

Лекция 5

Проекции

Нижельский С.С.,
ст. преп. каф. СИУ

Новокузнецк, 2009

Проекции

Проекция задает способ отображения объектов на графическом устройстве

Устройства, которые создают истинно объемные изображения, пока встречаются довольно редко

Наиболее распространены устройства отображения, синтезирующие изображения на плоскости – экране дисплея или бумаге, поэтому будем рассматривать только проекции на плоскость

Мировые и экранные координаты

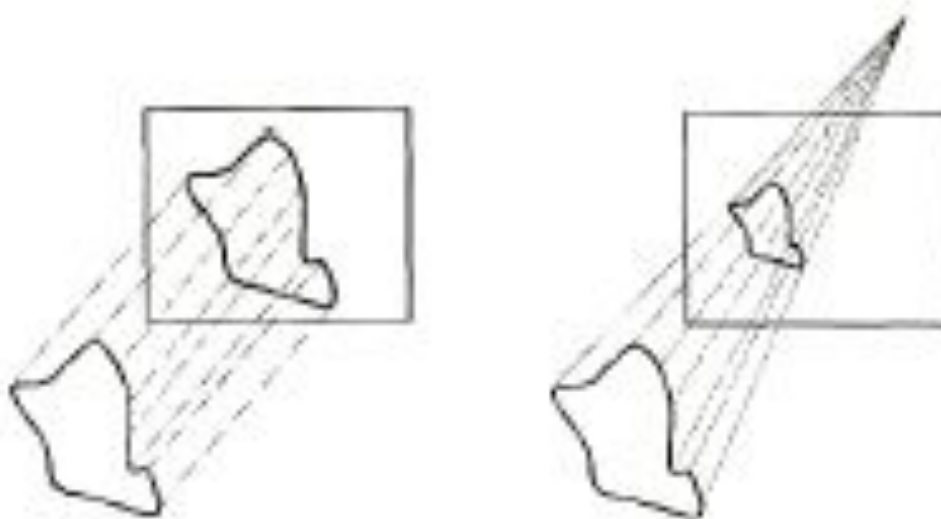
Рассмотрим две системы координат:

- мировые координаты – описывают истинное положение объектов в пространстве с заданной точностью
- экранные координаты – система координат устройства отображения, в котором осуществляется вывод изображения объектов в заданной проекции

Если мировые координаты – трехмерные прямоугольные,
а для синтеза изображения на плоскости экрана или бумаге используем двумерную систему координат,
то для получения проекции необходимо задать преобразование координат из мировых в экранные

Основные типы проекций

В компьютерной графике наиболее распространены параллельная и центральная проекции



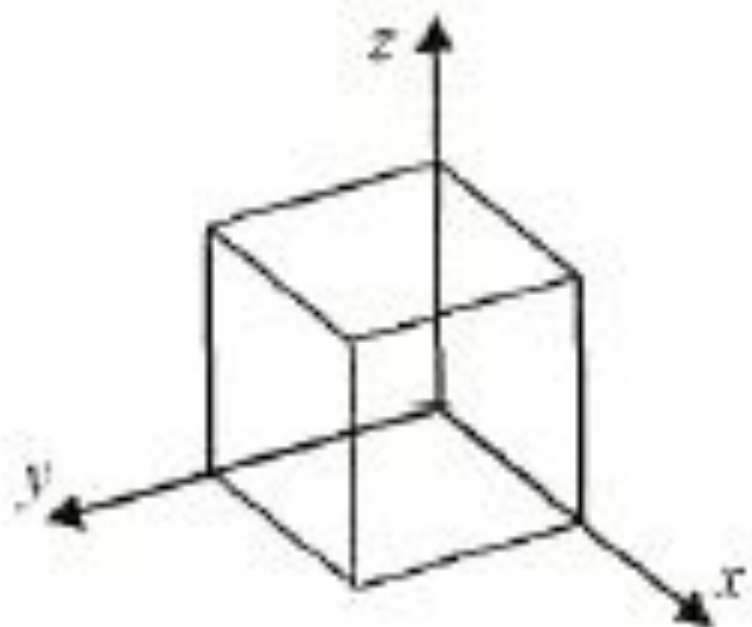
Для параллельной проекции лучи проецирования параллельные

Для центральной проекции (она также называется перспективной) лучи проецирования исходят из одной точки пространства

