

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ(ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
В Г. ТАГАНРОГЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ПИ (ФИЛИАЛ) В Г. ТАГАНРОГЕ

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА.
ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

ФИЗИКА
ЛЕКЦИЯ 10.



Доцент кафедры ГиЕД, к.т.н.

Бедная Т.А.

10.1. Скорости газовых молекул. Опыт Штерна.

Поставьте себя на место исследователей 60-х годов прошлого столетия. Сформулирована молекулярно-кинетическая теория, но нет никаких доказательств существования самих молекул! А вся теория базируется на предположении о движении молекул. С какой они движутся скоростью? И как эту скорость измерить, если молекулы невидимы.

Теоретики первыми нашли выход. Из уравнения молекулярно-кинетической теории газов известно, что

$$\frac{mv_{\text{KB}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT \quad (12.1.1)$$

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (12.1.2)$$

Получена хорошая формула, но масса молекулы неизвестна! Тогда можно записать:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (12.1.3)$$

А мы знаем, что $p = RT \frac{\rho}{\mu}$, тогда $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$, (12.1.4)

где p – давление; ρ – плотность. Они уже измеряемые величины.

Например: плотность азота (N_2) равна $1,25 \text{ кг/м}^3$ при $T = 0^\circ\text{C}$ и $p = 1$ атм, $v_{\text{N}_2} = 500 \text{ м/с}$. Для водорода: $v_{\text{H}_2} = 2000 \text{ м/с}$.

При этом, интересно отметить, что скорости молекул в газе близки к скорости звука в этом газе. Это объясняется тем, что звуковые волны переносятся молекулами газа. И неудивительно поэтому, что

$$v_{\text{зв.}} \approx \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Экспериментально впервые скорости молекул были измерены в 1920 г. Штерном. За этот опыт и за большой вклад в развитие молекулярной физики в 1943 г. он был удостоен Нобелевской премии.

В этом опыте были не только измерены скорости газовых молекул, но и показано, что они имеют большой разброс по скоростям. Причина в хаотичности теплового движения молекул. Ещё в XIX веке Максвелл утверждал, что молекулы беспорядочно сталкиваясь друг с другом как-то “распределяются” по скоростям, причём вполне определённым образом.

10.2. Вероятность события.

Понятие о распределении молекул газа по скоростям.

Математическое определение вероятности: вероятность какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев, при бесконечном увеличении последних. Или

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}, \quad (12.2.1)$$

где n' – число раз, когда событие произошло, а n – общее число опытов. Отсюда следует, что P может быть от нуля до единицы ($P \leq 1$). Или по определению Лапласа: вероятность – отношение числа благоприятных случаев к числу возможных случаев.

Определить распределение молекул по скоростям вовсе не значит, что нужно определить число молекул, обладающих той, или иной заданной скоростью. Ибо число молекул, приходящихся на долю каждого значения скорости равно нулю (попытайтесь это понять). Вопрос должен быть поставлен так: «Сколько молекул обладает скоростями, лежащими в этом интервале, включающем заданную скорость?» Так всегда ставятся статистические задачи.

Например: на переписи населения, когда указывается возраст (20 лет) – это не значит, что 20 лет, 0 часов, 0 минут, а эта цифра свидетельствует, что возраст лежит в интервале от 20 до 21 год.

Итак, молекулы хаотически движутся. Среди них есть и очень быстрые и очень медленные. Благодаря беспорядочному движению и случайному характеру их взаимных столкновений, молекулы определённым образом распределяются по скоростям.

Это распределение оказывается однозначным и единственно возможным, и не только противоречит хаотическому движению, но именно им и обусловлено.

Мы будем искать число частиц (Δn), скорости которых лежат в определённом интервале значения скорости Δv (от v до $v + \Delta v$). То есть Δn – число благоприятных молекул.

Очевидно, что в единице объёма число таких благоприятных молекул тем больше, чем больше Δv .

Ясно так же, что Δn должно быть пропорционально концентрации молекул (n). Δn *зависит* и от самой

скорости, так как в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным (сложная фраза с простым смыслом: неодинаково, например, число людей в возрасте от 20 до 21 года и от 90 до 91 года). Итак:

$$\Delta n = n f(v) \Delta v \quad (12.2.2)$$

Или перейдя к пределу $dn = n f(v) dv$ (12.2.3)

где $f(v)$ – *функция распределения*.

Трудность вычисления (12.2.3) – в нахождении именно $f(v)$. Физический смысл $f(v)$: $\frac{dn}{n} = f(v)$, (12.2.4)

при $dv = 1$. Таким образом, $f(v)$ – **имеет смысл вероятности**. Т. е. $f(v)$ показывает, какова *вероятность* любой молекулы газа в единице объёма иметь скорость, заключённую в единичном интервале, включающем заданную скорость v .

В этом случае $f(v)$ называют *плотностью вероятности*.

10.3. Функция распределения Максвелла.

Распределение молекул идеального газа по скоростям было получено Максвеллом в 1860 году с помощью методов теории вероятностей.

Вывод формулы функции распределения есть:

С А М О С Т О Я Т Е Л Ь Н О

И.В. Савельев. Курс общей физики. Т.1.- М.: Наука, 1982, с.311-319.

Мы воспользуемся результатами этого вывода.

Скорость – векторная величина. Для x -ой составляющей скорости $dn_x = n f(v_x) dv_x$, тогда

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{ndv_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} = A_1 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}, \quad (12.3.4)$$

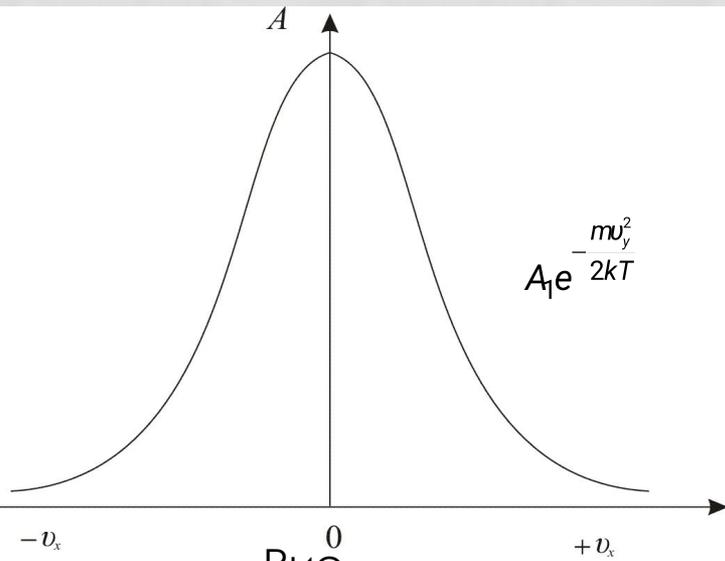


Рис.
2.1

где A_1 – постоянная равная $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}}$.
Графическое изображение функции показано на Рис 2.1. Видно, что доля молекул со скоростью $v_x = 0$ не равна нулю. При $v_x = 0$, $f(v_x) = A$ (в этом

