

Системы счисления

Цифры – это символы, участвующие в записи числа и составляющие некоторый алфавит.

Число – это некоторая величина.

Система счисления – это определенный способ изображения чисел и соответствующие ему правила действия над числами.

Системы счисления можно разделить на непозиционные и позиционные.

Непозиционная система счисления

Непозиционными системами счисления называются такие системы счисления, в которых от положения знака в числе не зависит величина, которую он обозначает.

Римская система записи чисел

I V X L C D M

1 5 10 50 100 500 1000

Например, число **ССХХХII** складывается из двух сотен, трех десятков и двух единиц и равно **232**.

Римская система записи чисел

В римских числах цифры записываются слева направо в порядке убывания. В таком случае их значения складываются. Если слева записана меньшая цифра, а справа – большая, то их значения вычитаются.

Например,

$$VI = 5 + 1 = 6, IV = 5 - 1 = 4.$$

$$MCMXCVII = 1000 + (- 100 + 1000) + (- 10 + +100) + 5 + 1 + 1 = 1997$$

Позиционные системы счисления

Позиционными системами счисления называются такие системы счисления, в которых величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Количество используемых цифр называется **основанием** позиционной системы счисления.

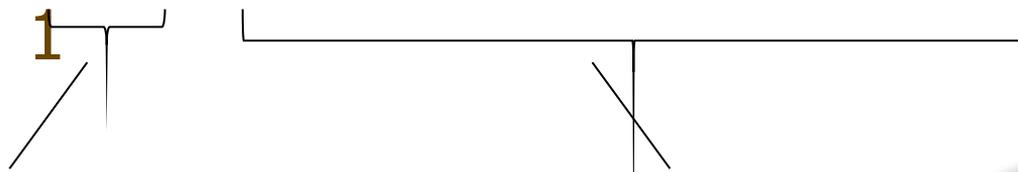
За основание позиционной системы счисления можно принять любое натуральное число большее 1.

Система счисления, применяемая в современной математике, является **позиционной десятичной системой**. Ее основание равно десяти, так как запись любых чисел производится с помощью десяти цифр:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например, в числе **725** семерка обозначает семь сотен, двойка – два десятка, пятерка – пять единиц. Каждая цифра в зависимости от позиции в записи числа обозначает разные величины.

$$\mathbf{725} = \mathbf{7} \cdot 100 + \mathbf{2} \cdot 10 + \mathbf{5} \cdot$$



Свернутая форма
записи числа

Развернутая форма
записи числа

Всякое десятичное число можно представить как сумму произведений составляющих его цифр на соответствующие степени десятки. То же самое относится и к десятичным дробям.

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10 \quad 10^{-1} = 0,1$$

$$10^2 = 100 \quad 10^{-2} = 0,01$$

$$10^3 = 1000 \quad 10^{-3} = 0,001 \text{ и т.д.}$$

Например,

$$26,387 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}.$$

Задание 1

Записать числа в развернутой форме:

3864

34,07

**Перевод чисел
из произвольной
позиционной системы
в десятичную**

Для записи чисел в позиционной системе с основанием **n** используется **n цифр**.

Основание	Система	Алфавит
n = 2	двоичная	0 1
n = 3	троичная	0 1 2
n = 8	восьмеричная	0 1 2 3 4 5 6 7
n = 16	шестнадцатеричная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

101101₂ 3671₈ 3B8F₁₆

Перевод в десятичную систему счисления

Например, число 211_3 содержит в себе 1 единицу, 1 тройку и 2 девятки.

$$211_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 18 + 3 + 1 = 22_{10}$$

Аналогично переводятся и дробные числа.

$$\begin{aligned} 101,11_2 &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= \\ &= 4 + 0 + 1 + 0,5 + 0,25 = 5,75_{10} \end{aligned}$$

Задание 2

Перевести числа в десятичную систему счисления.

$$110101_2, 34,2_5, 2A3,8_{16}$$

$$110101_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 53_{10}$$

$$34,2_5 = 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^{-1} = 15 + 4 + 0,4 = 19,4_{10}$$

$$2A3,8_{16} = 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 + 8 \cdot 16^{-1} = 512 + 160 + 3 + 0,5 = 675,5_{10}$$

**Перевод целых
десятичных чисел
в произвольную
систему счисления**

Алгоритм перевода целых десятичных чисел в произвольную систему счисления

1. Десятичное число делится на основание системы. Остаток от деления – младший разряд искомого числа (правая цифра в числе).
2. Частное делится на основание системы. Остаток от деления – вторая справа цифра в числе.
3. Деление производится до тех пор, пока частное не станет меньше делителя (основания системы). Это частное – старшая цифра искомого числа.

Задание 3

Выполнить указанные переводы чисел из одной системы в другую:

$$56_{10} = X_2; \quad 56_{10} = X_8;$$

$$124_5 = X_2; \quad A8_{16} = X_8.$$

**Перевод
десятичных дробей
в произвольную
систему счисления**

Алгоритм перевода десятичных дробей в произвольную систему счисления

1. Умножить данное число на основание системы. Целая часть произведения – первая цифра в числе после запятой.
2. Произведение (без целой части) умножается на основание системы. Целая часть – вторая цифра в числе после запятой.
3. Умножение производится до тех пор, пока произведение не станет целым числом без десятичной части.

