



ВИЩА МАТЕМАТИКА

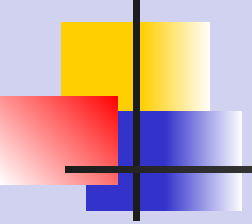
для студентів ОС "Бакалавр"

ОПП: **122 "Комп'ютерні науки"**

Автор:

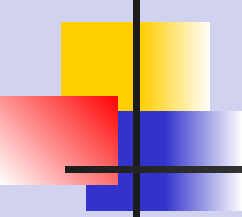
Доцент кафедри комп'ютерних наук, к.е.н.

Сирмамійх Ірина Вікторівна



Диференційне числення функції однієї змінної

- **Тема 1.** Поняття похідної функції, її геометричний та механічний зміст. Основні правила і формули диференціювання. Похідна складеної функції.
- **Тема 2.** Неявно задана функція та її похідна. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневих функцій. Похідна функції, заданої параметрично.
- **Тема 3.** Диференціал функції. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.



Диференційне числення функції однієї змінної

- **Тема 4.** Похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків.
- **Тема 5.** Застосування диференціального числення до знаходження границі функції. Правила Лопіталя.
- **Тема 6.** Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://library.tneu.edu.ua/files/EVD/matematica/VM_pidr.pdf. - Назва з екрану.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.
3. Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу "Вища математика": Частина І. – Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2015. – 96 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3472/1/Methodychka_VM_Phys.pdf

Тема1: Поняття похідної функції. Основні правила та формули диференціювання.

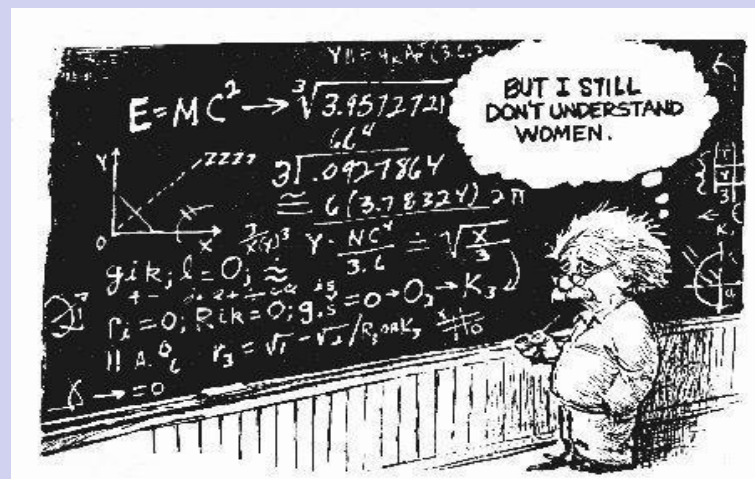
Похідна складеної функції

- 1. Означення похідної
- 2. Геометричний зміст похідної
- 3. Механічний зміст похідної
- 4. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції
- 5. Основні правила диференціювання
- 6. Похідні від основних елементарних функцій.
- 7. Похідна складеної функції

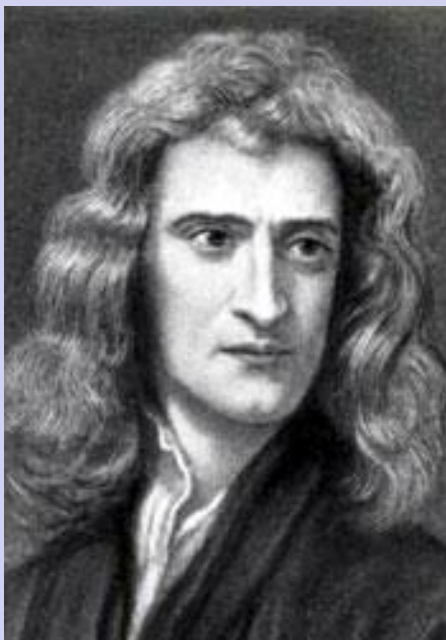
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Поняття похідної є одним з основних понять математичного аналізу.

Розділ математики, в якому вивчається поняття похідної та її застосування до дослідження функцій, називають **диференціальним численням**.



