

ВИДЫ РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

10 класс

Содержание.

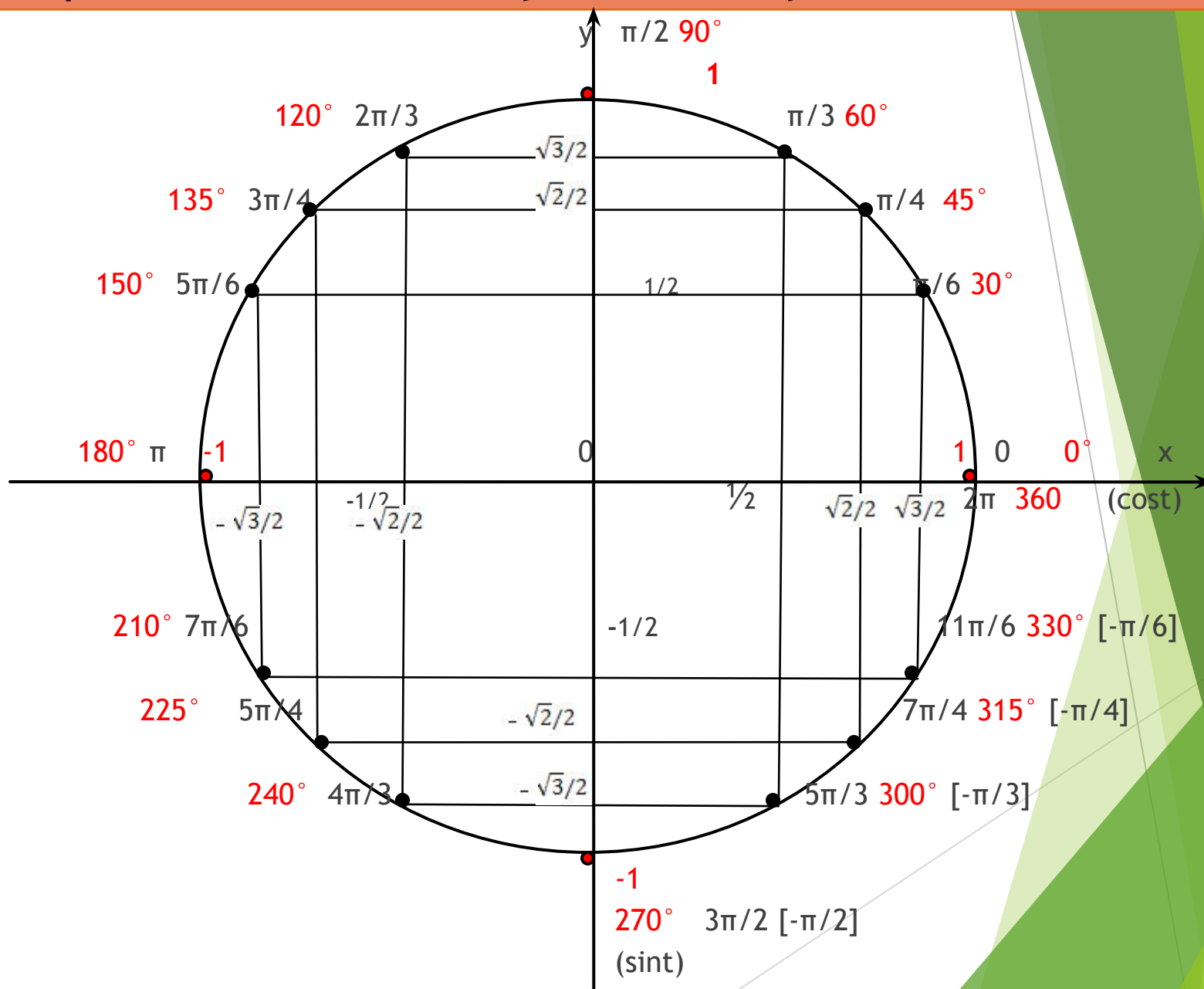
1. Вводная часть
2. Решение тригонометрических уравнений
3. Основные проблемы при решении тригонометрических уравнений

ЦЕЛЬ:

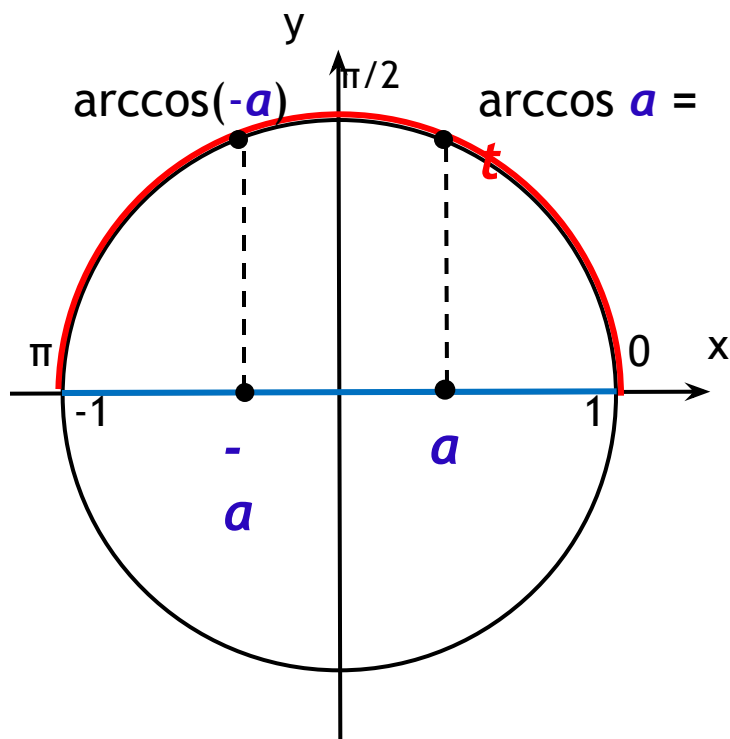
- ▶ Повторить решение тригонометрических уравнений
 - ▶ Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений
 - ▶ Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений
 - ▶ Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.
- ▶ Выделение основных проблем при решении этих уравнений:
 - ▶ Потеря корней.
 - ▶ Посторонние корни.
 - ▶ Отбор корней.



Повторение значения синуса и косинуса



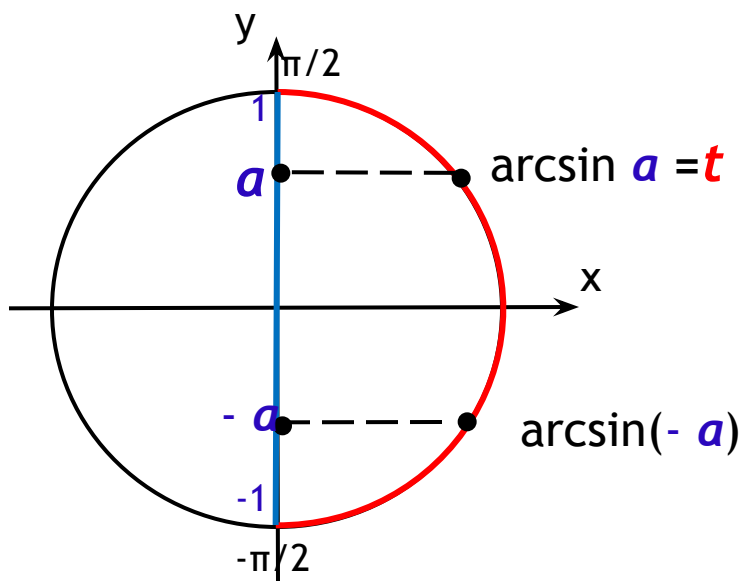
Арккосинус



Арккосинусом числа a называется такое число (угол) t из $[0; \pi]$, что $\cos t = a$.
Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

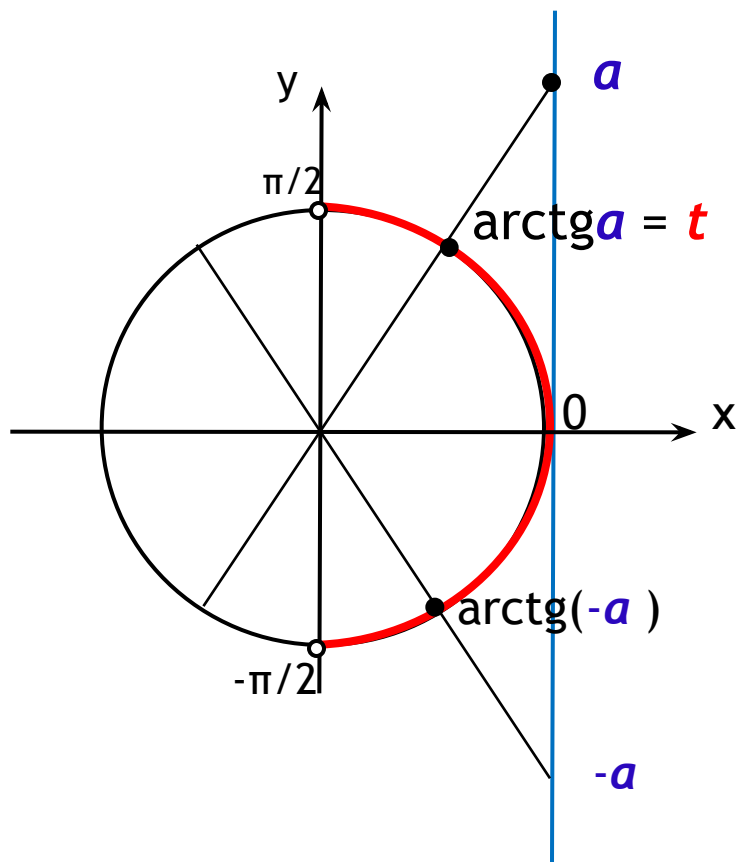
Арксинус



Арксинусом числа a называется такое число (угол) t из $[-\pi/2; \pi/2]$, что $\sin t = a$.
Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