физический смысл постоянной A). Приведённое выражение описывает распределение молекул газа по x -ым компонентам скорости. Очевидно, что и

$$\frac{dn_y}{ndv_y} = A_1 e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \quad \text{и} \quad \frac{dn_z}{ndv_z} = A_1 e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Вероятность того, что скорость молекулы одновременно удовлетворяет трём условиям: x – компонента скорости лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$; y – компонента, в интервале от v_y до $v_y + dv_y$; z – компонента, в интервале от v_z до $v_z + dv_z$ будет равна произведению вероятностей каждого из условий (событий) в отдельности! То есть

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A_1^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z, \quad (12.3.5)$$

Этой формуле можно дать геометрическое истолкование: dn_{xyz} – это число молекул в параллелепипеде со сторонами dv_x , dv_y , dv_z , то есть в объёме $dV = dv_x dv_y dv_z$, находящемся на расстоянии $\underline{\mathbf{v}}$ от начала координат в пространстве скоростей. Эта величина (dn_{xyz}) не может зависеть от направления вектора скорости $\underline{\mathbf{v}}$. Поэтому надо получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, то есть по абсолютному значению скорости.

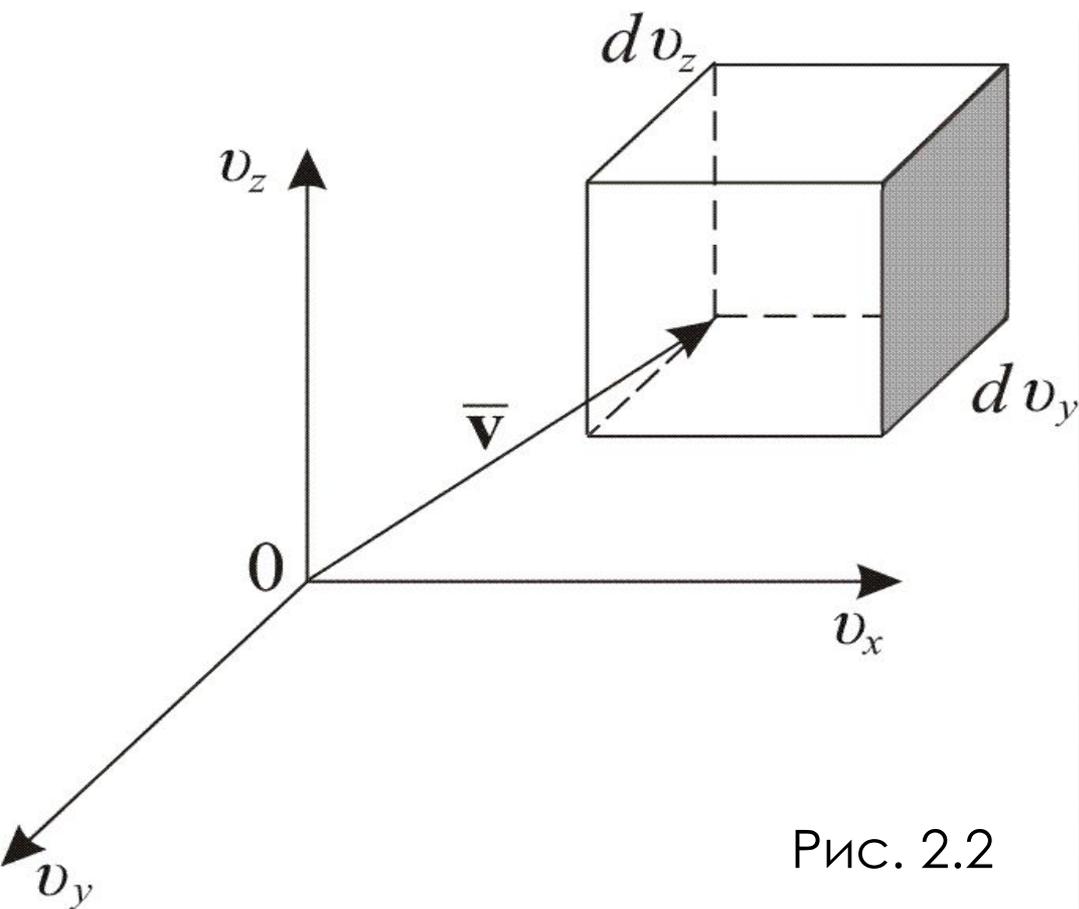


Рис. 2.2

Если собрать вместе все молекулы в единице объёма, скорости которых заключены в интервале от v до $v + dv$ (Рис. 2.2) по всем направлениям, и выпустить их, то они окажутся через одну секунду в шаровом слое толщиной dv и радиусом v (Рис. 2.3). Этот шаровой слой складывается из тех параллелепипедов, о которых говорится выше.

Объём этого шарового слоя $d\Omega = 4\pi v^2 dv$, (12.3.7)

Тогда общее число молекул в слое

$$dn = \frac{n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\Omega. \quad (12.3.8)$$

Отсюда следует Закон Максвелла – распределение молекул по абсолютным значениям скоростей!

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (12.3.9)$$

$\frac{dn}{n}$ – доля всех молекул единицы объёма, скорости которых лежат на интервале от v до $v + v$

При $dv = 1$ получаем плотность вероятности, или функцию распределения молекул по скоростям:

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (12.3.10)$$

Эта функция обозначает долю молекул единицы объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, равном единице включающем данную скорость.