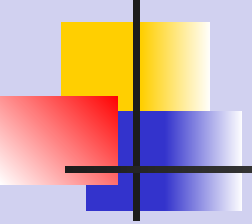
ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ



І. НЬЮТОН



Г. Лейбніц



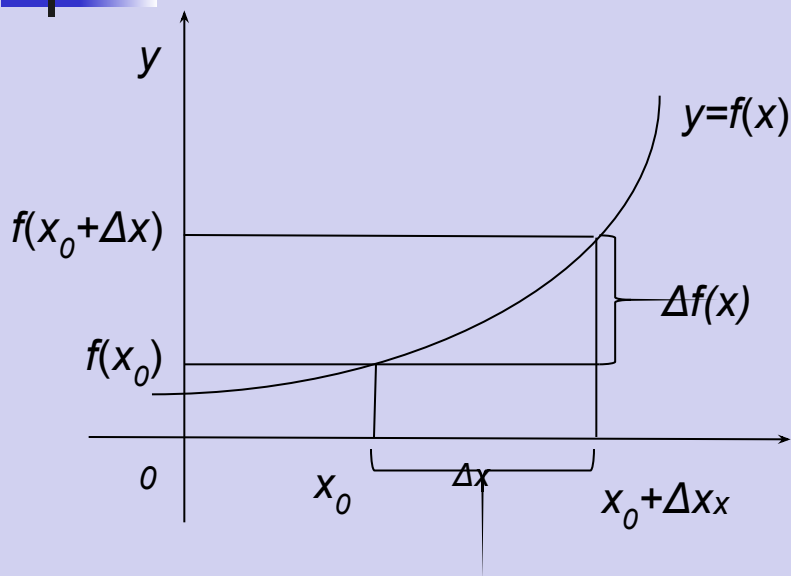
ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВЕЛИ ДО ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

ЗАДАЧІ

про миттєву
швидкість

про дотичну
до кривої

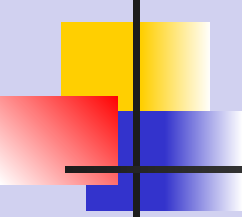
Означення похідної



Похідною від функції $y=f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

Графічне зображення приросту функції і приросту аргументу.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$



Означення похідної (аналітичний вигляд)

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ПОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

