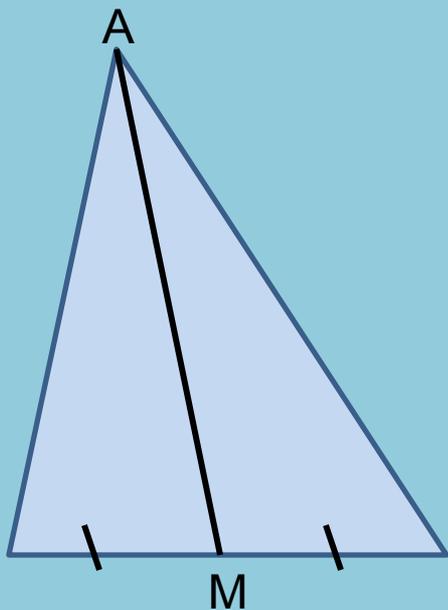


**Подготовка к ГИА
модуль «Геометрия»
Треугольники**

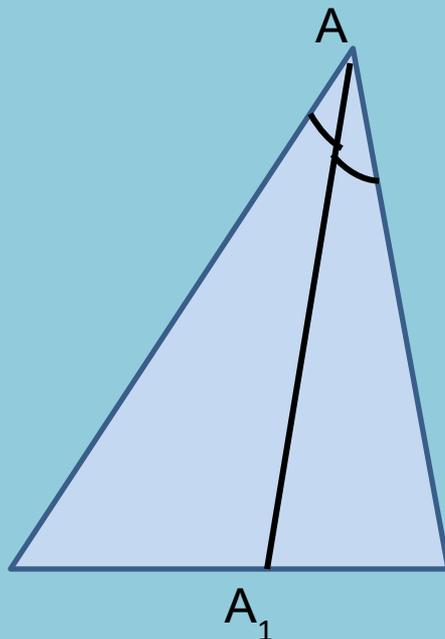
Высота, медиана, биссектриса треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой