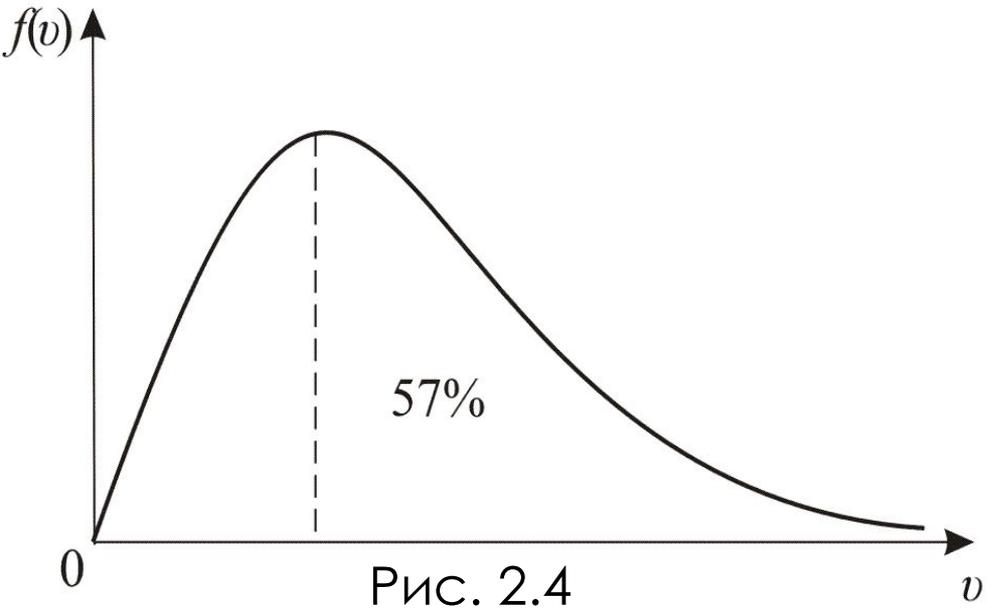


Рис. 2.4

Обозначим через

$$A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{тогда}$$

$$f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (12.3.11)$$

График этой функции показан на Рис. 2.4.

1) Вид физического распределения для каждого газа зависит от рода газа (m) и от параметра состояния (T). Давление p и объём газа V на распределение молекул не влияют. Рис. 2.5

2) В показателе степени стоит отношение кинетической энергии, соответствующей данной скорости v к (kT) – средней кинетической энергии молекул при данной температуре, значит распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии (то есть показывает, какова вероятность при данной температуре **иметь именно такое значение кинетической энергии**).

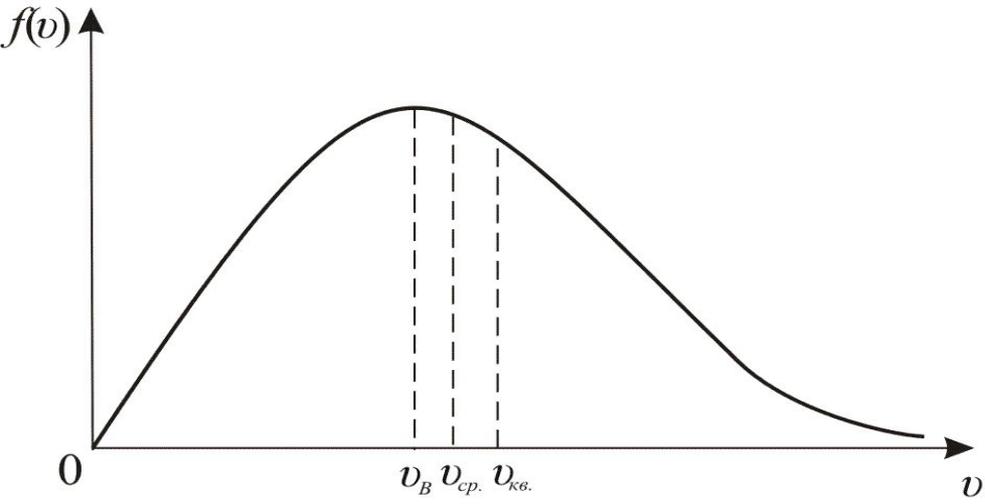


Рис. 2.5

Наиболее вероятная, средне квадратичная и средняя арифметическая скорости молекул газа

Скорость, соответствующая максимуму распределения есть наиболее вероятная скорость (Рис. 2.5).

$$u_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{— для одной молекулы.} \quad (12.3.12)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.} \quad (12.3.13)$$

Среднюю квадратичную скорость найдем используя соотношение $\frac{mv_{кв}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, тогда

$$u_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{— для одной молекулы.} \quad (12.3.14)$$

$$u_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.} \quad (12.3.15)$$

Средняя арифметическая

скорость — $u_{\text{ср}}$

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v n f(v) dv \quad (12.3.16)$$

где $= dn$ — число молекул со скоростью от u до $u + du$.
 Если подставить сюда $f(u)$ и вычислить, то

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m}}; \quad (12.3.17)$$

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}}. \quad (12.3.18)$$

Полезно знать,

$$\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{B}}} = 1,13; \quad \frac{v_{\text{KB}}}{v_{\text{B}}} = 1,22.$$