Задание 4

Выполните указанные переводы чисел из одной системы в другую:

$$0,625_{10} = X_8$$

$$56,875_{10} = X_2$$

$$0,3125_{10} = X_{12}$$

$$324,015625_{10} = X_8$$

$$0,78125_{10} = X_4$$

$$765,125_{10} = X_{16}$$

Задание 5

Переведите смешанное десятичное число в двоичное, восьмеричное и шестнадцатеричное с точностью до указанного количества знаков после запятой:

- а) 3,5, один знак;
- б) 98,45, три знака;
- в) 47,89, три знака.

Двоичная арифметика

Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

$$\begin{aligned}0_2 + 0_2 &= 0_2 \\0_2 + 1_2 &= 1_2 \\1_2 + 0_2 &= 1_2 \\1_2 + 1_2 &= 10_2\end{aligned}$$

или

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Задание 6

Выполните операцию сложения над двоичными числами:

а) $101010 + 1101$

б) $1010 + 1010$

в) $10101 + 111$

Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

$$0_2 \times 0_2 = 0_2$$

$$0_2 \times 1_2 = 0_2$$

$$1_2 \times 0_2 = 0_2$$

$$1_2 \times 1_2 = 1_2$$

или

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Задание 7

Выполните операцию умножения над двоичными числами:

а) $1010 \cdot 11$

б) $111 \cdot 101$

в) $1010 \cdot 111$

Задание 8

Расставьте знаки арифметических операций так, чтобы были верны следующие равенства в двоичной системе:

а) $1100 \ ? \ 11 \ ? \ 100 = 100000$;

б) $1100 \ ? \ 10 \ ? \ 10 = 100$;

в) $1100 \ ? \ 11 \ ? \ 100 = 0$.

Задание 9

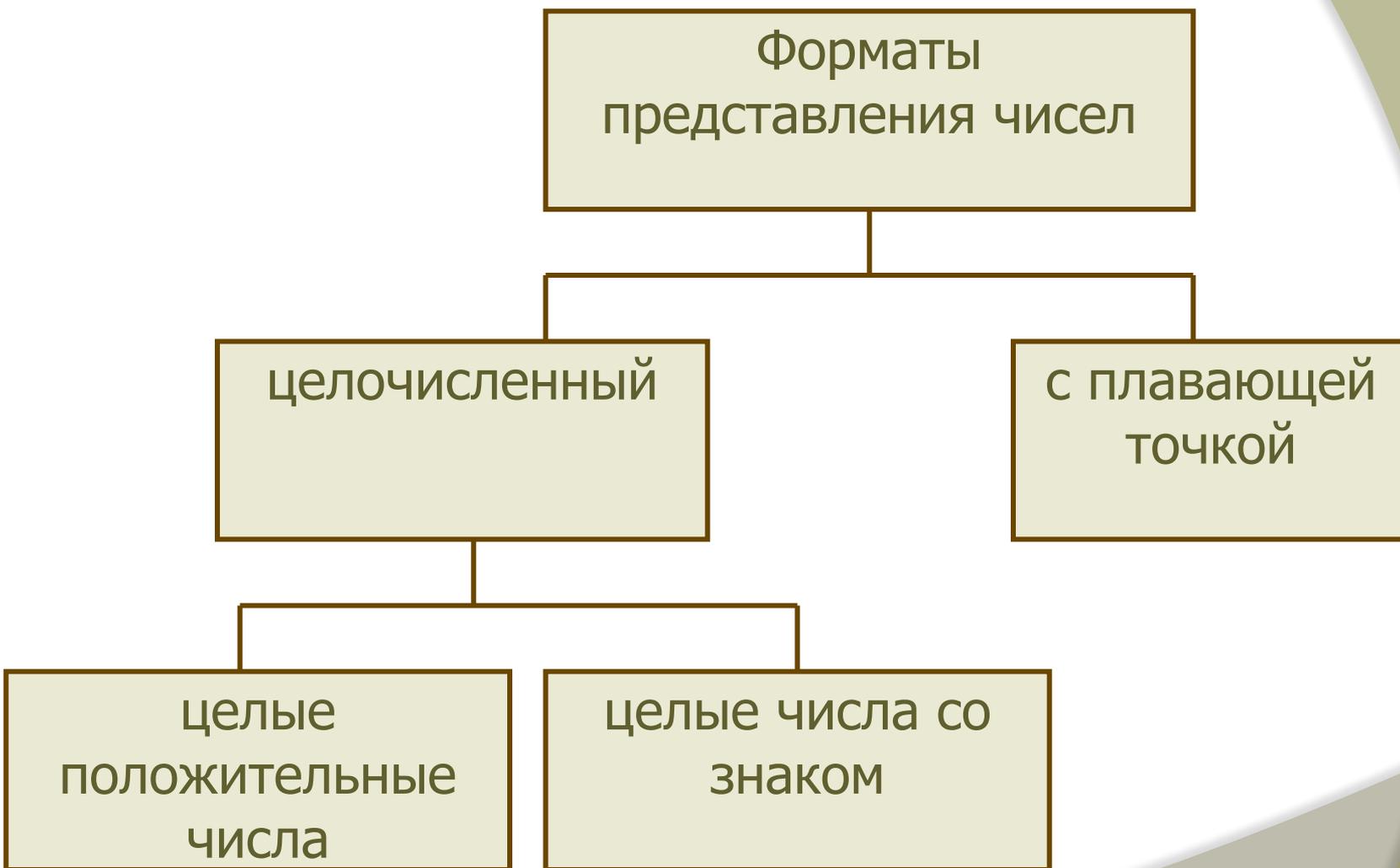
Вычислите выражения:

$$\text{а) } (1111101_2 + AF_{16}) : 36_8$$

$$\text{б) } 125_8 + 101_2 \cdot 2A_{16} - 141_8$$

Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Представление числовой информации в компьютере



Целочисленный формат (с фиксированной точкой) используется для представления в компьютере целых (англ. integer) положительных и отрицательных чисел (1, 2, 4 байта).

Однобайтовое представление применяется только для положительных целых чисел (от 00000000_2 до 11111111_2 , т.е 255_{10}).

Для положительных и отрицательных целых чисел обычно используется 2 и 4 байта, при этом старший бит выделяется под знак числа:

- 0 – плюс,
- 1 – минус.

Самое большое (по модулю) целое число со знаком, которое может поместиться в 2-байтовом формате, это число **0 111111 11111111**, то есть при помощи подобного кодирования можно представить числа от $-32\,768_{10}$ до $32\,767_{10}$.

Представление целого положительного числа в компьютере

- 1) число переводится в двоичную систему;
- 2) результат дополняется нулями слева в пределах выбранного формата.

Например, положительное число $+135_{10}$ в зависимости от формата представления в компьютере будет иметь следующий вид:

- ⊙ для формата в виде 1 байта –
10000111 (отсутствует знаковый разряд);
- ⊙ для формата в виде 2 байтов –
0 0000000 10000111;
- ⊙ для формата в виде 4 байтов –
0 00000000 00000000 00000000 10000111.

Представление целого отрицательного числа в компьютере

- 1) число без знака переводится в двоичную систему;
- 2) результат дополняется нулями слева в пределах выбранного формата;
- 3) полученное число переводится в обратный код (нули заменяются единицами, а единицы – нулями);
- 4) полученное число переводится в дополнительный код (к обратному коду прибавляется 1).

Например, представим число -135_{10} в 2-байтовом формате:

- 1) $135_{10} = 10000111_2$ (перевод десятичного числа без знака в двоичный код);
- 2) 0 0000000 10000111 (дополнение двоичного числа нулями слева в пределах формата);
- 3) 0 0000000 10000111 \rightarrow 1 1111111 01111000 (перевод в обратный код);
- 4) 1 1111111 01111000 \rightarrow 1 1111111 01111001 (перевод в дополнительный код).

Задание 10

В одном байте представлено целое положительное число в формате с фиксированной точкой. Переведите число в десятичную систему счисления.

1	0	1	0	1	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Задание 11

В двух байтах представлено целое отрицательное число в формате с фиксированной точкой. Переведите число в десятичную систему счисления.

1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Формат с плавающей точкой используется для представления в компьютере действительных чисел (англ. real).

Представление числа в плавающей форме не является единственным:

$$3 \cdot 10^8 = 30 \cdot 10^7 = 0,3 \cdot 10^9 = 0,03 \cdot 10^{10} = \dots$$

Договорились для выделения единственного варианта записи числа считать, что целая часть числа отсутствует, а первый разряд содержит отличную от нуля цифру .

Т.е. обоим требованиям удовлетворит только число $0,3 \cdot 10^9$

Вещественное число представляется в виде произведения *мантиссы* (m) и основания системы счисления в целой степени (n), называемой *порядком*.

$$R = m * P^n .$$

Порядок n указывает, на какое количество позиций и в каком направлении должна сместиться в мантиссе точка (запятая), отделяющая дробную часть от целой. Мантисса нормализуется, т. е. представляется в виде правильной дроби ($0 < m < 1$).

В 2-байтовом формате представления вещественного числа первый байт и три разряда второго байта выделяются для размещения мантиссы, в остальных разрядах второго байта размещаются порядок числа, знаки числа и порядка.

1-й байт							0-й байт							
Знак числа	Знак порядка	Порядок			Мантисса									

В 4-байтовом формате представления вещественного числа первые три байта выделяются для размещения мантиссы, в четвертом байте размещаются порядок числа, знаки числа и порядка.

		3-й байт				2-й байт				1-й байт				0-й байт			
З н а к	З н а к	Порядок				Мантисса											
ч и с л а	п о р я д к а																