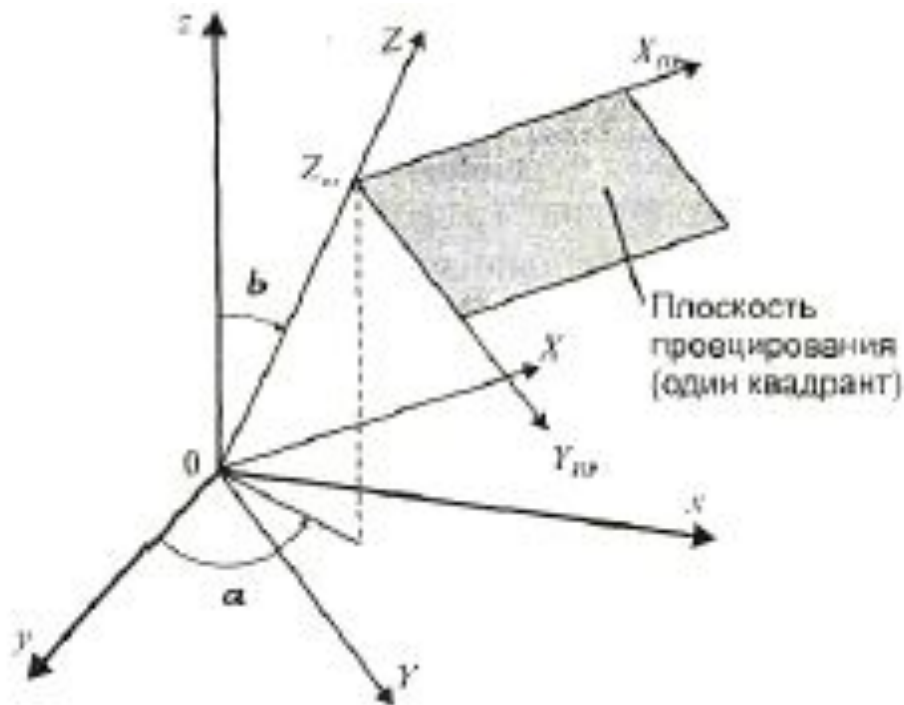
АксонOMETрическая проекция

АксонOMETрическая проекция – это разновидность параллельной проекции

Для нее все лучи проецирования располагаются под прямым углом к плоскости проецирования



Построение аксонометрической проекции



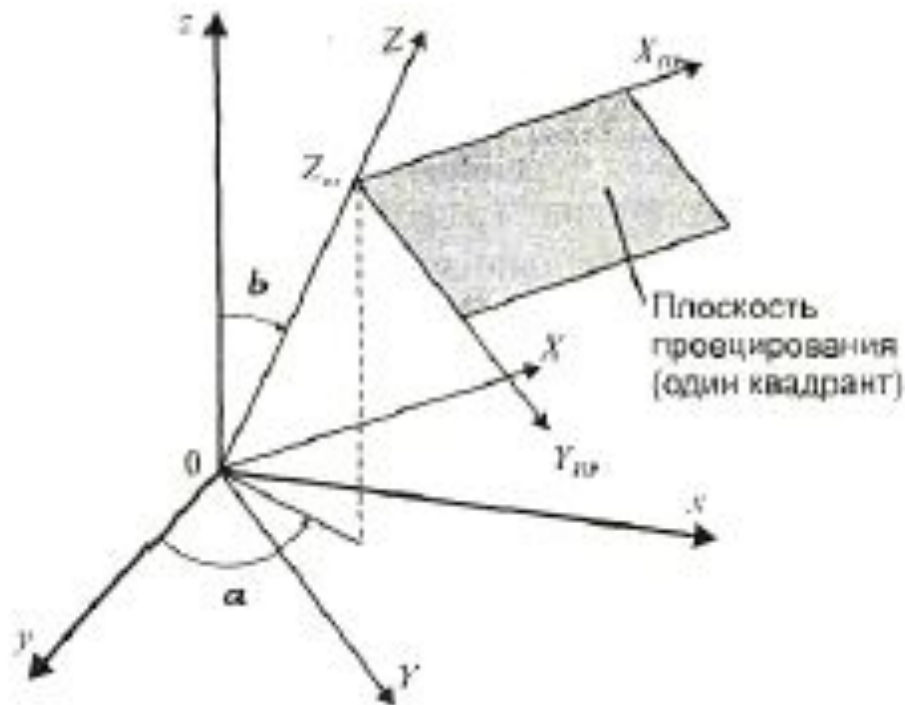
Введем новую систему координат (X, Y, Z) , повернутую относительно системы (x, y, z) на углы α и β