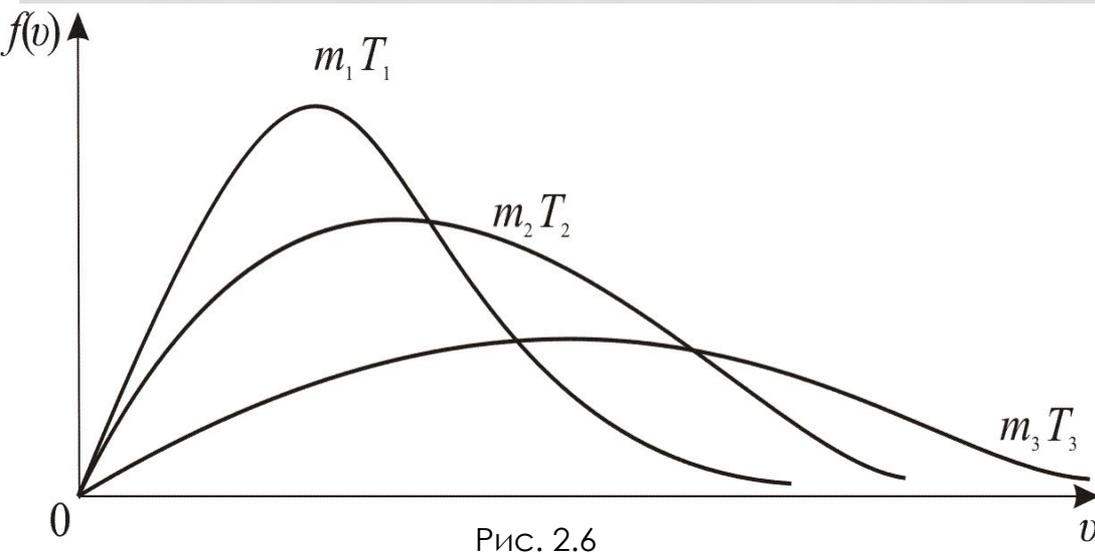


Рис. 2.6

**Зависимость
функции
распределения
Максвелла от массы
и температуры газа.**

Если у нас смесь газов, то в пределах каждого сорта газа будет своё распределение со своим m

$$f(v_{\text{B}}) \approx \sqrt{\frac{m}{T}}, \quad \text{кроме того } v_{\text{B}} \approx \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Можно проследить за изменением $f(v)$ при изменении m и T : $m_1 > m_2 > m_3$ ($T = \text{const}$) или $T_1 > T_2 > T_3$ ($m = \text{const}$) (Рис. 2.6). Площадь под кривой $f(v) = \text{const} = 1$ поэтому важно знать как будет изменяться положение максимальной кривой.

Максвелловский закон распределения по скоростям и все вытекающие следствия справедливы только для газа в равновесной системе. Закон статически и выполняется тем лучше, чем больше число молекул.

Формула Максвелла для относительных скоростей

Для решения многих задач удобно использовать формулу Максвелла, где скорость выражена в относительных единицах. Относительную
$$U = \frac{v}{v_B} \quad (12.3.19)$$

где $v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Тогда
$$\frac{dn}{ndU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} U^2 \quad (12.3.20)$$

Это уравнение универсальное. В таком виде функция распределения не зависит ни от рода газа ни от температуры.

2.4. Барометрическая формула.

Рассмотреть ещё один вероятный закон очень важно.

Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом выше лежащих слоёв газа. Пусть p – давление на высоте h , $p + \Delta p$ – на высоте $h + \Delta h$ (рис. 2.7). Причём $dh > 0$, $dp < 0$, так как на большой высоте давление меньше. Разность давления $p - (p + dp)$ равна весу газа, заключённого в объёме цилиндра с площадью основания равного единице и высотой dh , $p = \rho qh$, ρ медленно убывает с высотой.

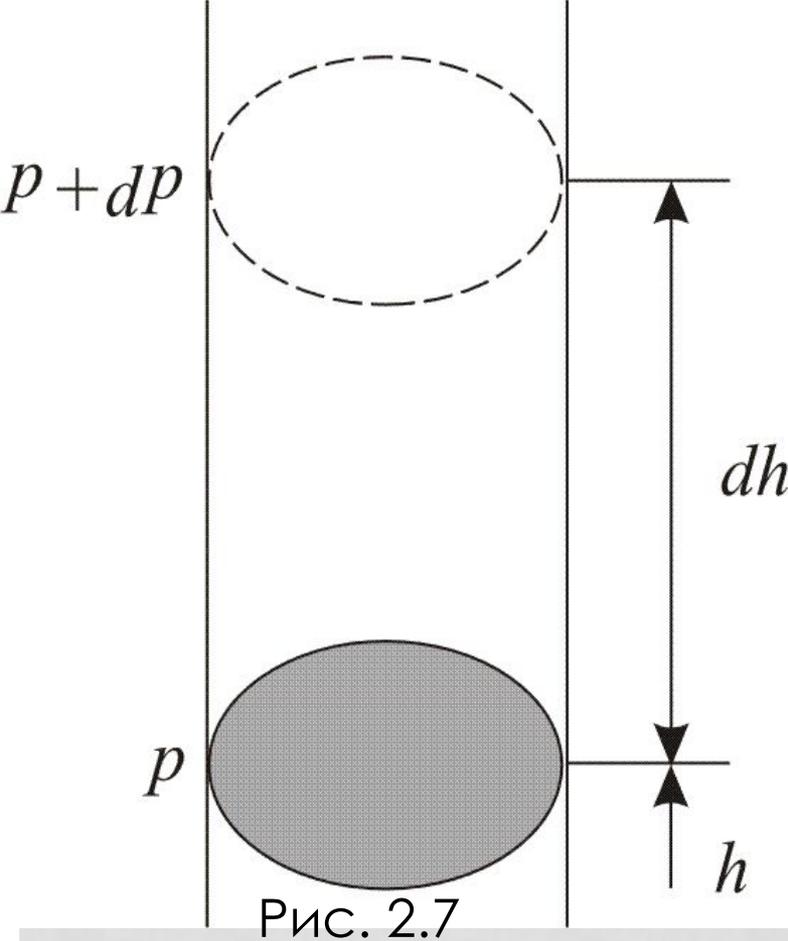


Рис. 2.7

$$p - (p + dp) = \rho q dh, \quad (12.4.1)$$

ρ – плотность газа на высоте h ,
тогда

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (12.4.2)$$

где p_0 – давление на высоте $h = 0$.

Это барометрическая формула.

Из формулы следует, что p

убывает с высотой тем быстрее,

чем тяжелее газ

10.5. Число столкновений и длина свободного пробега молекул в газах.

Обозначим λ_i – длина свободного пробега молекулы; $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега. Именно эта величина и нас интересует (рис. 10.8).

