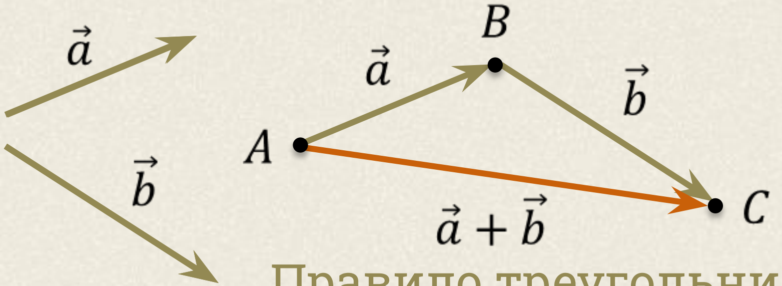
Векторы на плоскости

Действия над векторами

Сумма векторов

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
2. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$
3. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



Правило треугольника

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

Доказать: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

Доказательство:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \iff \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow AB \parallel A_1B_1;$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}| \Rightarrow AB = A_1B_1;$

ABB_1A_1 – параллелограмм $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} \iff \overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B_1C_1} \Rightarrow BC \parallel B_1C_1;$

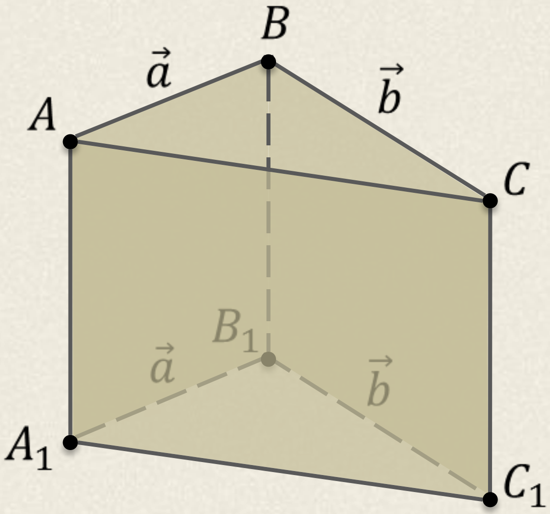
$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{B_1C_1}| \Rightarrow BC = B_1C_1;$

BCC_1B_1 – параллелограмм $\Rightarrow \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

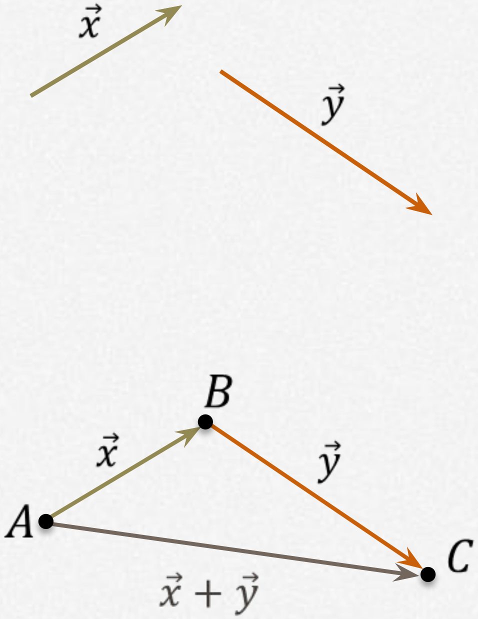
$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1} \iff \overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC_1} \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1;$

$|\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{CC_1}| \Rightarrow AA_1 = CC_1;$

AA_1C_1C – параллелограмм $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$.



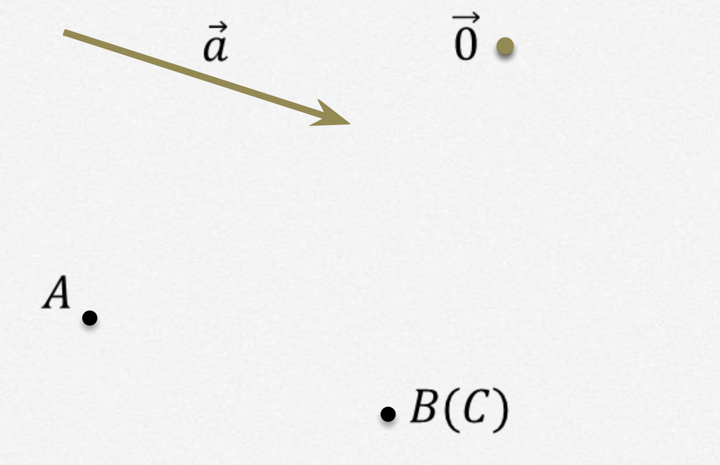
Изобразить вектор суммы векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.