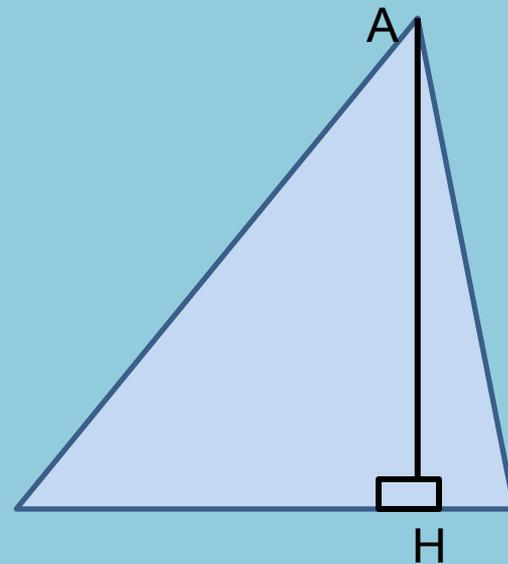
AM – медиана

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника



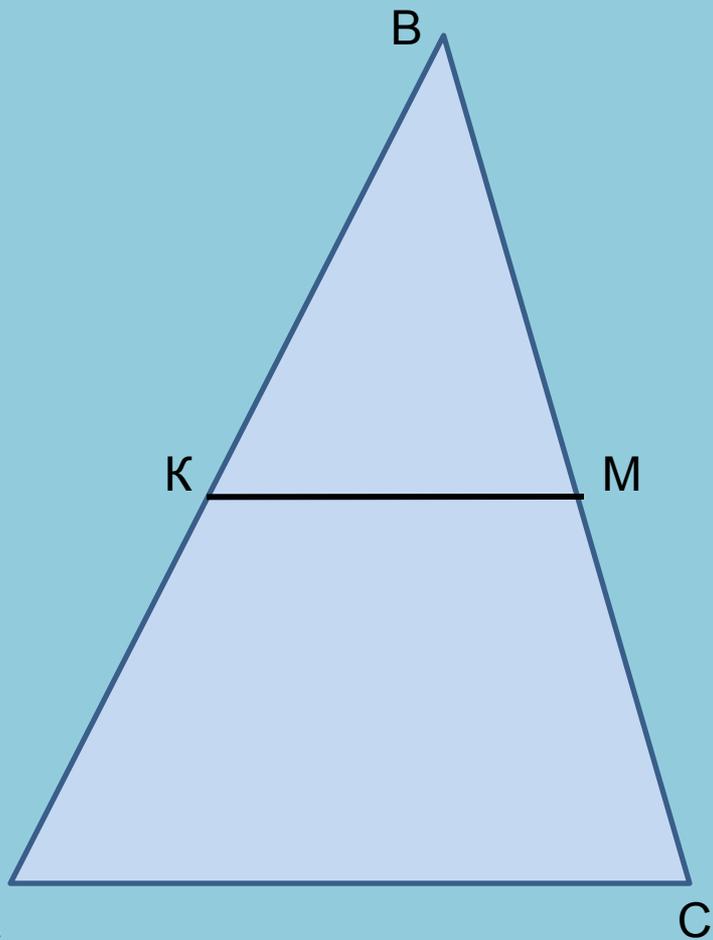
AA₁ – биссектриса

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется перпендикуляром



AH - высота

Средняя линия треугольника



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

КМ – средняя линия

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны

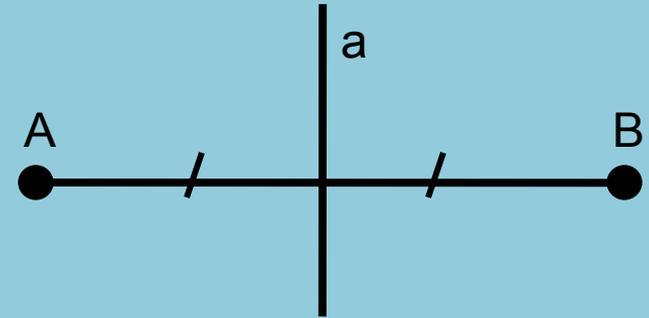
$$KM \parallel AB$$

$$KM = \frac{1}{2} AB$$

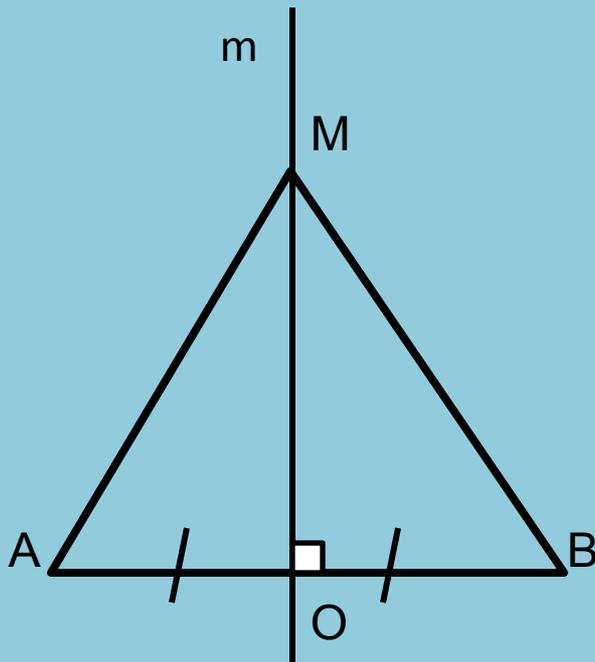
Серединный перпендикуляр

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярна к нему

a – серединный перпендикуляр к отрезку AB



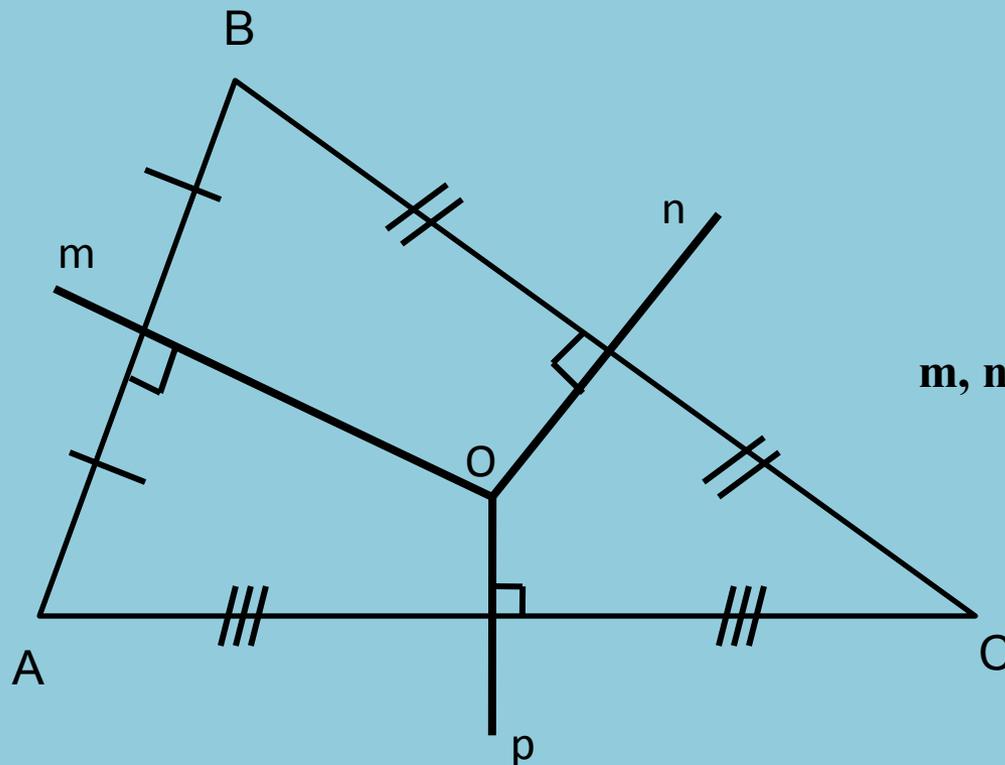
Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему



m – серединный перпендикуляр к отрезку AB ,
 O – середина отрезка AB
 $M \in m$
 $AM = BM$

Точка пересечения серединных перпендикуляров

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника
пересекаются в одной точке



$$m \perp AB,$$

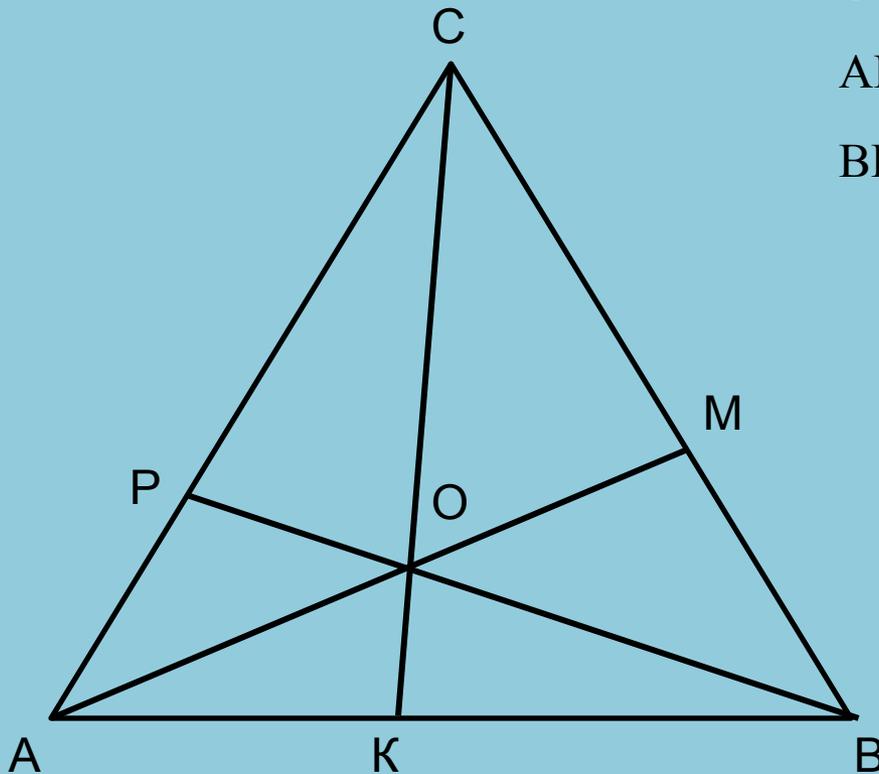
$$n \perp BC,$$

$$p \perp AC$$

m, n, p пересекаются в точке O

Точка пересечения биссектрис треугольника

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке



CK – биссектриса $\angle C$

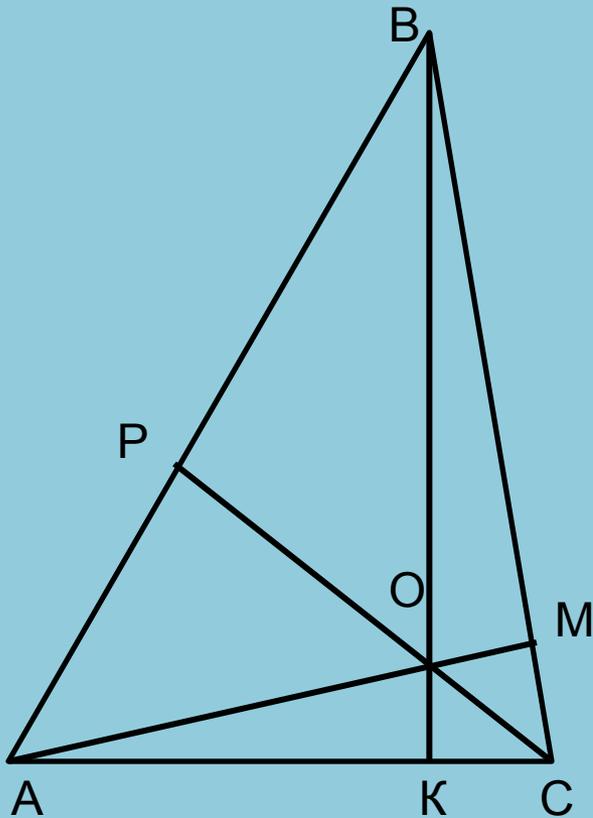
AM – биссектриса $\angle A$

BP – биссектриса $\angle B$

O – точка пересечения биссектрис

Точка пересечения высот треугольника

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке



$$BK \perp AC$$

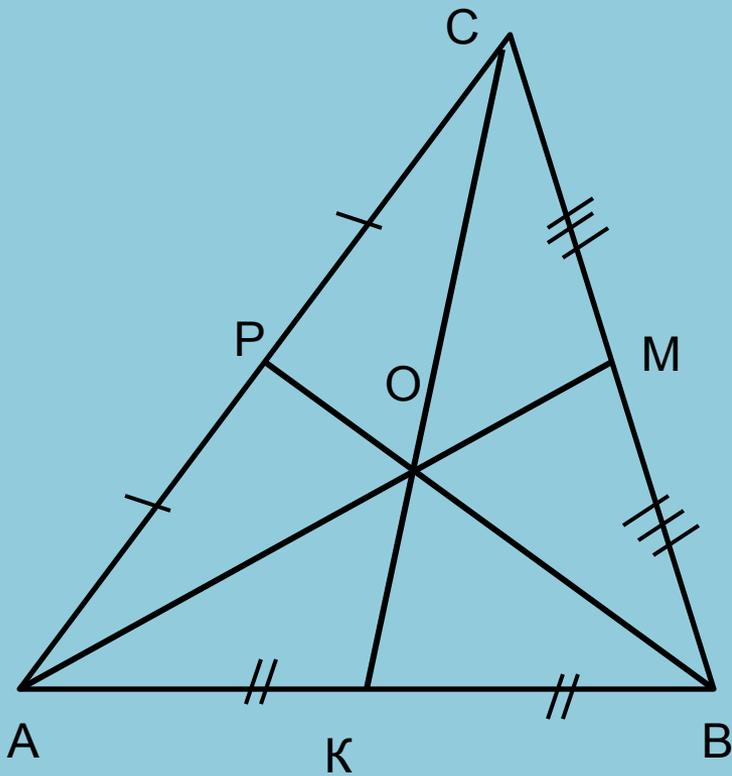
$$CP \perp AB$$

$$AM \perp BC$$

O – точка пересечения высот

Точка пересечения медиан треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины



BP, CK, AM – медианы треугольника ABC
O – точка пересечения медиан

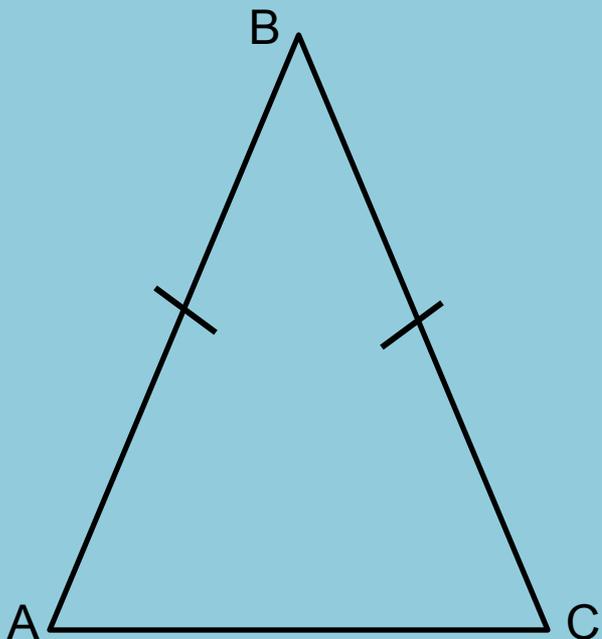
$$CO : KO = 2 : 1$$

$$AO : MO = 2 : 1$$

$$BO : PO = 2 : 1$$

Равнобедренный треугольник

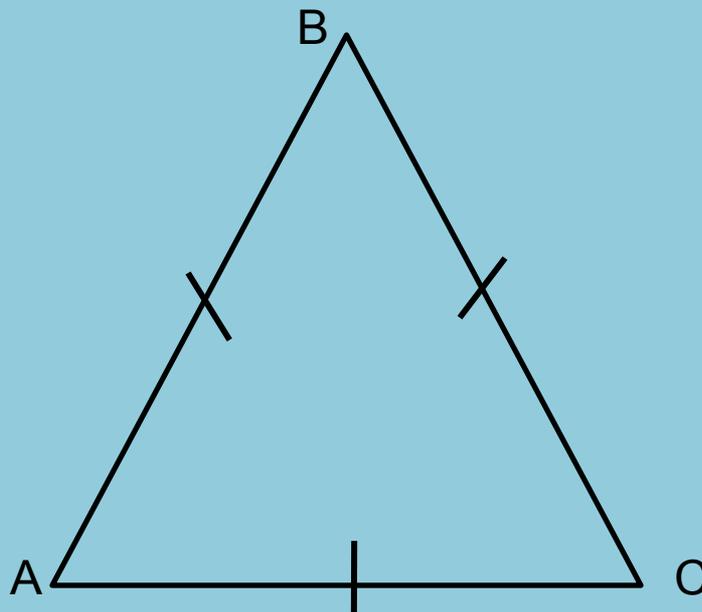
Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны



$$AB = BC$$

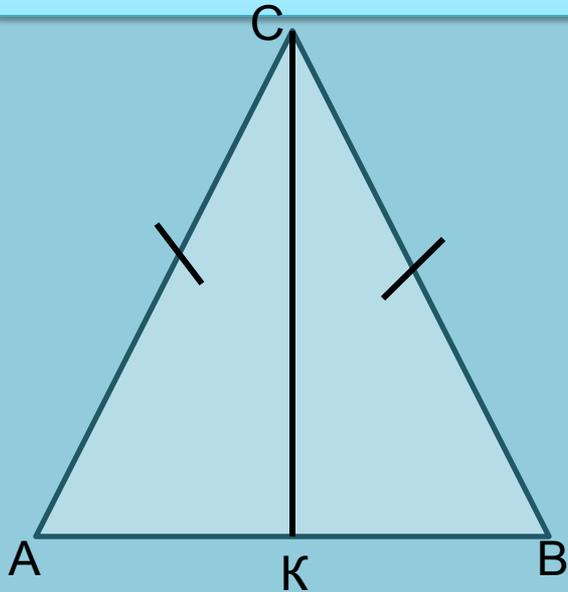
Равносторонний треугольник

Треугольник, все стороны которого равны, называется равносторонним



$$AB = AC = BC$$

Свойства равнобедренного треугольника



$$AC = BC$$

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны
 $\angle A = \angle B$

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой

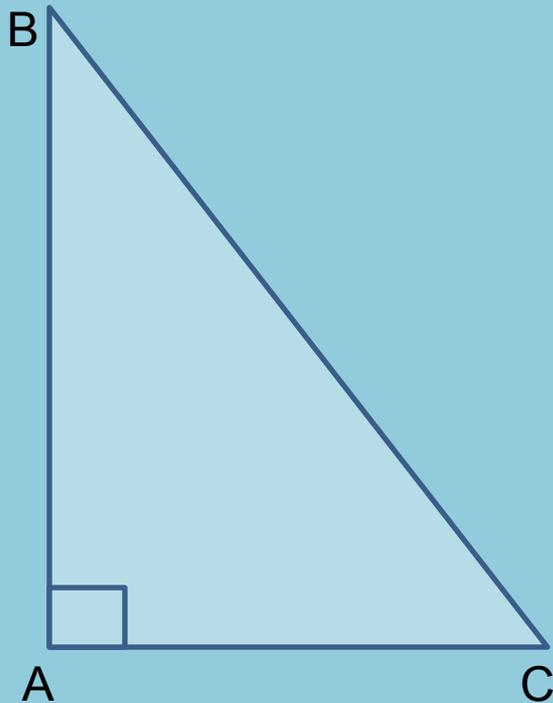
СК - биссектриса

$$AK = KB, CK \perp AB$$

1. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.
2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.

Прямоугольный треугольник

Треугольник, у которого один из углов прямой, называется прямоугольным



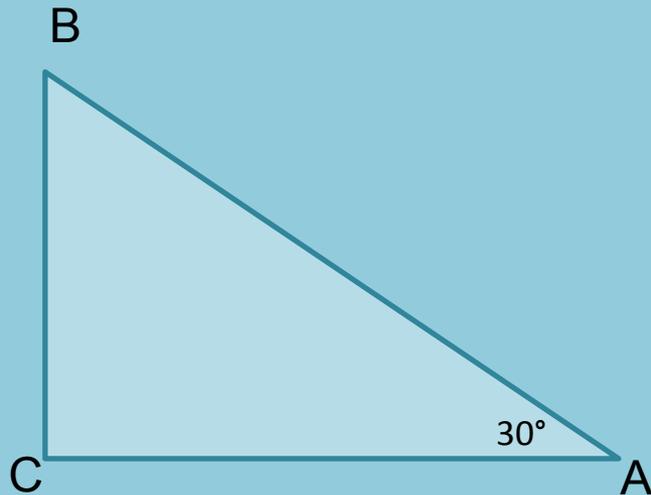
AB и AC – катеты
BC - гипотенуза

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Свойства прямоугольного треугольника