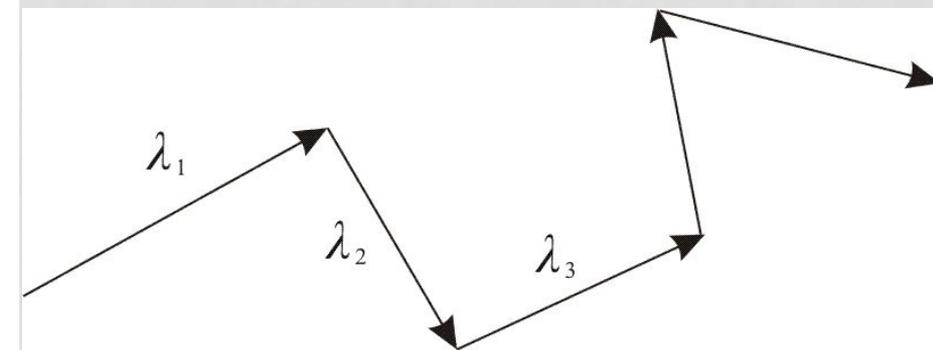


Рис. 10.8

Обозначим $S_{\text{эфф.}}$ – эффективное сечение молекулы (рис. 10.9).

Модель газа – твёрдые шарики одного диаметра взаимодействующие только при столкновении.

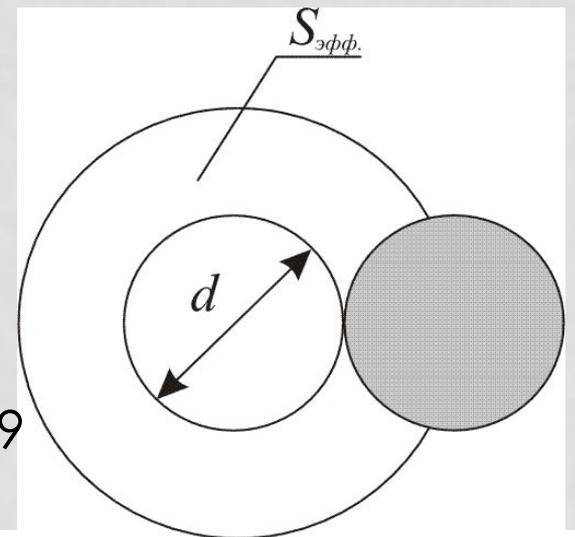
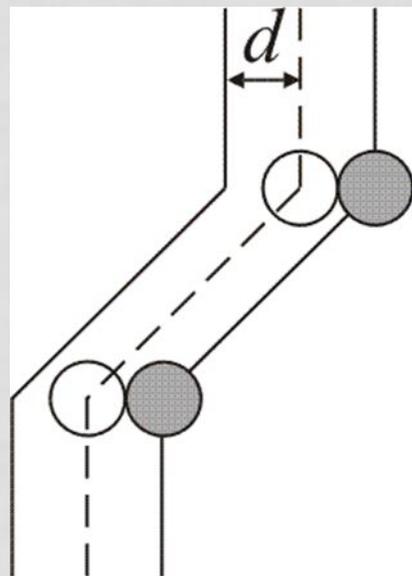


Рис. 10.9

$S_{\text{эфф}} = \pi d^2/4$ – площадь, в которую не может проникнуть центр любой другой молекулы. За одну секунду молекула проходит путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. За одну секунду молекула претерпевает ν столкновений.

Следовательно

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\nu}. \quad (10.3.1)$$



(Рис. 10.10)

Подсчитаем число столкновений ν .

Предположим, что все молекулы застыли, кроме одной. Её траектория будет представлять собой линию. Столкновения будут только с теми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра радиусом d (рис. 10.10).

Длина цилиндра за одну секунду равна $\langle v' \rangle$; умножив объём $\langle v' \rangle S$ на число молекул в единице объёма n , получим среднее число столкновений в одну секунду:

$$v = \pi d^2 \langle v' \rangle n. \quad (10.3.2)$$

По закону сложения случайных величин

$$\langle v' \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle + \langle v^2 \rangle} = \sqrt{2\langle v^2 \rangle} = \langle v \rangle \sqrt{2}. \quad (10.3.3)$$

А так как $\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{v}$, то получим $\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$. (10.3.4)

Так как $p = nkT$, то есть $n = \frac{p}{kT}$, то $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$, (10.3.5)

то есть $\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{p}$.

Здесь можно заметить, что с учётом введения нами ранее эффективного сечения молекулы $S_{\text{эфф.}}$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} S_{\text{эфф.}} p}. \quad (10.3.6)$$

10.4. Явления переноса в газах

1) Распространение молекул примеси в газе от источника называется *диффузией*.

Основные причины и закономерности диффузии, теплопроводности легче понять рассматривая явления переноса в газах.

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dx} S \quad (10.4.1)$$

2) Газ ускоряется, тело тормозится, то есть на тело действуют силы трения. Такая же *сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа, движущимися с разными скоростями*. Это явление носит название - *внутреннее трение или вязкость газа*, причём

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S \quad \text{или} \quad K = -\eta \frac{du}{dz} S \quad (10.4.2)$$

3) Если в соседних слоях газа создана и поддерживается разность температур, то между ними будет происходить обмен тепла. Благодаря хаотическому движению, молекулы в соседних слоях будут перемешиваться, и их средние энергии будут выравниваться.

Происходит перенос энергии от более нагретых к более холодным. Этот процесс называется *теплопроводностью*

$$Q = -\chi \frac{dT}{dx} S \quad \text{— поток тепла. (10.4.3)}$$

В процессе диффузии происходит перенос **вещества**, при внутреннем трении — перенос **импульса**, при теплопроводности — перенос **энергии** (тепла). А в основе лежит один и тот же механизм — хаотическое движение молекул. Общность механизма, обуславливающего все эти явления переноса приводит к тому, что их закономерности должны быть похожи друг на друга.