$$y', y'_x, f'(x),$$

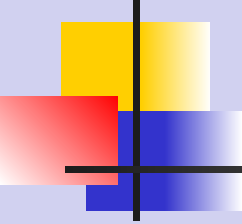
позначення

Лагранжа

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

позначення

Лейбніца

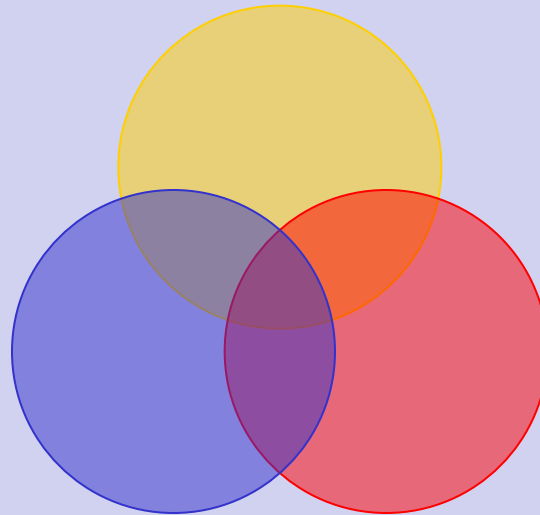


ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

**ГЕОМЕТРИ
ЧНИЙ**

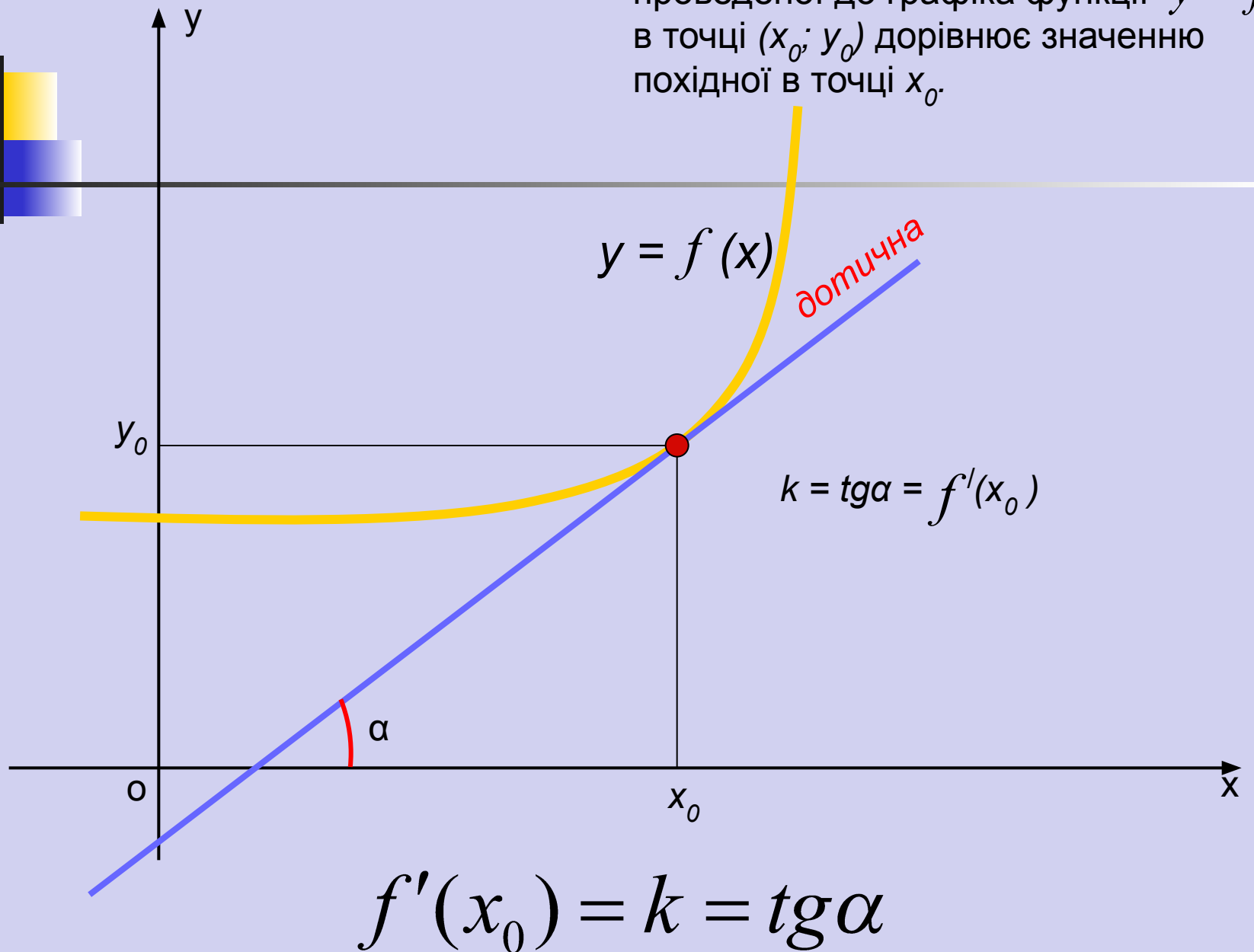
**МЕХАНІЧН
ИЙ**

**ЕЛЕКТРИЧ
НИЙ**



Геометричний зміст похідної:

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці x_0 .



Рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$

Дотичною до кривої в точці M називається граничне положення січної, якщо точки січної необмежено наближається вздовж кривої до точки M

Нормаллю до кривої (або поверхні) в заданій точці M називається пряма (або площина), яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної прямої (або площини) в цій точці кривої (поверхні).