$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ$$

$$CB = \frac{1}{2} AB$$

$$\text{Если } CB = \frac{1}{2} AB, \text{ то } \angle A = 30^\circ$$

Сумма двух острых углов
прямоугольного треугольника
равна 90°

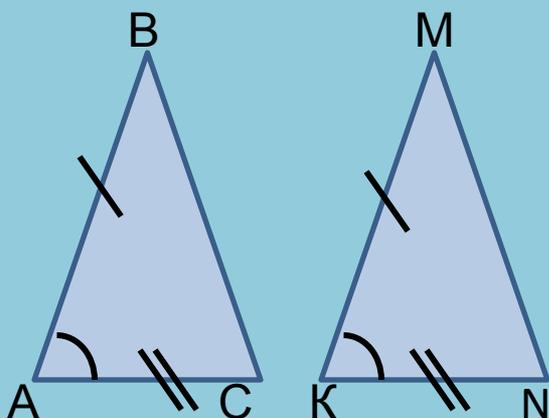
Катет прямоугольного треугольника,
лежащий против угла в 30° , равен
половине гипотенузы

Если катет прямоугольного
треугольника равен половине
гипотенузы, то угол, лежащий
против этого катета, равен 30°

Признаки равенства треугольников

I признак

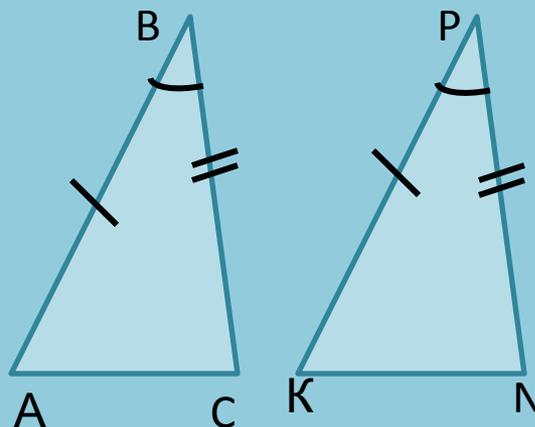
По двум сторонам и
углу между ними



Если $\angle A = \angle K$,
 $AB = KM$,
 $AC = KN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

II признак

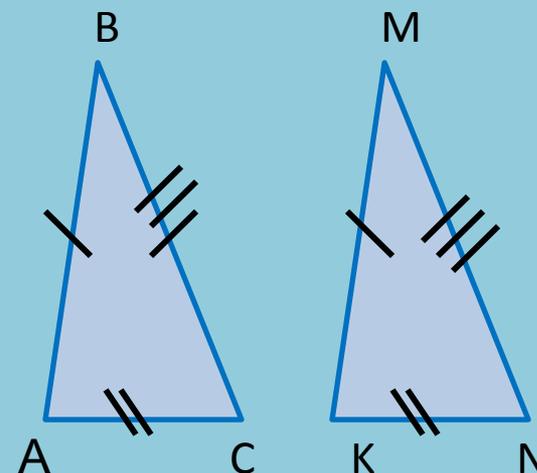
По стороне и
прилежащим к ней
углам



Если $\angle B = \angle P$
 $AB = KP$, $BC = PN$,
то $\triangle ABC = \triangle KPN$

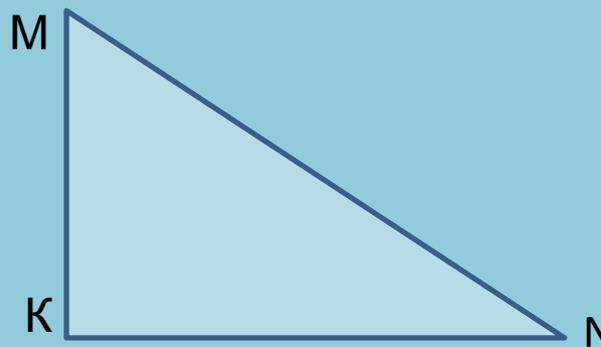
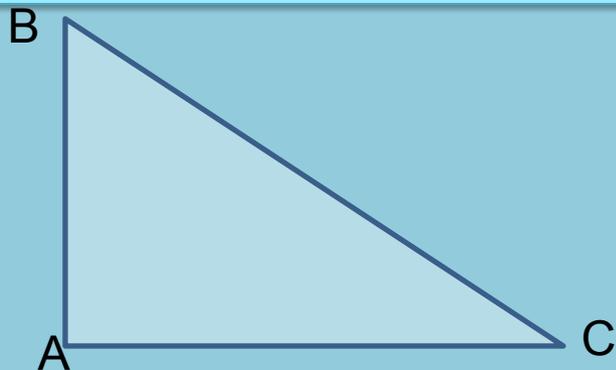
III признак

По трем сторонам



Если $AB = KM$,
 $AC = KN$, $BC = MN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

Признаки равенства прямоугольных треугольников



По двум катетам

Если $AB = KM$, $AC = KN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

По гипотенузе и острому
углу

Если $BC = MN$, $\angle B = \angle M$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

По катету и прилежащему
острому углу

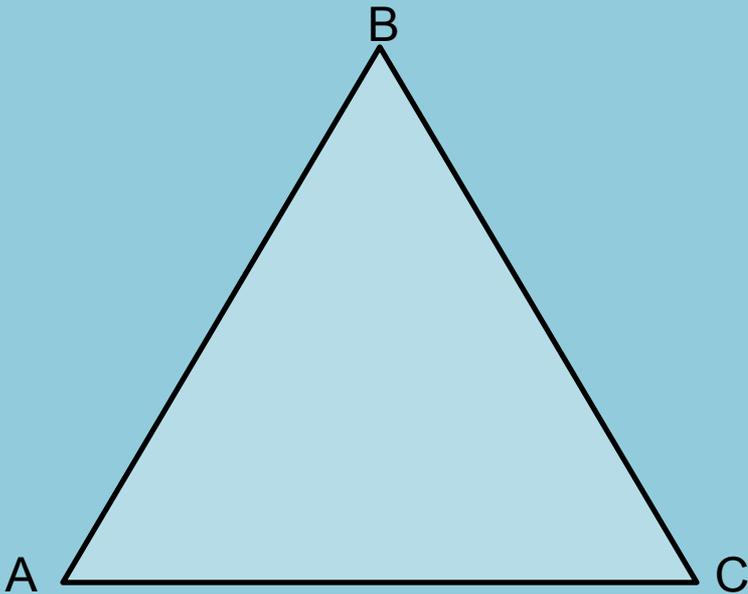
Если $AB = KM$, $\angle B = \angle M$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