10.6. Диффузия газов

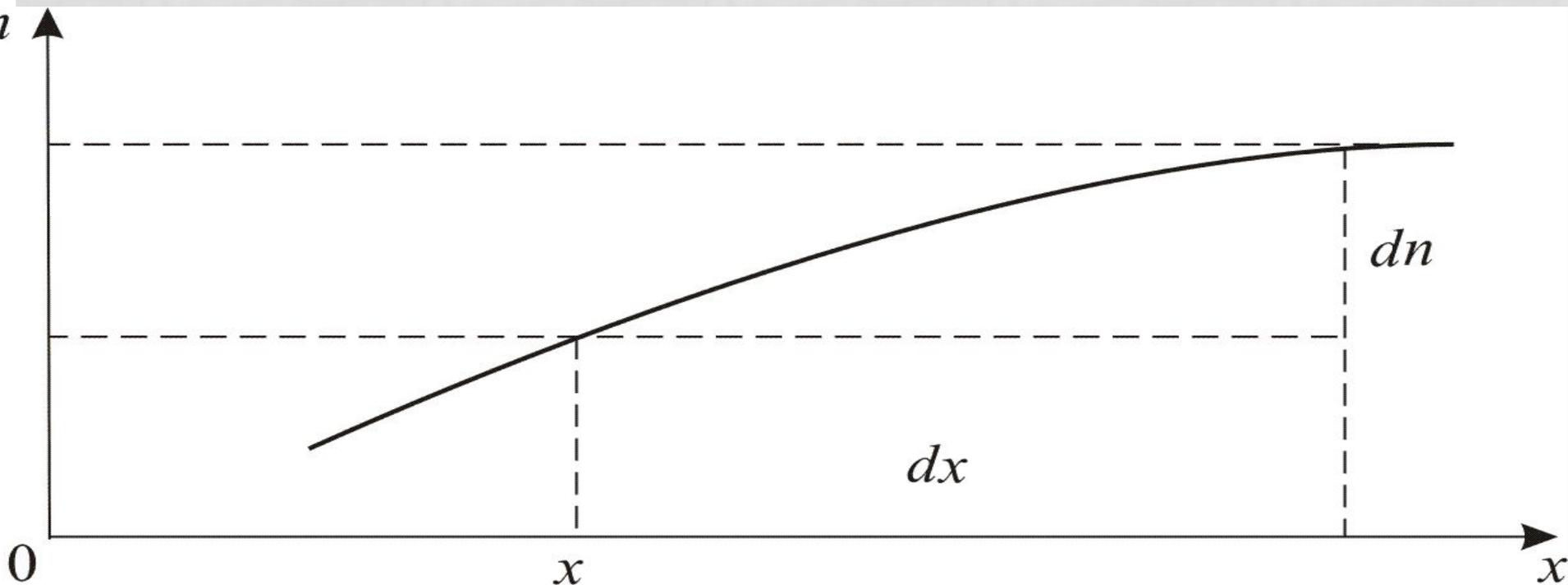


Рис. 10.11.

Диффузия – это распределение молекул примеси в газе от источника. Решаем одномерную задачу. Пусть в газе присутствует примесь с

концентрацией n в точке с координатой x . Концентрация примеси зависит от координаты x (рис. 10.11).

$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx} \mathbf{i} + \frac{dn}{dy} \mathbf{j} + \frac{dn}{dz} \mathbf{k} \quad (10.5.1)$$

– в общем случае. Так как у нас одномерная задача, то $\text{grad } n = \frac{dn}{dx}$

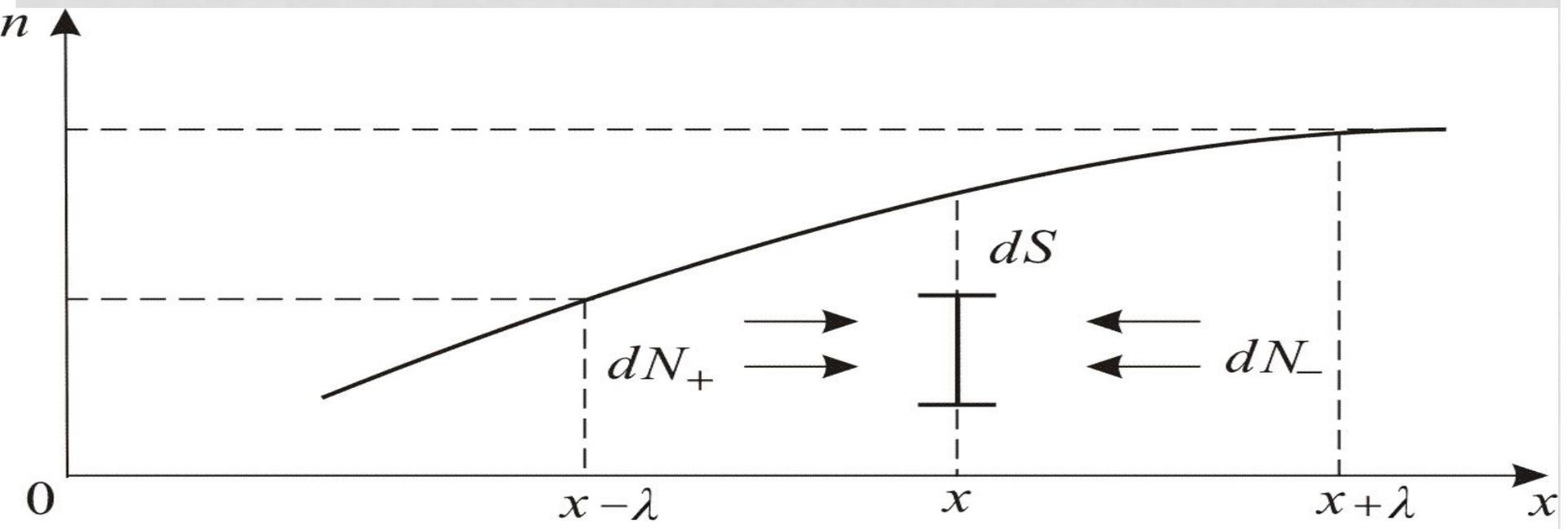


Рис. 10.12

При наличии $\text{grad } n$, хаотическое движение будет более направленным — стремиться выровняться по концентрации и возникнет поток молекул примеси, направленных от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией. Найдём этот поток. Пусть в плоскости с координатой x находится единичная площадка S перпендикулярная оси x . Подсчитаем число молекул, проходящих через площадку в направлении слева направо (N_+) и справа налево (N_-) — за время t (рис. 10.12).

$$N = N'_+ - N'_- \quad (10.5.2)$$

$$N'_+ = \frac{1}{6} n_1' \langle v \rangle S \quad N'_- = \frac{1}{6} n_1'' \langle v \rangle S \quad (10.5.3)$$

где n_1' — концентрация молекул слева от площади, а n_1'' — концентрация молекул справа от площади.