Расположим плоскость проецирования параллельно плоскости XOY на расстоянии $Z_{пл}$

Обозначим координаты в плоскости проецирования как $X_{пр}$ и $Y_{пр}$

Нам нужно найти соотношения (преобразование) между координатами (x, y, z) и координатами $(X_{пр}, Y_{пр})$ для любой точки в трехмерном пространстве

Построение аксонометрической проекции

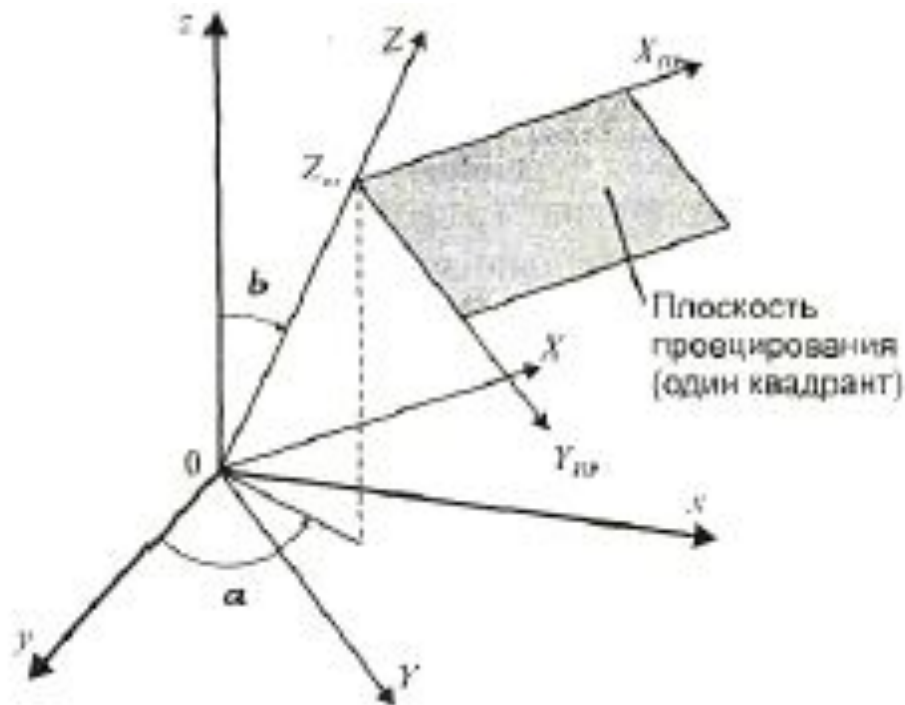


1-й шаг

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот системы координат относительно оси z на угол α - получаем систему координат (x', y', z')