Сумма векторов

Складывая по правилу треугольника произвольный вектор $\vec{a}$ с нулевым вектором, получим, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство:

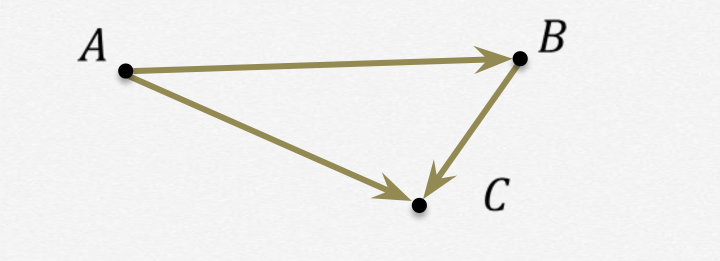
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$



Правило треугольника

Если A, B и C — произвольные точки, то сумма векторов

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Стороны AB, BC и AC ΔABC соответственно равны 5, 4 и 8 см. Найти длины векторов, задающих суммы векторов: AB и BC, BC и CA, CA и AB.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

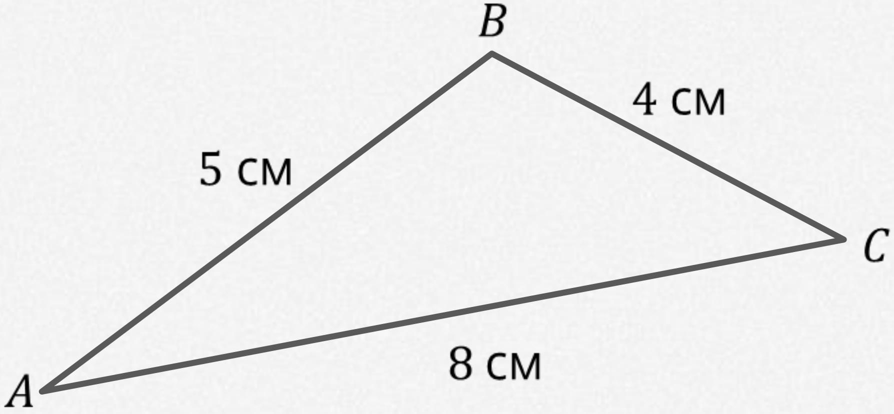
$|\overrightarrow{AC}| = AC = 8$ (см)

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

$|\overrightarrow{BA}| = BA = 5$ (см)

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$|\overrightarrow{CB}| = CB = 4$ (см)



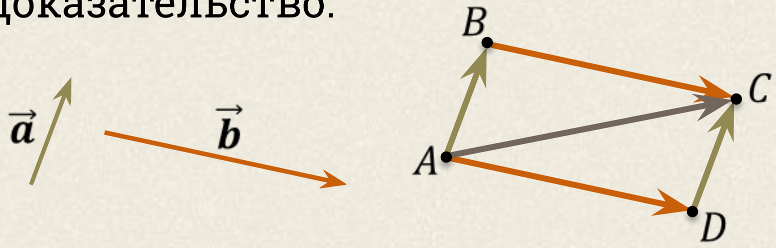
Ответ: 8 см, 5 см, 4 см.