Через поверхность S ,будут пролетать молекулы, претерпевшие последнее соударение на различных расстояниях от S . Однако в среднем последнее соударение происходит на расстоянии от S , равном средней длине свободного пробега λ . Поэтому в качестве n_1' разумно взять значение $n_1(x-\lambda)$, а в качестве n_1'' - значение $n_1(x+\lambda)$

Тогда с учетом (10.6.2)

$$N = \frac{1}{6} \langle v \rangle S [n_1(x-\lambda) - n_1(x+\lambda)] \quad (10.5.4)$$

Поскольку λ очень мала, разность значений функций $n(x)$, стоящую в квадратных скобках, можно представить в виде

$$n(x-\lambda) - n(x+\lambda) = -\frac{dn}{dx} \lambda .$$

Подставив это в выражение (10.5.4), получим, что

$$N = -\left(\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda\right) \frac{dn}{dx} S \quad (10.5.5)$$

Сравнение выражения 10.5.5) с формулой 10.4.1) показывает, что исходя из молекулярно-кинетических представлений, удастся не только прийти к правильной зависимости N_1 от dn_1/dx , но и получить выражение для коэффициента диффузии D :

$$D = \left(\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda\right) \quad (10.5.6)$$

Более строгий расчет приводит к такой же формуле, но с несколько отличным числовым коэффициентом.

$$N = -D \frac{dn}{dx} S, \quad (13.3.7)$$

или в общем случае (в трёх мерной системе)

$$N = -D \mathbf{grad} n S$$

Уравнение Фика. Поток, направленный в сторону
уменьшения концентрации

$$[D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

численно равен потоку через единицу площади в единицу
времени при $\mathbf{grad} n = 1$.

10.7. Внутреннее трение. Вязкость газов

Таким образом средний импульс отдельной молекулы в слое определяется только дрейфовой скоростью v : $p_0 = m_0 v$.

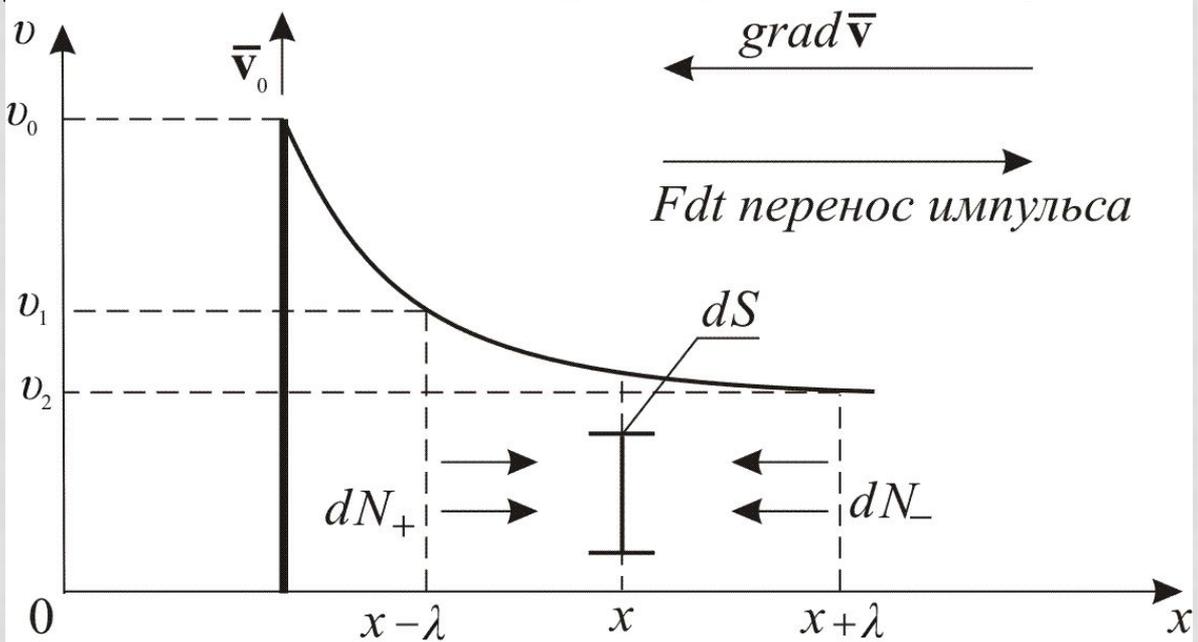


Рис. 10.13

Так как молекулы участвуют в тепловом движении, они будут переходить из слоя в слой. Они будут переносить с собой добавочный импульс, который определяется молекулами того слоя, куда перешла молекула. Перемешивание молекул разных слоёв приводит к выравниванию дрейфовых скоростей разных слоёв, что проявляется макроскопически как действие сил трения между слоями.

Вернёмся к рис. $v(x)$ и рассмотрим элементарную площадку dS перпендикулярно оси x . Через эту площадку за время dt влево и вправо переходят потоки молекул. Как мы уже говорили

$$N = \frac{1}{6} n \langle u \rangle S \quad (10.7.1)$$

Через площадку S в единицу времени переносится импульс $K = N(mu_1 - mu_2)$

(m – масса молекулы). Подстановка выражения (10.7.1) для N дает

$$K = \frac{1}{6} n \langle u \rangle S m (u_1 - u_2) \quad (10.7.2)$$

$$u_1 = u(z - \lambda) \quad \text{и} \quad u_2 = u(z + \lambda)$$

Подстановка этих значений в (10.7.2) дает для потока импульса в направлении оси z выражение

$$K = \frac{1}{6} n \langle u \rangle S m [u(z - \lambda) - u(z + \lambda)] S \quad (10.7.3)$$

Приняв во внимание, что произведение nm равно плотности газа ρ , можно записать

$$K = \left(\frac{1}{3} \langle u \rangle \lambda \rho \right) \frac{du}{dz} S \quad (10.7.4)$$

Сравнение с формулой (10.4.2) дает выражение для коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle u \rangle \rho = D \rho \quad (10.7.5)$$

Это уравнение называют – уравнением Ньютона, где D – коэффициент диффузии; ρ – плотность. Физический смысл η в том, что он численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости равном единице ($\mathbf{grad} \perp \mathbf{S}$).