Построение аксонометрической проекции

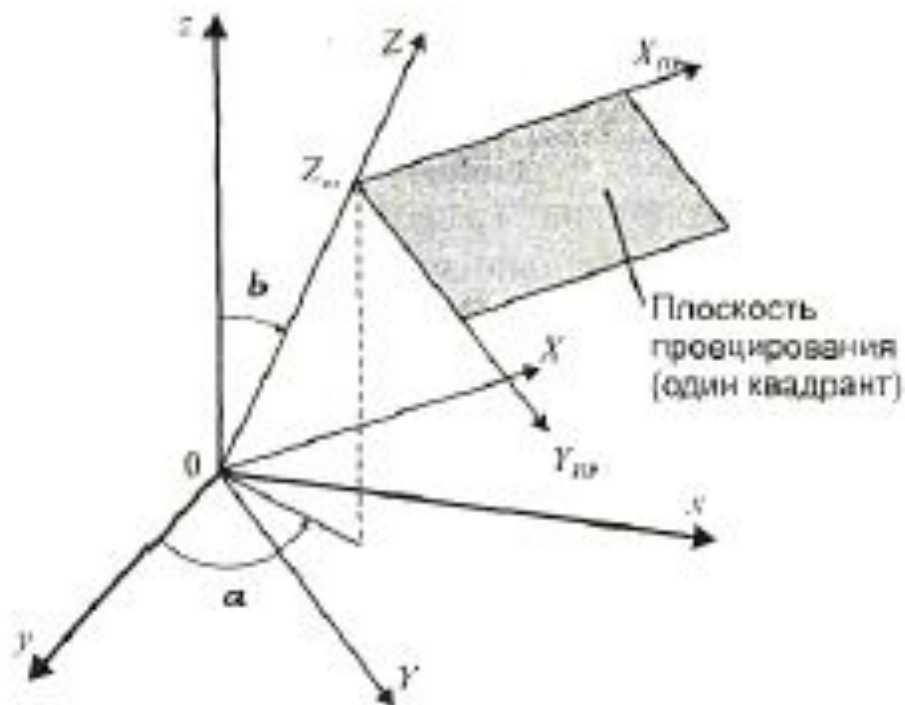


2-й шаг

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот системы координат (x', y', z') относительно оси x' на угол β – получим координаты (X, Y, Z)

Построение аксонометрической проекции



Преобразование координат выражается произведением $B \times A$:

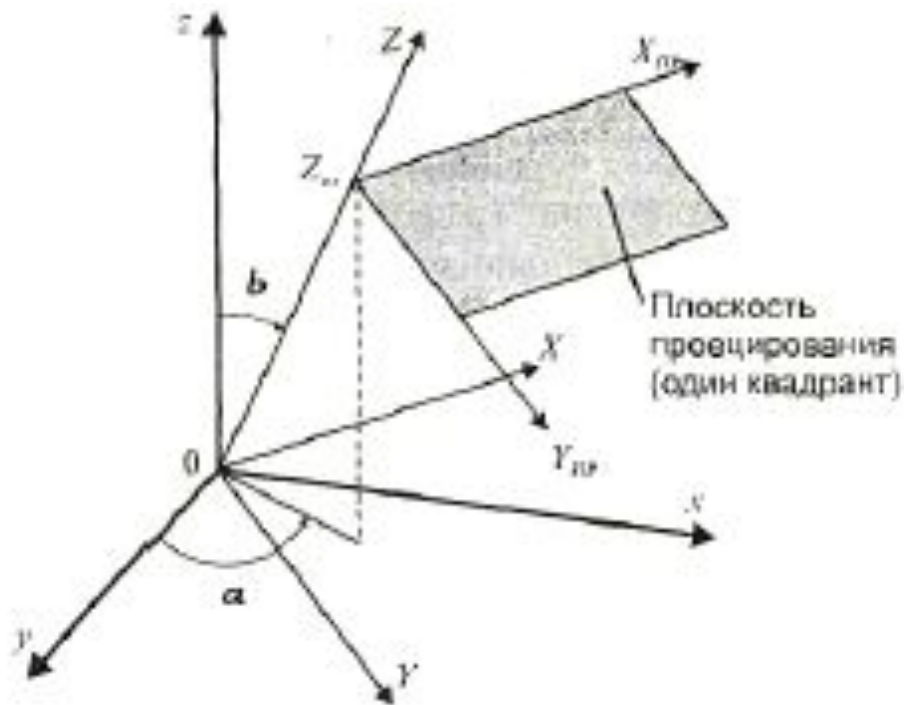
$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или в виде формул:

$$\begin{aligned} X &= x \cos\alpha - y \sin\alpha, \\ Y &= x \sin\alpha \cos\beta + y \cos\alpha \cos\beta - z \sin\beta, \\ Z &= x \sin\alpha \sin\beta + y \cos\alpha \sin\beta + z \cos\beta. \end{aligned}$$