По гипотенузе и катету

Если $BC = MN$, $AC = KN$,
то $\triangle ABC = \triangle KMN$

Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон



$$AB < BC + AC$$

$$AC < AB + BC$$

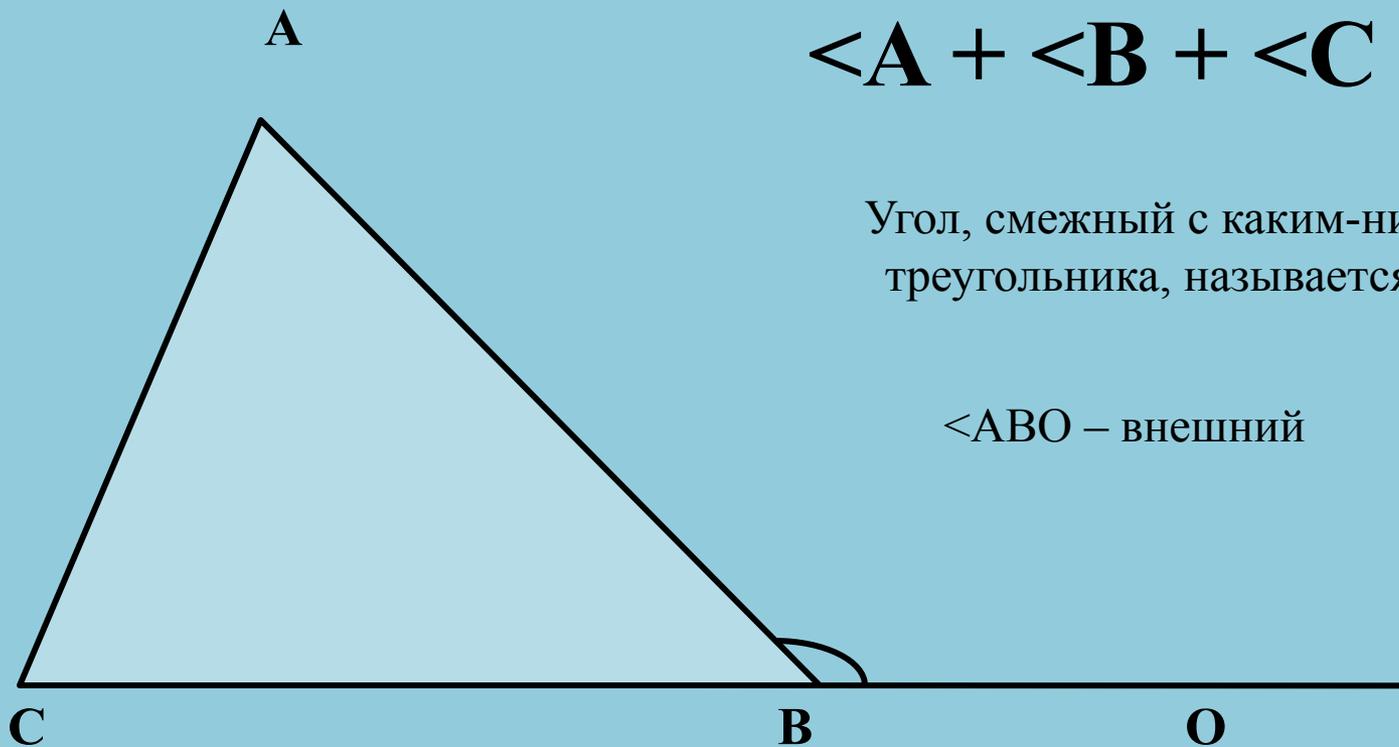
$$BC < AB + AC$$

Сумма углов треугольника равна 180°

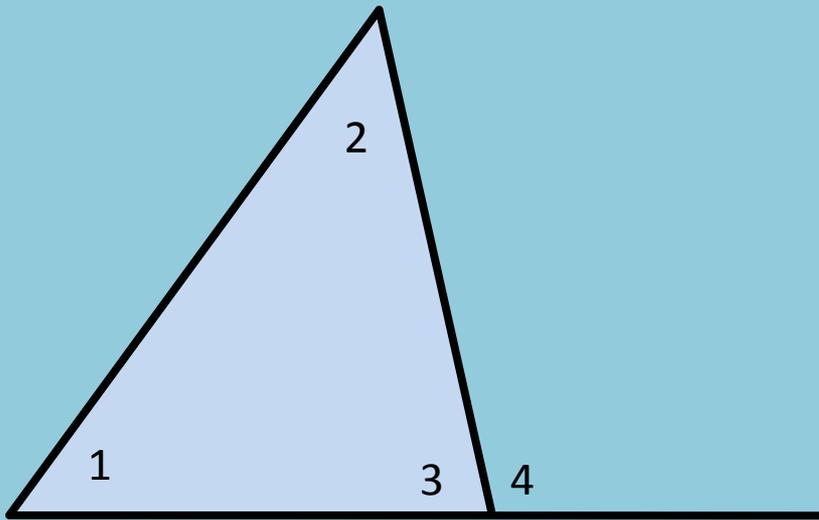
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется внешним

$\angle ABO$ – внешний



Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним



$\sphericalangle 3$ смежный с $\sphericalangle 4$

$$\sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 = 180^\circ$$

$$(\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2) + \sphericalangle 3 = 180^\circ$$

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$$

Зависимость между величинами сторон и углов треугольника

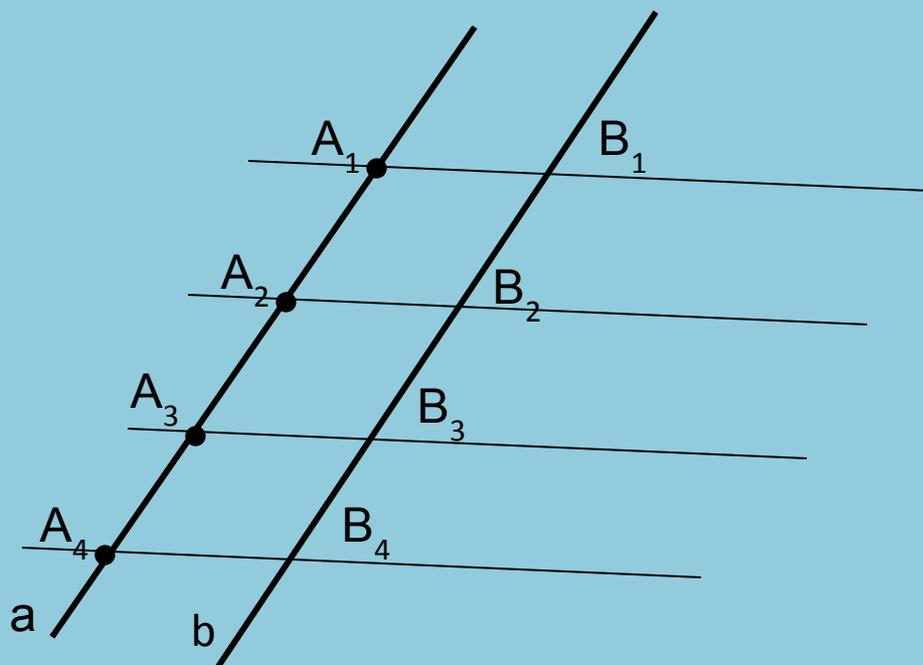
В треугольнике:

- 1) против большей стороны лежит больший угол;**
- 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона**

- 1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета**
- 2. Если два треугольника равны, то треугольник равнобедренный**

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки



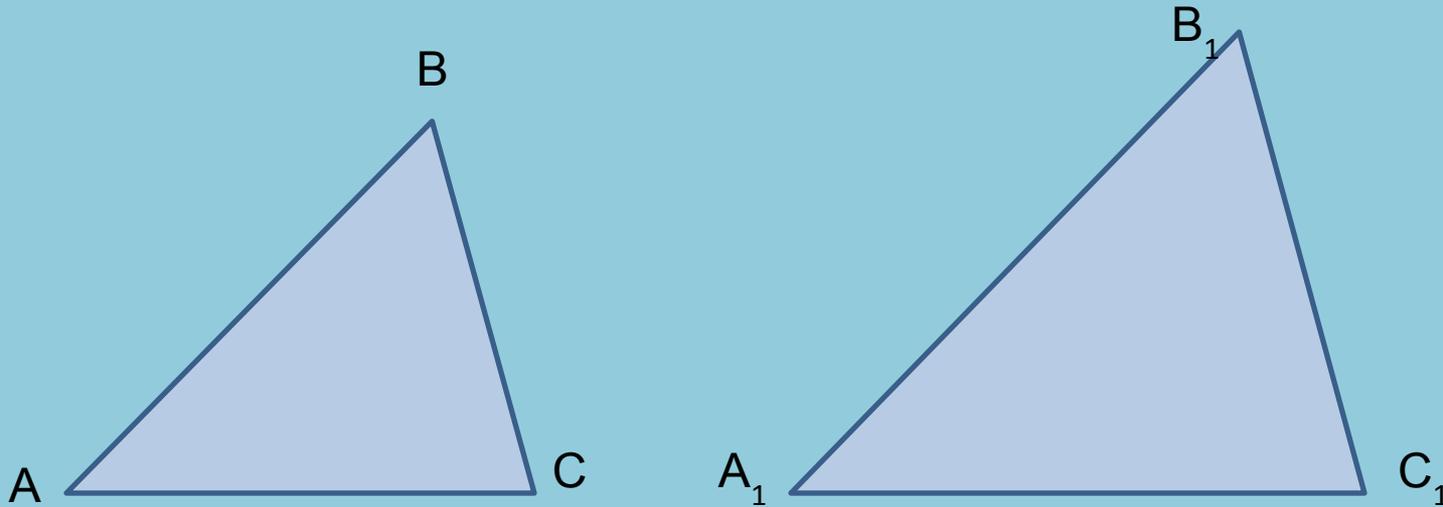
$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4$$