Законы сложения векторов

Переместительный закон

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}}$$

Доказательство:



1. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

   $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

2. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

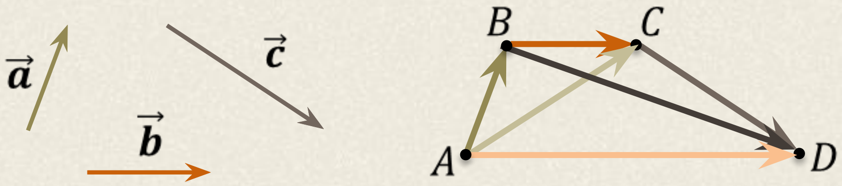
   $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{a}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Сочетательный закон

$$\boxed{(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}$$

Доказательство:



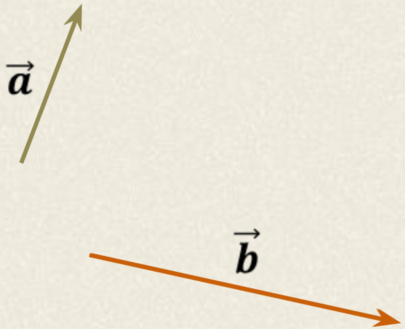
1. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}^{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

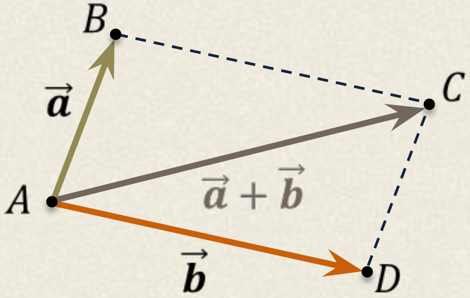
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overbrace{(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})}^{\overrightarrow{BD}}=\overrightarrow{AD}$

$$\Longrightarrow \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

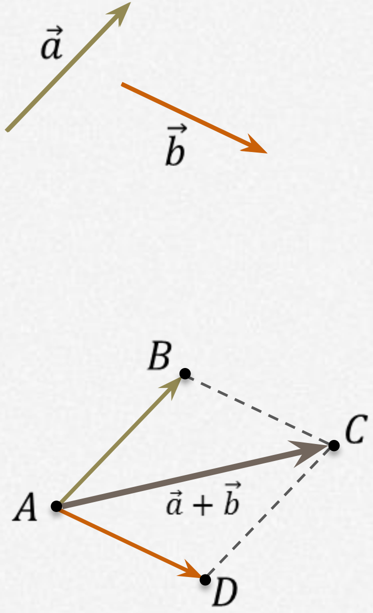
Правило параллелограмма

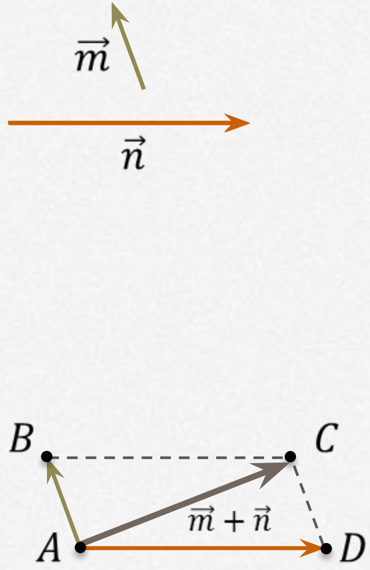
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложить от одной точки и построить на них параллелограмм, то диагональ этого параллелограмма задаёт вектор суммы векторов $\vec{a}+\vec{b}$.

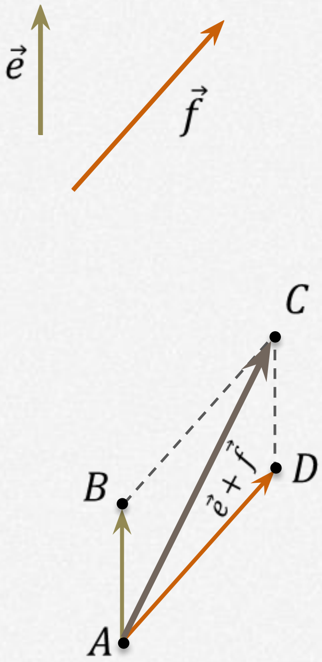




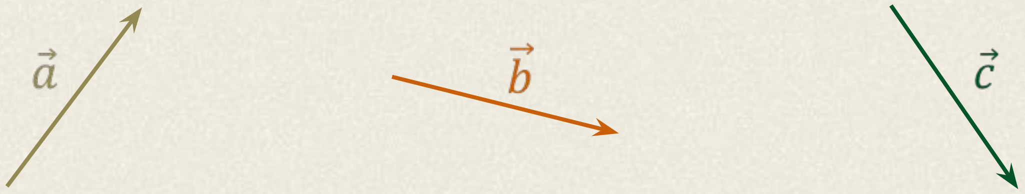
Изобразить вектор суммы для каждой пары векторов, пользуясь правилом параллелограмма:





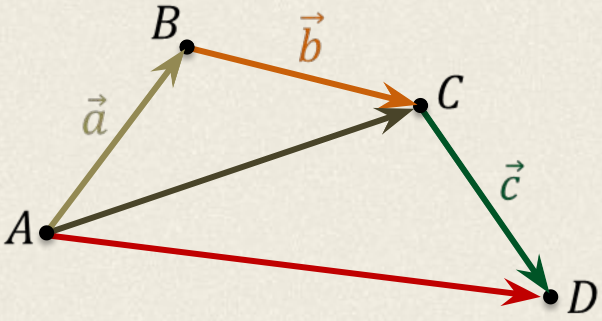


Сложение нескольких векторов

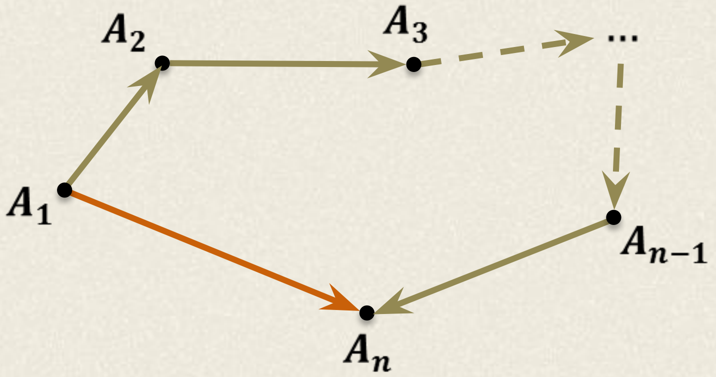


1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
2. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$
3. $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$
4. $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

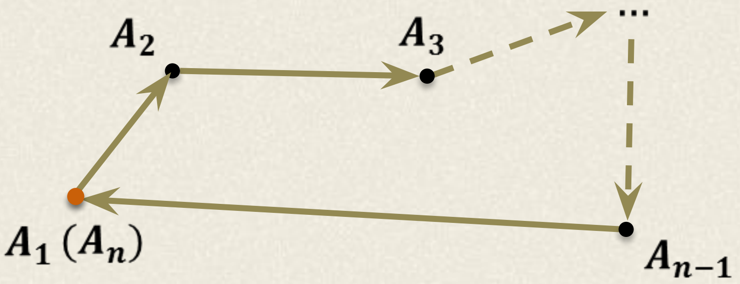
Правило многоугольника



Правило многоугольника



$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$



$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{0}$$

$ABCD$ – равнобокая трапеция.
BC и AD – её основания, боковая сторона равна 7 см.
Построить вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ и найти его длину.

Построение:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = 7 \text{ (см)}$$

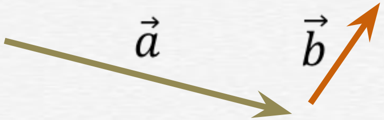
Ответ: 7 см.

Вычитание векторов

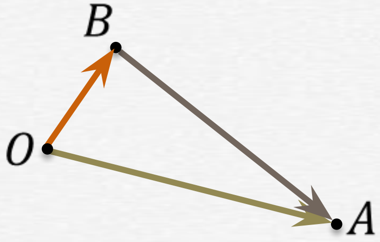
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}}$$

По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.



Построение:



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

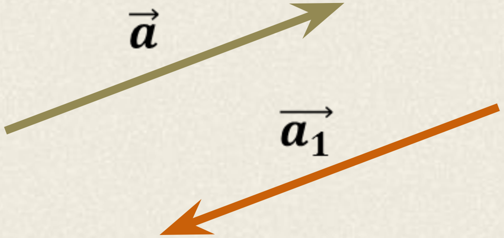
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

$\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BA} + \vec{b} = \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$

Вектор, противоположный данному

Для произвольного ненулевого вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{a_1}$ будет противоположным, если:

1. $|\vec{a}| = |\vec{a_1}|$
2. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a_1}$



$\vec{0}$ $\vec{0}$

$-\vec{a}$ «минус *a*»

вектор, противоположный вектору $\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}}$$

Теорема о разности двух векторов

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Доказательство:

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Что и требовалось доказать.