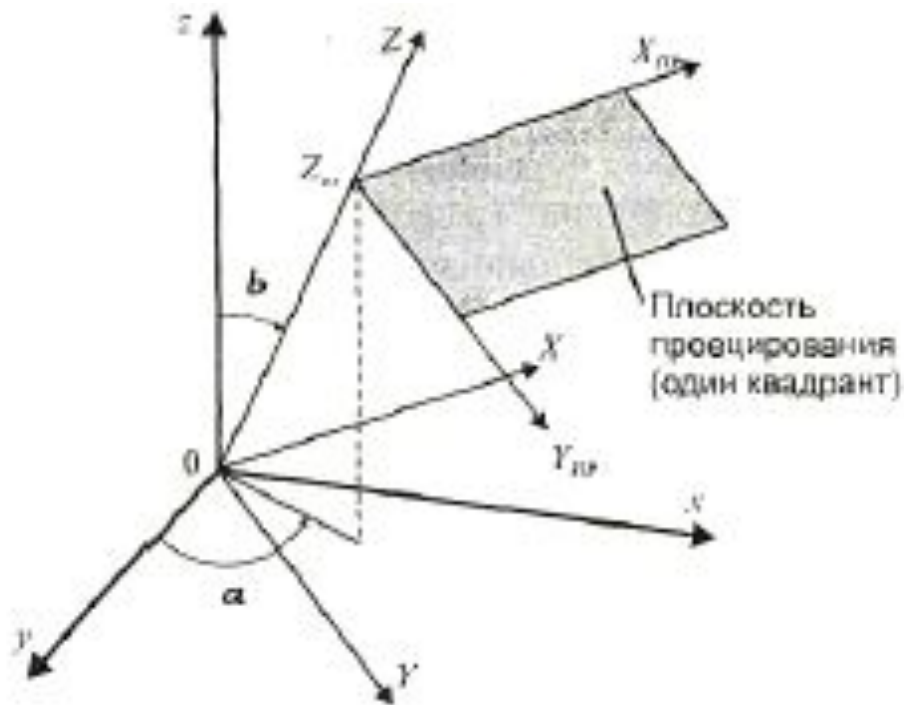
Построение аксонометрической проекции



Поскольку плоскость проецирования располагается параллельно плоскости (XOY) , а лучи проецирования перпендикулярны этой плоскости, то

$$\begin{aligned} X_{пр} &= X, \\ Y_{пр} &= Y, \\ Z_{пр} &= Z - Z_{пр}. \end{aligned}$$

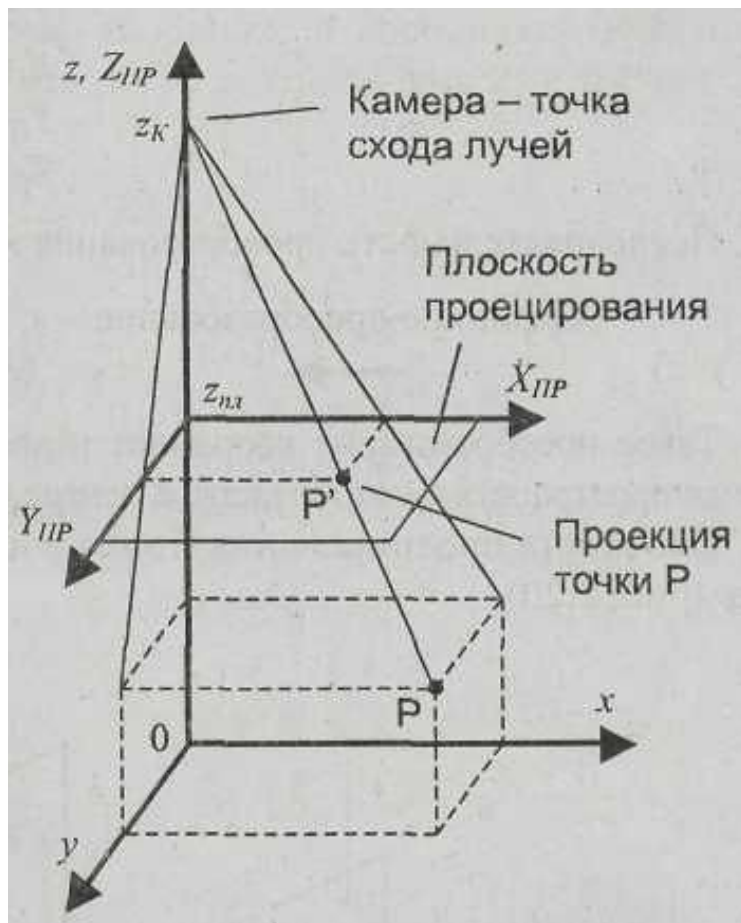
Построение аксонометрической проекции



Можно назвать систему координат (X, Y, Z) видовой системой координат – она определяет ракурс показа

Рассмотренный пример является частным случаем – центральный луч проецирования здесь направлен из центра мировых координат (x, y, z) в центр системы $(X_{пр}, Y_{пр}, Z_{пр})$. Но совсем не обязательно, чтобы центр мировых координат отображался в центре плоскости проецирования.