Проведем параллельные прямые

$$B_1 B_2 = B_2 B_3 = B_3 B_4$$

Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого



$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

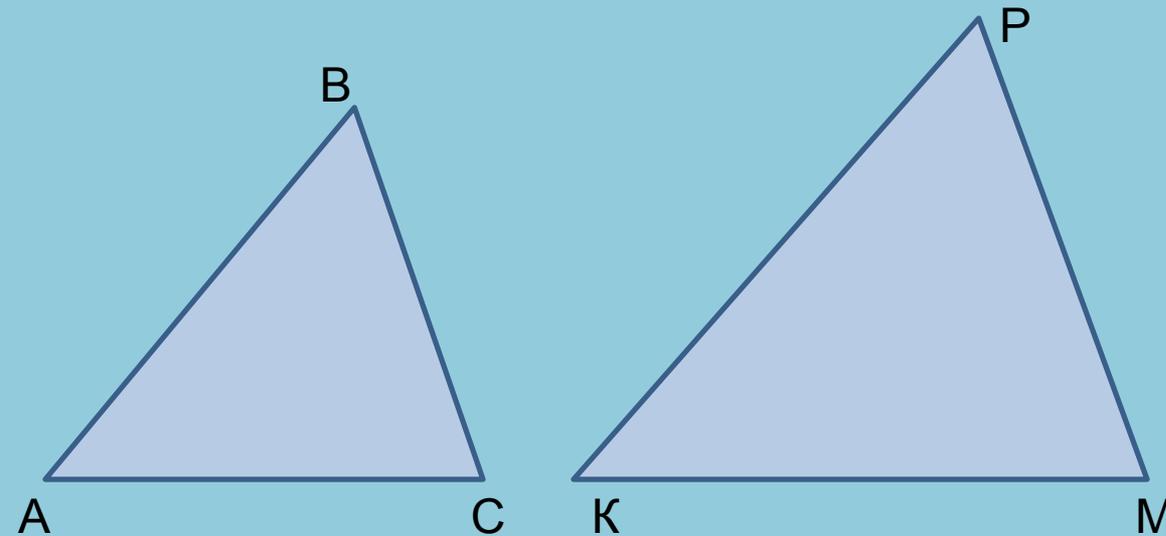
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

k – коэффициент подобия

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Признаки подобия треугольников

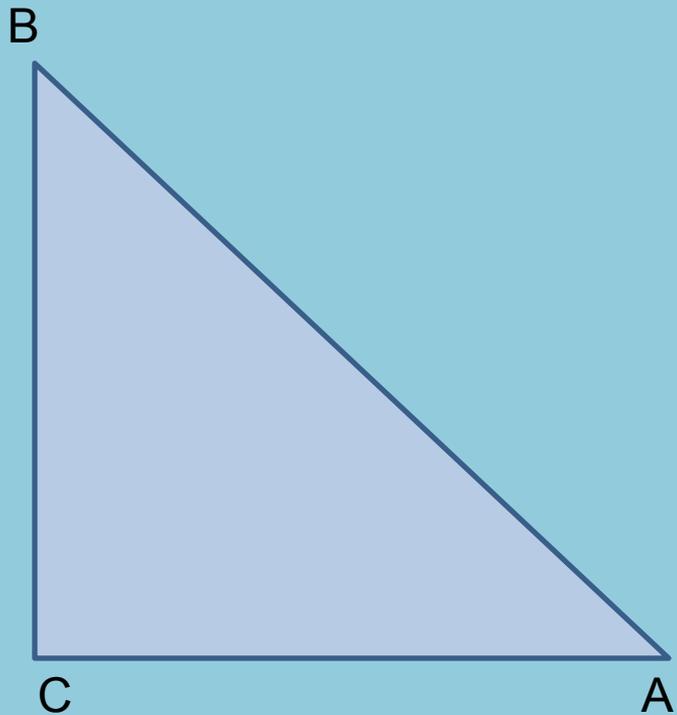
1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны



Если
 $\frac{AB}{KP} = \frac{AC}{KM} = \frac{BC}{PM}$
то $\triangle ABC \sim \triangle KPM$

$$\triangle ABC \sim \triangle KPM$$

Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°



Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему

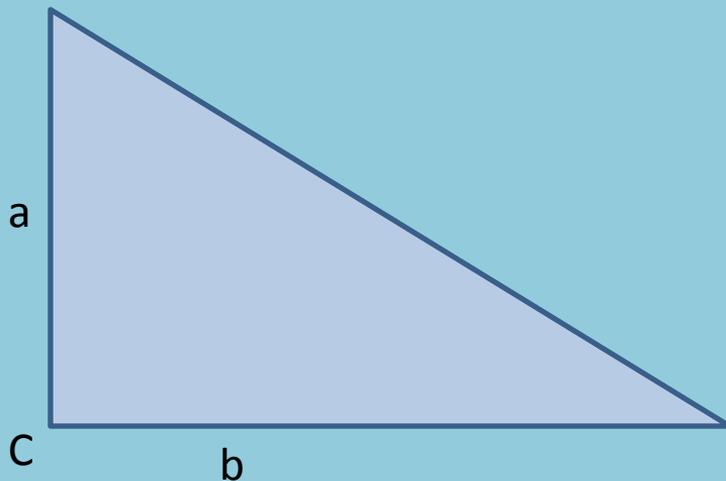
$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Теорема о площади треугольника

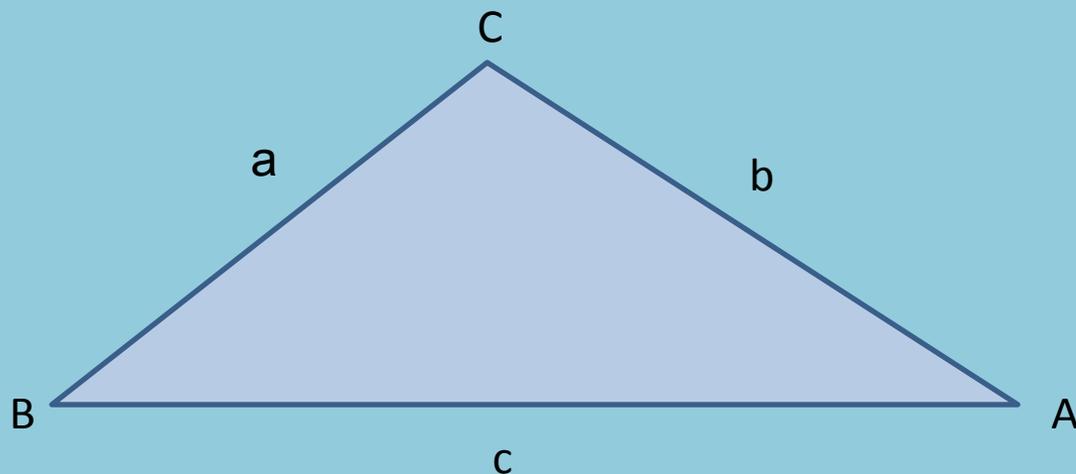
Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Теорема синусов