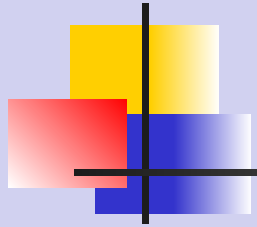
Рівняння дотичної в точці $M(x_0; y_0)$ запишеться у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі в цій точці буде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механічний зміст похідної функції



Нехай функція $y = f(x) = S(t)$

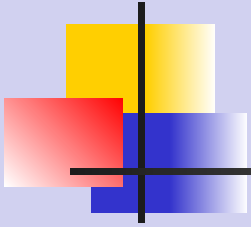
описує деякий фізичний процес:

x_0 – координата точки

$v(t_0)$ – швидкість точки в момент
часу t_0

$a(t_0)$ – прискорення точки в момент
часу t_0

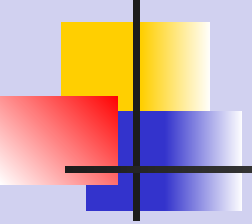
Механічний зміст похідної функції



$$S'(t_0) = v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad - \quad \text{МИТТЄВА ШВИДКІСТЬ}$$

$$S''(t_0) = v'(t_0) = a(t_0) \quad - \quad \text{ПРИСКОРЕННЯ}$$

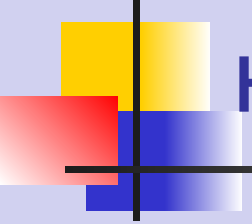
- **Миттєва швидкість** прямолінійного руху дорівнює похідній шляху за часом руху
- Похідна від швидкості по часу (або друга похідна від шляху) є **прискоренням**



ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

- Нехай $Q = Q(t)$ - кількість електрики, яка пройшла через поперечний переріз провідника за час t . Сила струму $i(t)$ в момент часу t є похідна від кількості електрики $Q(t)$ по часу t , тобто

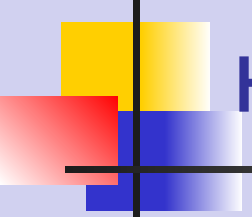
$$i(t) = Q'(t)$$



Зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.



Зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції.

Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює теорема.

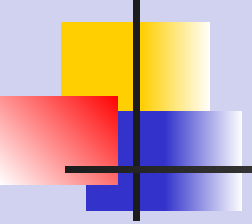
Теорема. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Висновок: необхідною умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці $x \in \mathbb{R}$ її неперервність у цій точці.

Правила диференціювання



Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

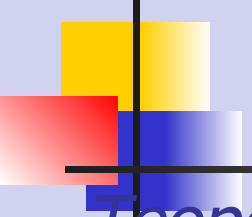
Теорема 2. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const.}$$

Теорема 3. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Правила диференціювання



Теорема 4. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Теорема 5. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Похідні від основних елементарних функцій

Похідна степеневої функції:

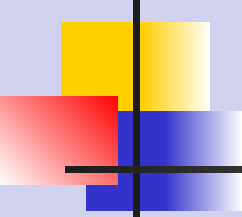


$$y = x^n$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



Похідні від основних елементарних функцій:

Похідна показникової функції

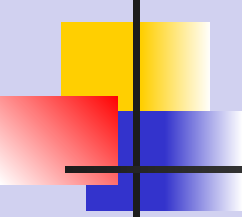
$$y = a^x$$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$





Похідні від основних елементарних функцій:

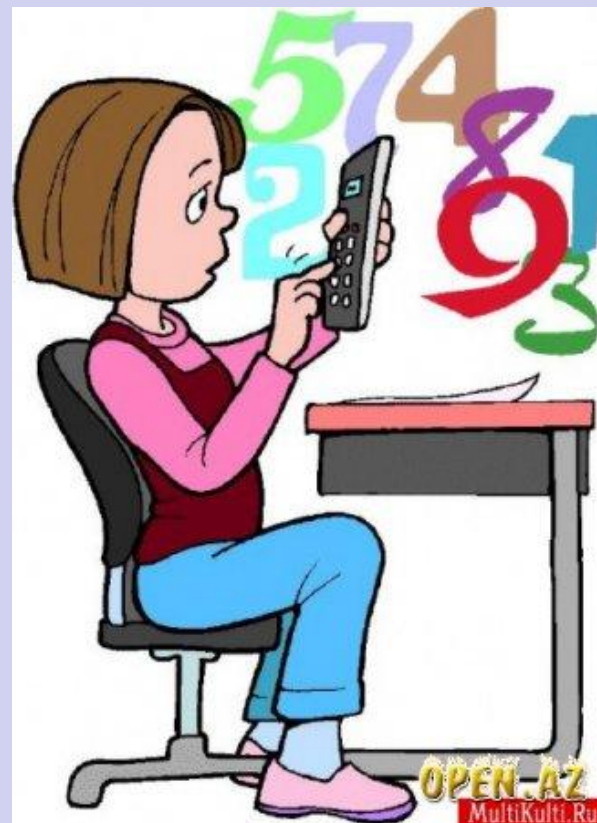
Похідна логарифмічних функцій

$$y = \log_a x$$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$



Похідні від основних елементарних функцій

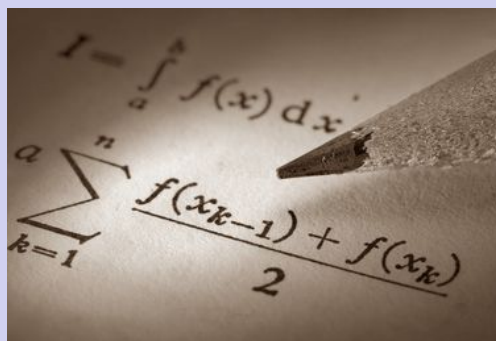
Похідна тригонометричних функцій

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Похідні від основних елементарних функцій:

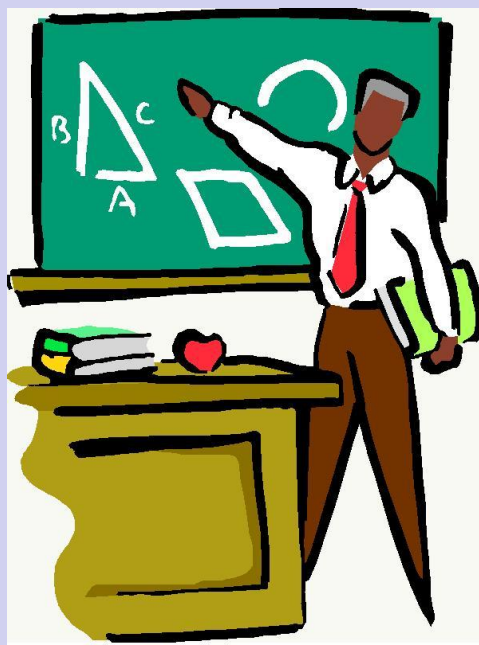
Похідні від обернених тригонометричних функцій

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

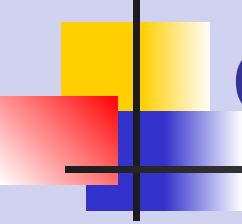


$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$



Приклади визначення похідної функції

№1

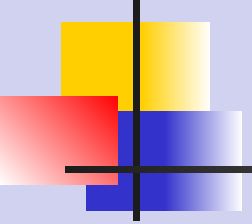
$$(y)' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$$

№2

$$(y)' = (\sqrt{x} \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$$

№3

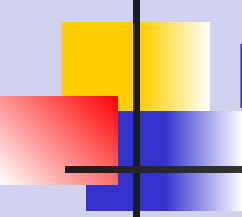
$$(y)' = \left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{(x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{1 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$



Похідна складеної функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.



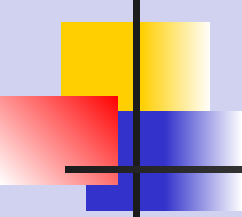
Приклади знаходження похідних складених функцій

№1

$$(\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot (4x)' = -4 \sin 4x$$

№2

$$(\cos^3 4x)' = 3 \cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = -12 \cos^2 4x \cdot \sin 4x$$



Контрольні запитання

1. Означення похідної.
2. Алгоритм знаходження похідної за означенням.
3. Механічний зміст похідної.
4. Геометричний зміст похідної.
5. Електричний зміст похідної.
6. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції.
7. Похідна суми.
8. Похідна добутку.
9. Похідна частки.
10. Похідна складеної функції.
11. Похідна функції $y = e^x$.
12. Похідна функції $y = a^x$.
13. Похідна логарифмічної функції.
14. Похідна степеневої функції.
15. Похідні тригонометричних функцій.
16. Похідні обернених тригонометричних функцій.