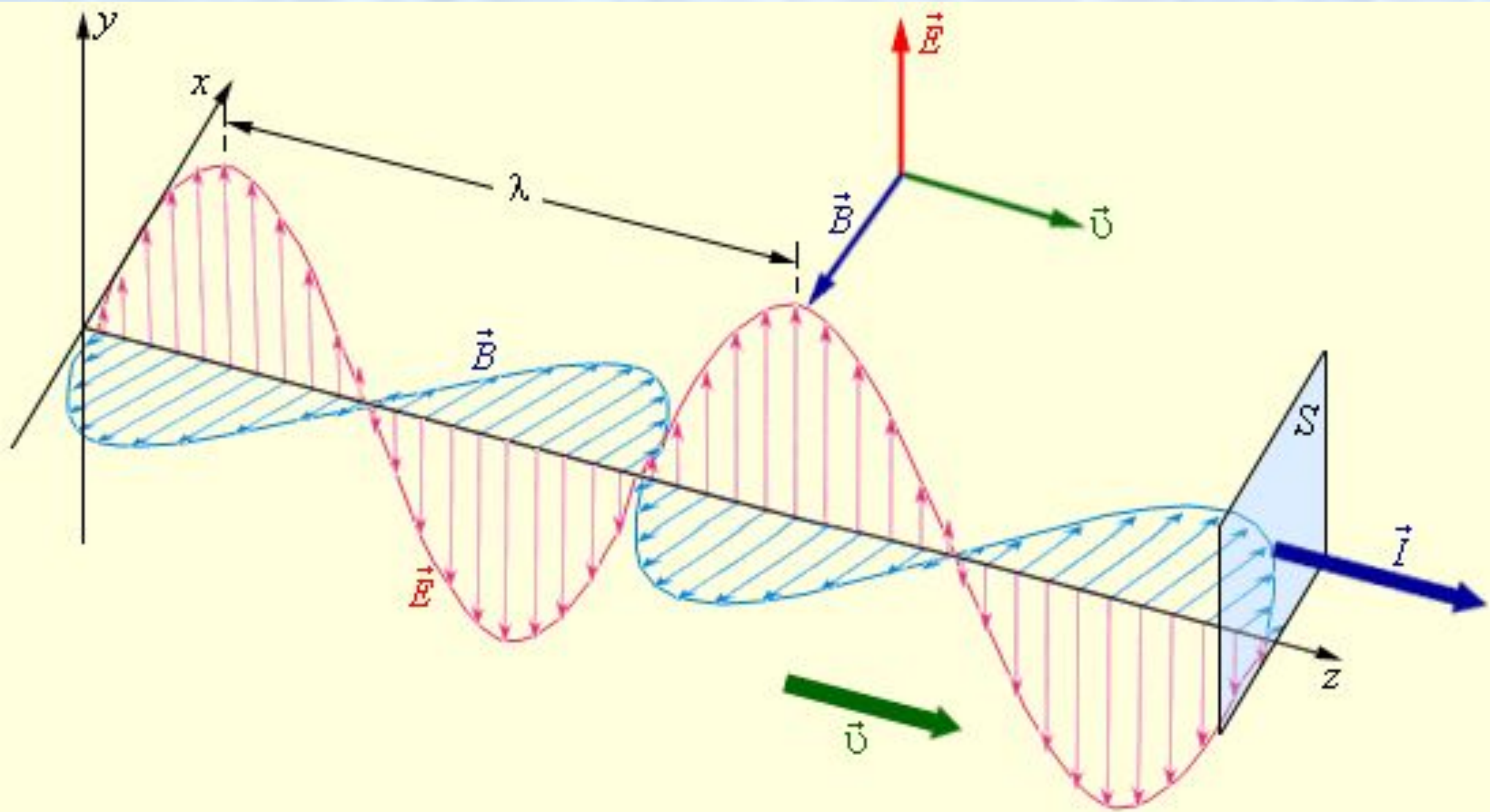
- фазовая скорость ЭМВ,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

- скорость света в вакууме

В вакууме скорость распространения ЭМВ равна скорости света в вакууме – *c*.

Следствие теории Максвелла - поперечность ЭМВ.



Распространение ЭМВ

Векторы □E,□B и□V образуют правовинтовую тройку.

Векторы □E и□B всегда колеблются в электромагнитной волне в одинаковых фазах.

11. Энергия и импульс ЭМ поля

Запишем величины объемной плотности энергии для ЭП и МП и общую формулу:

$$\omega = \frac{W}{V} \quad \omega_э = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} \quad \omega_м = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \quad \omega = \omega_э + \omega_м = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = 2\omega_э =$$

$$= 2\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon\, \mu_0 \mu}\, EH$$

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] (1)$$

где, Δ —оператор Лапласа, V –фазовая скорость

$$S = \omega V = EH (2),$$

-где, S - модуль вектора плотности потока энергии

$$p = \frac{W}{c} (3)$$

- импульс ЭМП

$$W = mc^2 (4)$$

- энергия ЭМП

Согласно СТО формула (4) имеет общее значение и справедлива для любых тел.