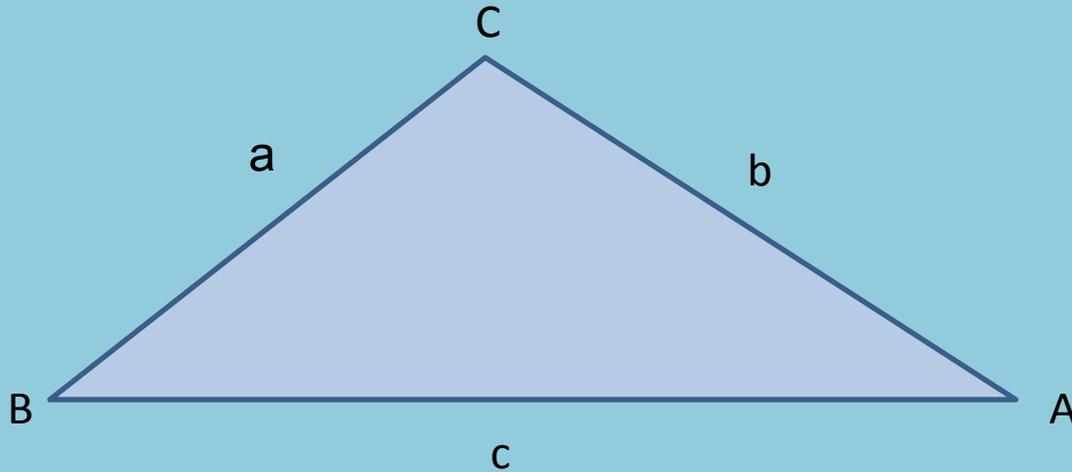
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

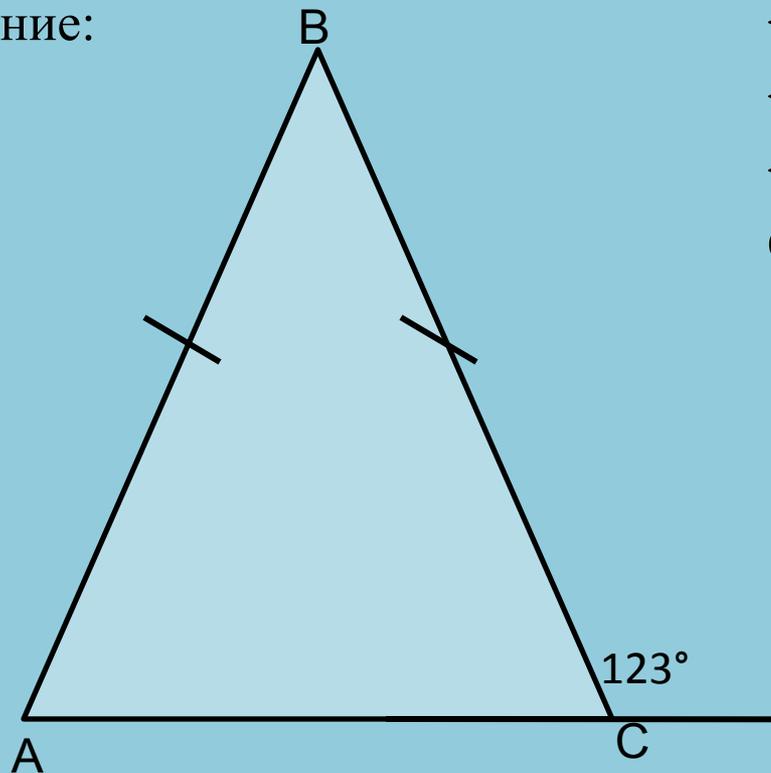


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

№ 9.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине C равен 123° . Найдите величину угла ABC . Ответ дайте в градусах.

Решение:



$$\angle BAC = \angle BCA$$

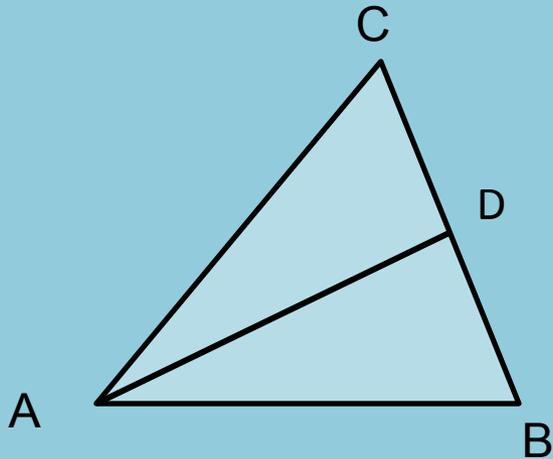
$$\angle BCA = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 2 \cdot 57^\circ = 66^\circ$$

Ответ: 66°

№9. В треугольнике ABC AD – биссектриса, угол C равен 50° , угол CAD равен 28° . Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Решение:



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle CAD = \angle BAD = 28^\circ$$

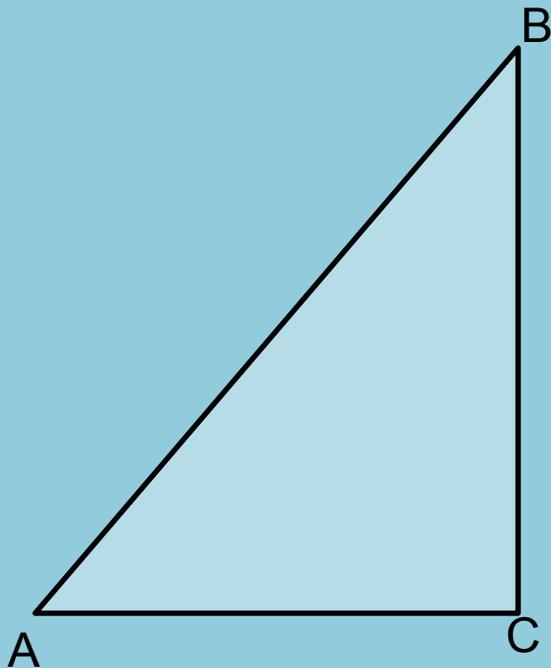
$$\angle A = 2 \cdot 28^\circ = 56^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 56^\circ - 50^\circ = 74^\circ$$

Ответ: 74°

№9. Один острый угол прямоугольного треугольника в два раза больше другого. Найдите меньший острый угол. Ответ дайте в градусах.

Решение:



$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

Пусть $\angle A = x$, тогда

$$\angle B = 2x$$

$$x + 2x = 90^\circ$$

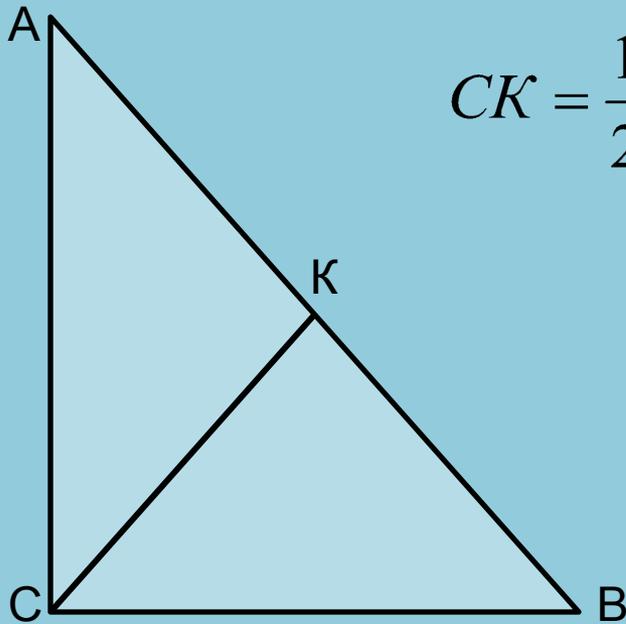
$$x = 30^\circ$$

Ответ: 30°

№ 24

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника

Решение:

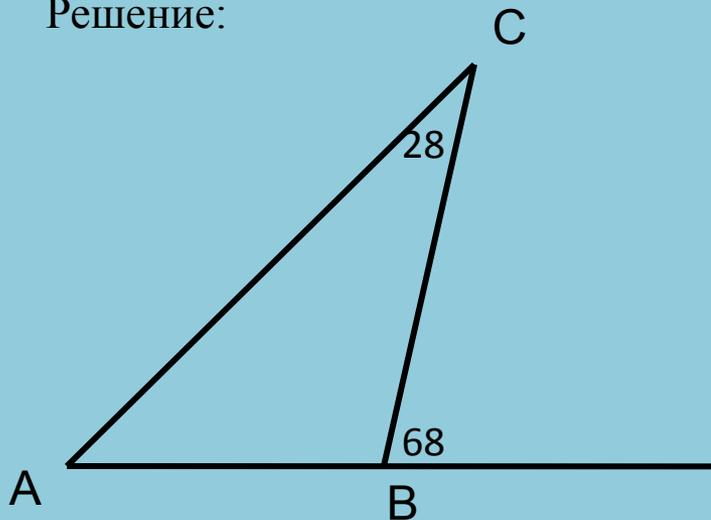


$$CK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 64} = 5$$

Ответ: 5

№ 24. В треугольнике ABC угол C равен 28° . Внешний угол при вершине B равен 68° . Найдите угол A.