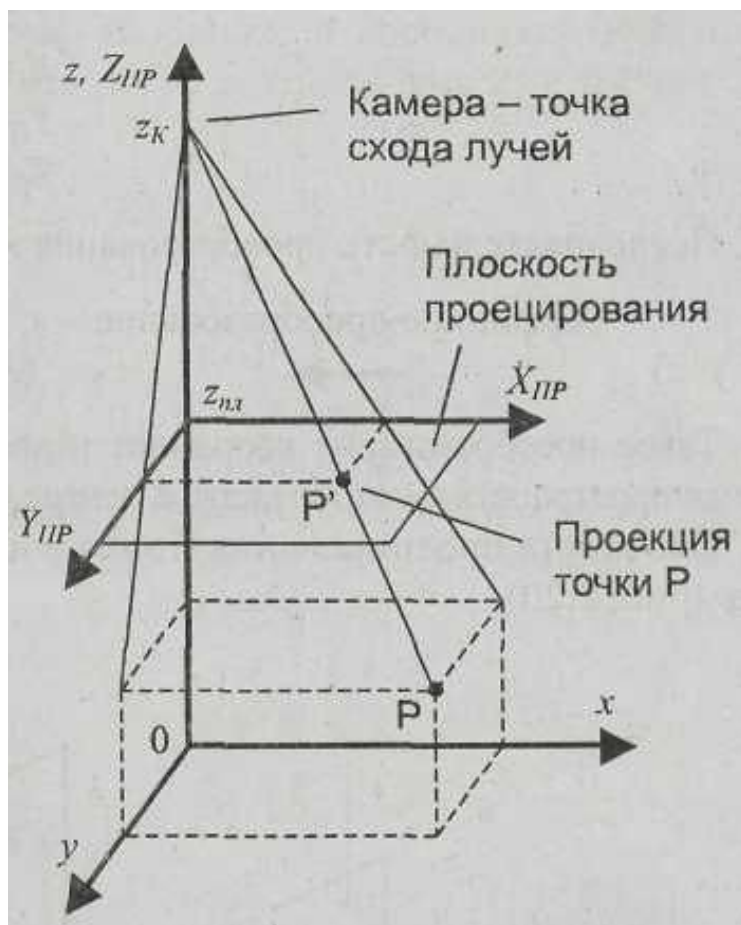
Перспективная проекция



Рассмотрим частный случай –
вертикальное расположение
камеры, при этом

$$\alpha = \beta = 0$$

Перспективная проекция



Для произвольной точки пространства P , исходя из подобия треугольников

$$\begin{cases} X_{пп} / (z_K - z_{пл}) = x / (z_K - z), \\ Y_{пп} / (z_K - z_{пл}) = y / (z_K - z). \end{cases}$$

Найдем координаты проекции, учитывая также координату $Z_{пр}$:

$$\begin{cases} X_{пп} = x (z_K - z_{пл}) / (z_K - z), \\ Y_{пп} = y (z_K - z_{пл}) / (z_K - z), \\ Z_{пп} = z - z_{пл}. \end{cases}$$

В матричной форме преобразования координат можно записать так:

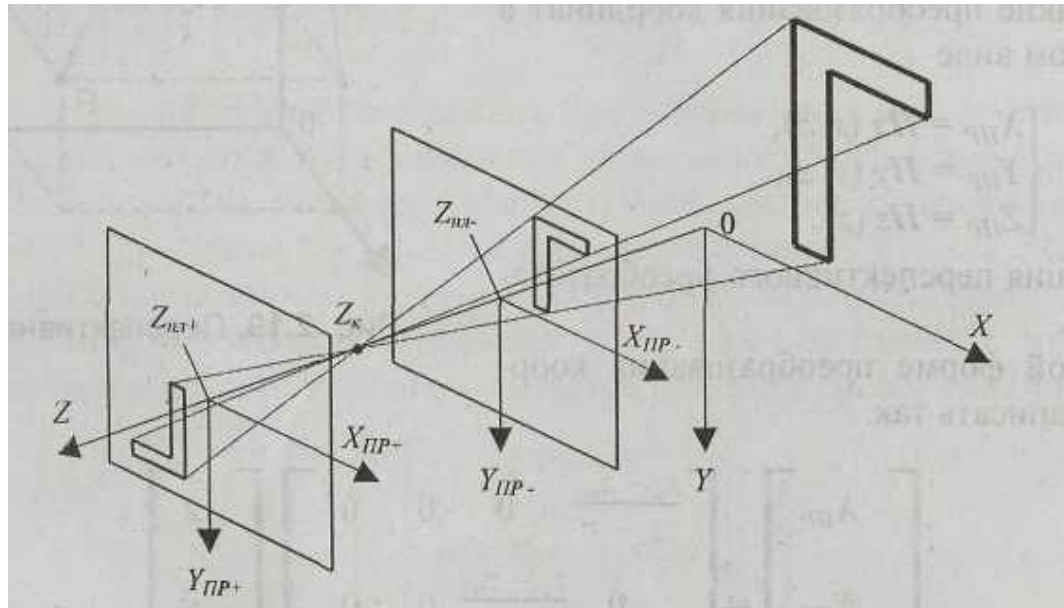
$$\begin{bmatrix} X_{пп} \\ Y_{пп} \\ Z_{пп} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_K - z_{пл}}{z_K - z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_K - z_{пл}}{z_K - z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_{пл} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Перспективная проекция

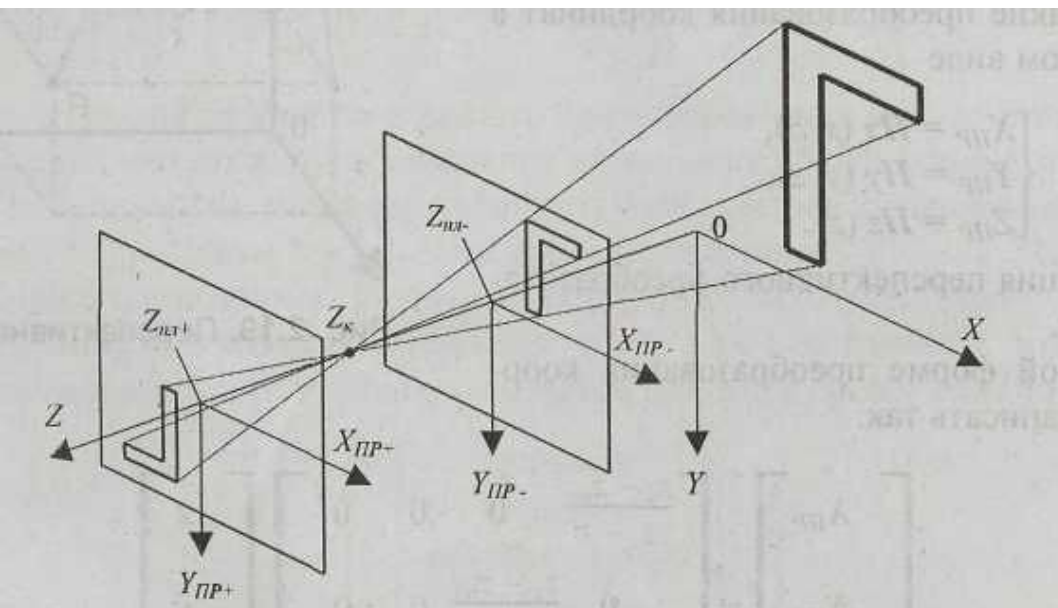
Введем видовую систему координат (X, Y, Z) , произвольно расположенную в трехмерном пространстве (x, y, z)

Пусть точка схода находится на оси Z видовой системы координат, а направление обзора – вдоль оси Z противоположно ее направлению

Плоскость проецирования может располагаться как перед точкой схода, так и позади нее



Перспективная проекция



Обозначим индексами "+" и "-" координаты соответственно для задней и передней плоскостей проецирования

$F_+ = -(Z_k - Z_{пл+})$ – расстояние по оси Z от точки схода до задней плоскости

$F_- = Z_k - Z_{пл-}$ – расстояние от точки схода до передней плоскости проецирования

Двумерные координаты проекции

для задней плоскости

и для передней плоскости

$$\begin{aligned} X_{пр+} &= X F_+ / (Z_k - Z), \\ Y_{пр+} &= Y F_+ / (Z_k - Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{пр-} &= X F_- / (Z_k - Z), \\ Y_{пр-} &= Y F_- / (Z_k - Z). \end{aligned}$$