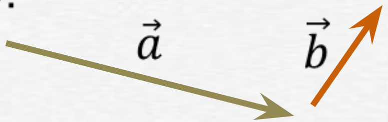
Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}}$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)}$$

По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.



Построение:

1 способ

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

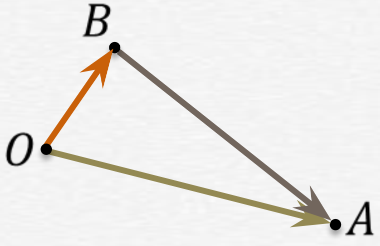
$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

$\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{BA} + \vec{b} = \vec{a}$

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$



2 способ

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

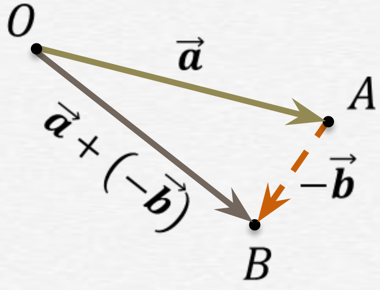
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \overrightarrow{OB}$

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OB}$

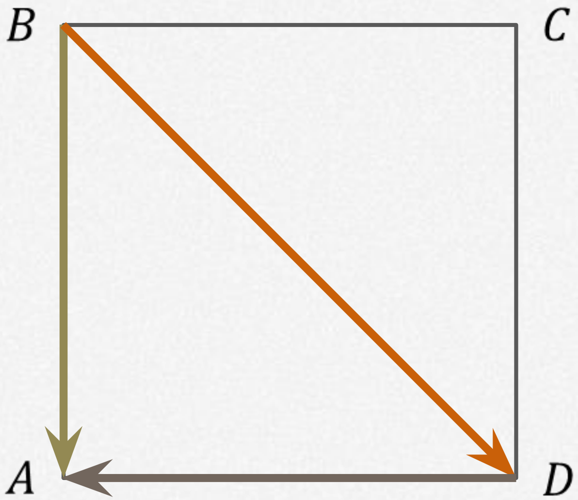


Сторона квадрата $ABCD$ равна a.
Найти длину вектора $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}|$.

Построение:

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA}$

$|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DA}| = DA = a$



Ответ: a.

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$

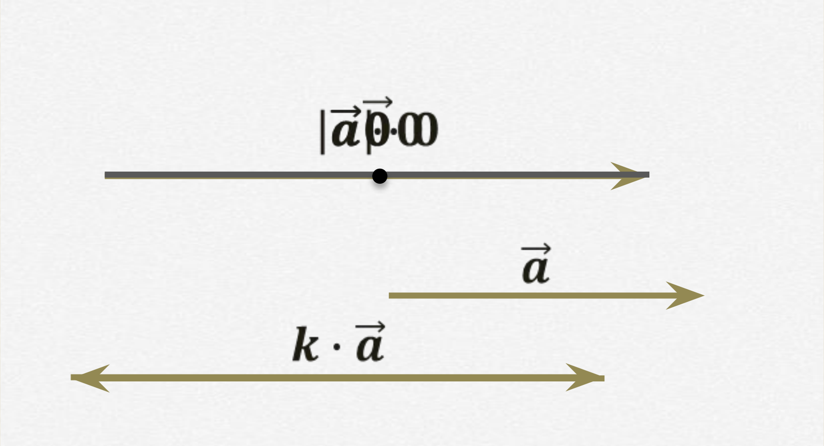
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$

$$\boxed{k \cdot \vec{a} = \vec{b}}$$

Следствия:

1. $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$

2. $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ – коллинеарны



По данному вектору $\vec{x}$ построить векторы: $3\vec{x}$, $-1{,}5\vec{x}$, $\frac{2}{3}\vec{x}$, $-\frac{1}{2}\vec{x}$.