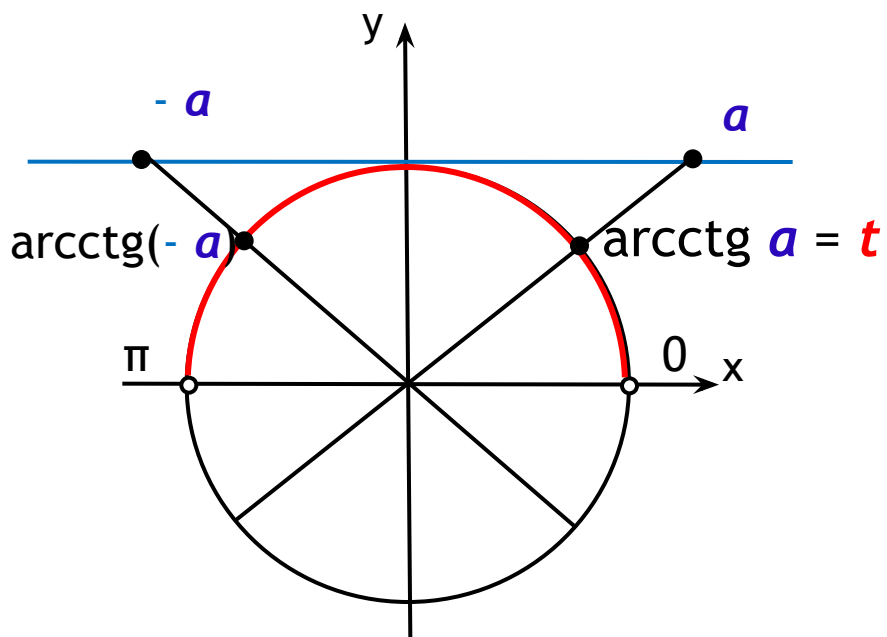
Арктангенс



Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(-\pi/2; \pi/2)$, что $tg\ t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

$$\arctg(-a) = -\arctg a$$

Арккотангенс



Арккотангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(0; \pi)$, что $\text{ctg } t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg } a$$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$1. \cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$1) \quad \underline{\cos t = 0} \\ t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \underline{\cos t = 1} \\ t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \quad \underline{\cos t = -1} \\ t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

2. $\sin t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\sin t = 0$
 $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin t = 1$
 $t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin t = -1$
 $t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$3. \operatorname{tg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{ctg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

При каких значениях x имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(2x+1)$

$$\begin{aligned} 1) \quad & -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ & -2 \leq 2x \leq 0 \\ & -1 \leq x \leq 0 \\ \text{Ответ: } & [-1; 0] \end{aligned}$$

2. $\arccos(5-2x)$

$$\begin{aligned} 2) \quad & -1 \leq 5-2x \leq 1 \\ & -6 \leq -2x \leq -4 \\ & 2 \leq x \leq 3 \\ \text{Ответ: } & [2; 3] \end{aligned}$$

3. $\arccos(x^2-1)$

$$\begin{aligned} & -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ & 0 \leq x^2 \leq 2 \\ \text{Ответ: } & \end{aligned}$$

$$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$$\begin{aligned} & -1 \leq 4x^2-3x \leq 1 \\ & 1x^2-3x \geq -1 \\ & 1x^2-3x \leq 1 \\ & 4x^2-3x-1 \leq 0 \\ \text{Ответ: } & \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$$

Примеры:

$$1) \cos t = -\frac{1}{2};$$

$$t = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \operatorname{tg} t = 1;$$

$$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin t = 0;$$

Частный случай:
 $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$4) \operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$$

$$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Решение простейших уравнений

1) $\text{tg} 2x = -1$

$$2x = \text{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos(x + \pi/3) = 1/2$

$$x + \pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \pi/3 = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам приведения

$$\sin(x/3) = 0$$

частный случай

$$x/3 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Виды тригонометрических уравнений

1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

Первой степени:

Решаются делением на $\cos x$ (или $\sin x$) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

3.Уравнение вида

$$A \sin x + B \cos x = C. \quad A, B, C \neq 0$$

Виды тригонометрических уравнений

2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$

П р и м е р . Решить уравнение: $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

Р е ш е н и е . $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ отсюда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



Виды тригонометрических уравнений

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки $A \sin x + B \cos x = C$

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \begin{array}{l} x \neq \pi + 2\pi n; \\ \text{Проверка} \\ \text{обязательна!} \end{array}$$

Понижение степени.

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= (1 + \cos 2x) : 2 \\ \sin^2 x &= (1 - \cos 2x) : 2 \end{aligned}$$

Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$ заменим на $C \sin(x + \phi)$, где

$$C = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\sin \phi = \frac{a}{C}; \quad \cos \phi = \frac{b}{C}; \quad \phi - \text{вспомогательный аргумент.}$$



Правил а.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.



Потеря корней, лишние корни.

1. Потеря корней:

- делим на $g(x)$.
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на $g(x)$ (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.



Спасибо