Решение:



I способ:

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Следовательно

$$\angle A + \angle C = 68^\circ$$

$$\angle A = 68^\circ - 28^\circ = 40^\circ$$

Ответ: 40°

II способ:

$$\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180° .

Следовательно

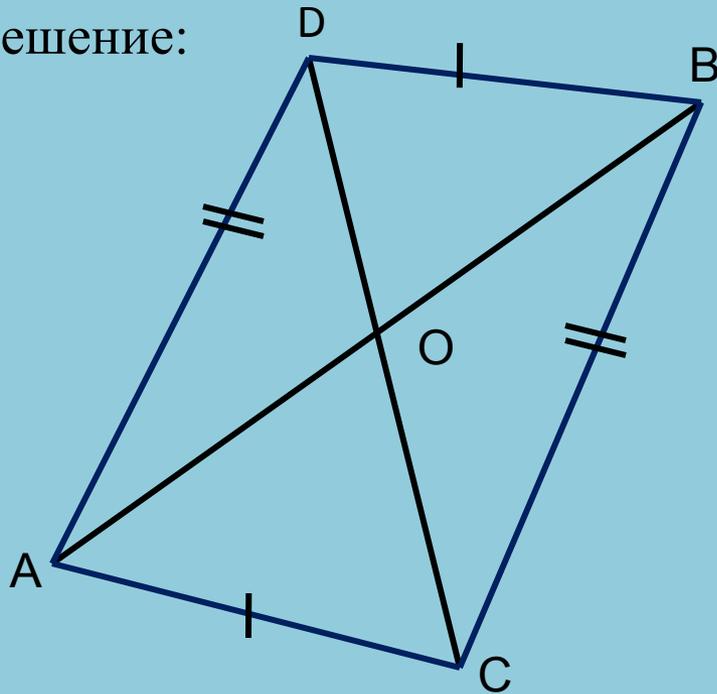
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 28^\circ - 112^\circ = 40^\circ.$$

Ответ: 40°

№ 25. Отрезки АВ и CD пересекаются в точке О, являющейся их серединой. Докажите равенство треугольников АВС и ВАD.

Решение:



Достроим треугольники АВС и ВАD.

$\triangle ODB = \triangle AOC$ (по двум сторонам и углу между ними)

$AO = OB, DO = OC$ по условию,
 $\angle DOB = \angle AOC$ как вертикальные,
следовательно

$DB = AC$

$\triangle ADO = \triangle BCO$ (по двум сторонам и углу между ними)

$AO = OB, DO = OC$ по условию,
 $\angle DOA = \angle COB$ как вертикальные,
следовательно

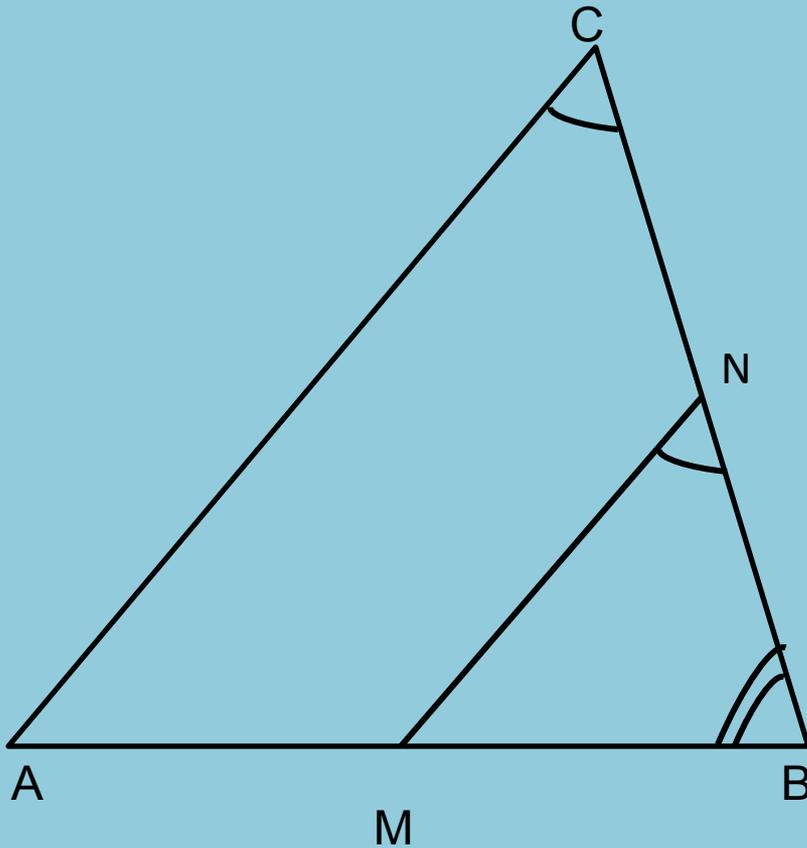
$AD = BC$

Получили: $DB = AC, AD = BC, AB$ – общая. Таким образом
 $\triangle ABC = \triangle BAD$ (по трем сторонам).

Что и требовалось доказать.

№25. В треугольнике ABC M – середина AB, N – середина BC. Докажите подобие треугольников MBN и ABC.

Решение:



Так как M и N середины сторон AB и BC, то MN – средняя линия $\triangle ABC$ следовательно $MN \parallel AC$.

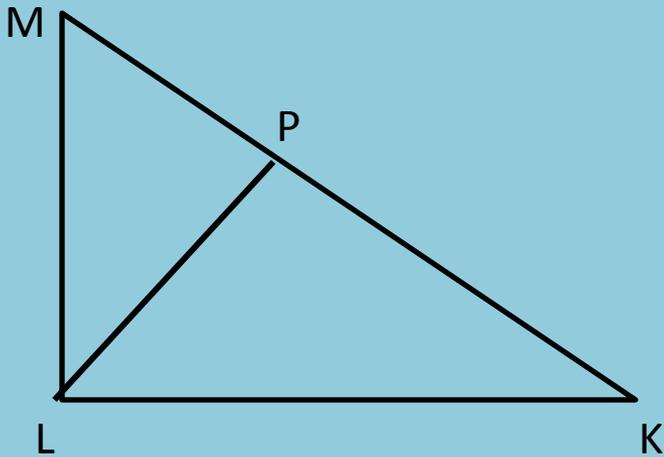
Так как $MN \parallel AC$,
то $\angle ACB = \angle MNB$ (как соответственные),
 $\angle ABC$ – общий,

следовательно
 $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ (по двум углам)

Что и требовалось доказать

№ 25. В прямоугольном треугольнике KLM с прямым углом L проведена высота LP. Докажите, что $LP^2 = KP \cdot MP$.

Решение:



$\triangle KLM \sim \triangle KPL$ по двум углам
($\angle K$ – общий, $\angle KLM = \angle KPL = 90^\circ$).

$\triangle KLM \sim \triangle MPL$ по двум углам
($\angle M$ – общий, $\angle KLM = \angle MPL = 90^\circ$).

$\triangle KPL \sim \triangle MPL$ по двум углам
(углы при вершине P прямые, $\angle K = \angle MLP$).

Так как $\triangle KPL \sim \triangle MPL$, то

$$\frac{MP}{LP} = \frac{LP}{KP} \Rightarrow LP^2 = KP \cdot MP$$

Что и требовалось доказать.