$\mathbf{3\vec{x}}$

$|3\vec{x}| = 3 \cdot |\vec{x}|$

$k = 3 \geq 0 \implies 3\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{x}$

$\mathbf{-1,5\vec{x}}$

$|-1{,}5\vec{x}| = 1{,}5 \cdot |\vec{x}|$

$k = -1{,}5 < 0 \implies -1{,}5\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}$

$\mathbf{\frac{2}{3}\vec{x}}$

$\left|\frac{2}{3}\vec{x}\right| = \frac{2}{3} \cdot |\vec{x}|$

$k = \frac{2}{3} \geq 0 \implies \frac{2}{3}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{x}$

$\mathbf{-\frac{1}{2}\vec{x}}$

$\left|-\frac{1}{2}\vec{x}\right| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{x}|$

$k = -\frac{1}{2} < 0 \implies -\frac{1}{2}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}$

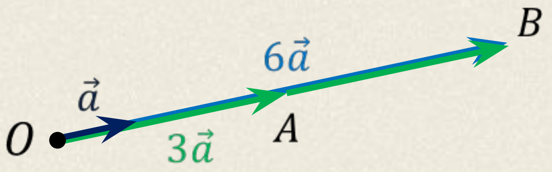
Свойства произведения вектора на число

1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$

сочетательный закон

$k = 2,\ l = 3:$

$6\vec{a} = 2(3\vec{a})$

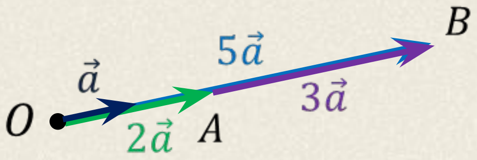


2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

1-ый распределительный закон

$k = 2,\ l = 3:$

$5\vec{a} = 2\vec{a} + 3\vec{a}$



3. $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$

2-ой распределительный закон

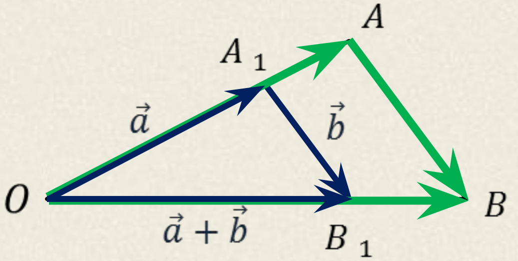
$\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$

$\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$

$\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = k(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{OB} = k\vec{a} + k\vec{b}$



Преобразовать выражения с векторами.

а) $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}=2\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{a}=2\vec{a}+2\vec{b}+(-2\vec{a})=2\vec{b}$

б) $\frac{1}{2}(\vec{x}+2\vec{y})+\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})=\frac{1}{2}(\vec{x}+2\vec{y}+\vec{x}-\vec{y})=\frac{1}{2}(2\vec{x}+\vec{y})=\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$

в) $3(\vec{k}+\vec{l}+\vec{m})-3\vec{k}-2\vec{m}=3\vec{k}+3\vec{l}+3\vec{m}-3\vec{k}-2\vec{m}=3\vec{l}+\vec{m}$

$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$

$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

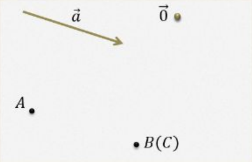
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Действия над векторами

Сумма векторов

Складывая по правилу треугольника произвольный вектор $\vec{a}$ с нулевым вектором, получим, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо следующее равенство:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$



Правило треугольника

Если A, B и C — произвольные точки, то сумма векторов

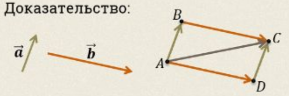
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Законы сложения векторов

Переместительный закон

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$

Доказательство:



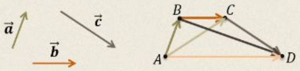
1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$
   $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Сочетательный закон

$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$

Доказательство:



1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})}^{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overbrace{(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})}^{\overrightarrow{BD}} = \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}}$$

По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

Построение:

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$
$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$
$\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BA} + \vec{b} = \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$ $\qquad$ $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$

$$\boxed{k \cdot \vec{a} = \vec{b}}$$

Следствия:

1. $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$
2. $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ — коллинеарны