10.8. Теплопроводность газов

Рассмотрим газ, заключённый между двумя параллельными стенками, имеющих разную температуру (T_a и T_b (рис. 10.14)). Итак, у нас имеется градиент температуры $\left(\frac{dT}{dx} \neq 0\right)$

тогда через газ в направлении оси x будет идти поток тепла. Хаотично двигаясь, молекулы будут переходить из одного слоя газа в другой, перенося с собой энергию. Это движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различную кинетическую энергию

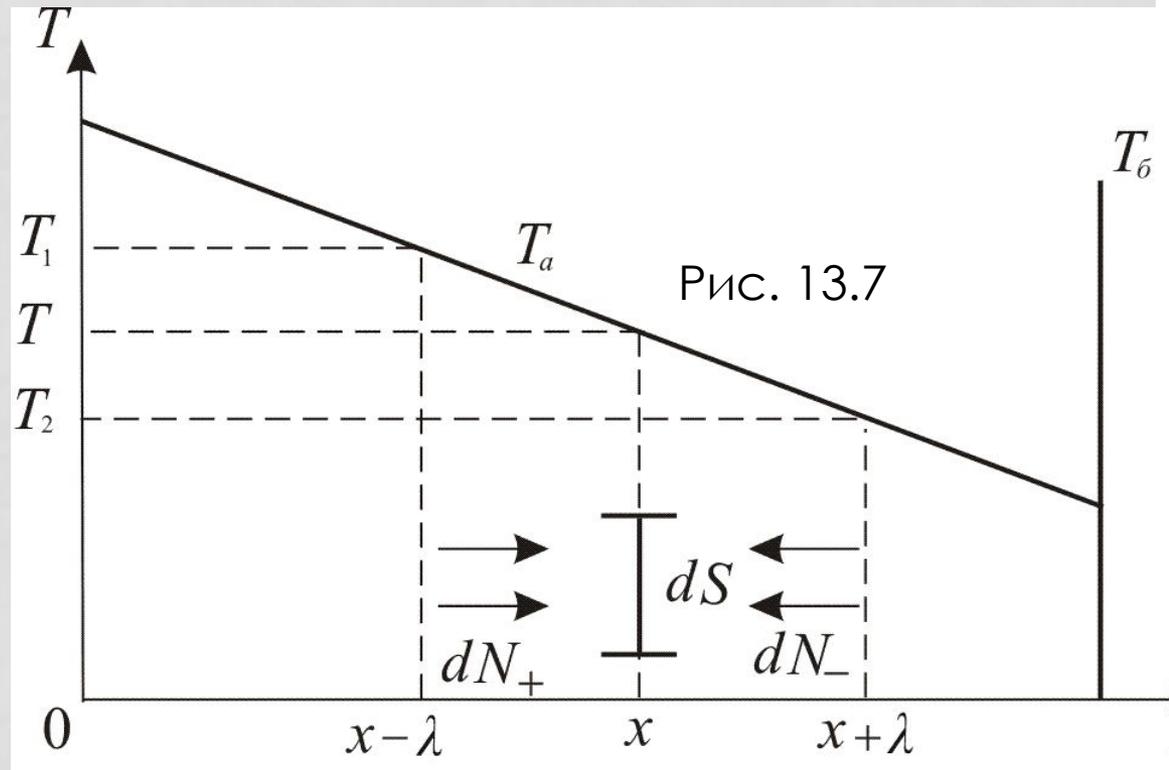


Рис. 10.14

$$W_{к.} = \frac{m_0 \overline{v_{кв}^2}}{2} = \frac{i}{2} kT$$

При подсчёте потока тепла введём следующие упрощения:

- 1) $\langle v \rangle = \text{const}$ (средне арифметическая скорость).
- 2) Примем, что концентрация молекул в соседних слоях тоже одинакова, (хотя на самом деле она различается. Это упрощение даёт ошибку $\approx 10\%$).

Снова вернёмся к рисунку: через площадку S за единицу времени проходит молекул.

Средняя энергия этих

$$N = \frac{1}{6} \langle v \rangle n S \quad (10.8.1)$$

молекул $W_{к}$ – соответствует значению энергии в том месте, где они испытывают последнее результирующее столкновение. Для одной молекулы газа:

$$W_{к_1} = \frac{i}{2} kT_1, \quad (10.8.2)$$

соответствующую температуре в том месте, где произошло ее последнее соударение с другой молекулой.

В соответствии со сказанным для потока тепла через площадку S в положительном направлении оси x получается выражение $Q = N(W_{k1} - W_{k2})$

где N – определяется формулой (10.8.1). Подстановка значений N , W_{k1} , W_{k2} дает

$$Q = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \left(\frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) \quad (10.8.3)$$

Разность $T_1 - T_2$ равна $T(x - \lambda) - T(x + \lambda) = -\frac{dT}{dx} 2\lambda$ (10.8.4)

Здесь $\frac{dT}{dx}$ - производная от T по оси x в том месте, где расположена плоскость S . Тогда

$$Q = -\frac{1}{6} n \langle v \rangle S \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx} 2\lambda = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \left(\frac{i}{2} kn \right) \frac{dT}{dx} S \quad (10.8.5)$$

Сопоставление этой формулы с формулой (10.4.3) дает для коэффициента теплопроводности следующее выражение

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \left(\frac{i}{2} nk \right) \quad (10.8.6)$$

10.9. Коэффициенты переноса и их зависимость от давления

Сопоставим

$$N = -D \mathbf{grad}U \quad \text{или} \quad N = -D \frac{dn}{dx} \quad \text{Уравнение Фика для диффузии;}$$

$$K = -\eta \mathbf{grad}u \quad \text{или} \quad K = -\eta \frac{du}{dz} \quad \text{Уравнение Ньютона для трения;}$$

$$Q = -\chi \mathbf{grad}T \quad \text{или} \quad q = -\chi \frac{dT}{dx} \quad \text{Уравнение Фурье для теплопроводности}$$

Все эти законы были установлены опытно, задолго до обоснования молекулярно – кинетической теорией. Эта теория позволила установить, что внешнее сходство уравнений обусловлено общностью лежащих в их основе молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их теплового хаотического движения. Однако к концу XIX века, несмотря на блестящие успехи молекулярно – кинетической теории ей не доставало твёрдой опоры

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$$

Коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle u \rangle \rho = D \rho$$

Коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle u \rangle \rho c_v = D \rho c_v$$

(здесь m – масса одной молекулы, а $nm = \rho$ – плотность).

Из анализа этих формул вытекает целый ряд важных выводов.