
Перенос изображения сквозь толщу мутной среды

Будак Владимир Павлович,
Московский энергетический институт (ТУ)
кафедра светотехники

Tomoyuki Nishita (Fukuyama University), Eihachiro
Nakamae (Hiroshima Prefectural University)

☐: +7 (095) 763-5239

BudakVP@mpei.ru



ФРТ и ОПФ слоя мутной среды

Выражения для мощности сигналов от подложки и объекта:

$$P_{\text{пл}} = \bar{\rho}\Phi_0 \int E_{\omega}(\mathbf{r}')E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^2r', \quad P_{\text{пс}} = \Phi_0 \int \rho(\mathbf{r}')E_{\omega}(\mathbf{r}')E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^2r'$$

$$E_{\left\{\begin{smallmatrix}\omega \\ \Omega\end{smallmatrix}\right\}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi} \int \left\{\begin{smallmatrix}\omega \\ \Omega\end{smallmatrix}\right\}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{l}}')\psi(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}', \Rightarrow E_{\left\{\begin{smallmatrix}\omega \\ \Omega\end{smallmatrix}\right\}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \int \left\{\begin{smallmatrix}\omega \\ \Omega\end{smallmatrix}\right\}(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}')e(z, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}')d^2r'd\hat{\mathbf{l}}'$$

По определению ФРТ системы есть реакция на точечный объект – $\delta(\mathbf{r})$:

$$P_{\text{пс}} = \Phi_0 \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)E_{\omega}(\mathbf{r}')E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^2r' = \Phi_0 E_{\omega}(\mathbf{r}_0)E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \Rightarrow h(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = E_{\omega}(\mathbf{r}')E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

- Система не является инвариантной к сдвигу- нельзя ввести ОПФ
- В наиболее реализуемых схемах №1 и 2 диаграммы направленности источника и приемника несопоставимы друг с другом определяется ОПФ (на примере №2):

$$h(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx E_{\omega}(0)E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Rightarrow H(\mathbf{v}) = E_{\omega}(0)F\{E_{\Omega}(\mathbf{r})\}$$

$$T(\mathbf{v}) = \frac{H(\mathbf{v})}{H(0)}, \quad H(0) \approx \eta_{\text{пс}} = \int E_{\omega}(\mathbf{r}')E_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^2r' = \int E_{\omega}(\mathbf{v})E_{\Omega}(\mathbf{v})d^2\mathbf{v}, \quad P_{\text{пс}}(\mathbf{v}) = \Phi_0 \eta_{\text{пс}} \tilde{\rho}(\mathbf{v})T(\mathbf{v}), \quad P_{\text{пл}} = \eta_{\text{пс}} \bar{\rho}\Phi_0$$

*Для определение ОПФ и ФРТ необходимо знать решение УПИ
для случая ТД источника*

Яркость дымки – помеха обратного рассеяния (ПОР)

$$D(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \Phi_0 \int | (z; \mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}' \rightarrow \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \omega(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}') d^2 r' d\hat{\mathbf{l}}'$$

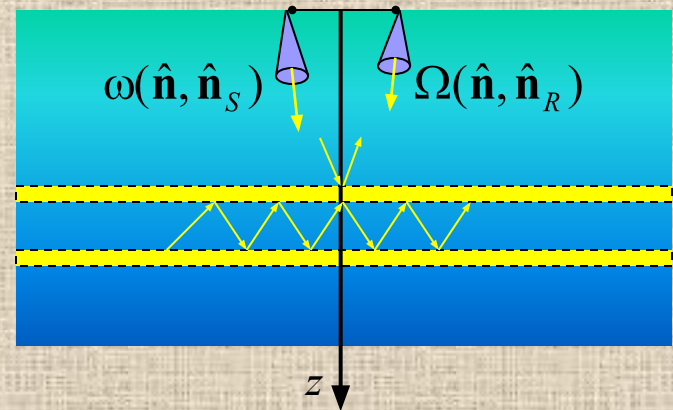
Представим весь слой в виде совокупности слоев, отражающих по закону Lambert (Johann, 26.08.1728 - 25.09.1777). Тогда яркость дымки от слоя можно представить в виде

$$\bar{\rho} = \frac{\Lambda \epsilon}{4\pi} x_\pi dz \Rightarrow dD(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda \epsilon}{4\pi} x_\pi \Phi_0 \int E_\omega(\mathbf{r}') E_\Omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r' dz$$

Тогда общая яркость дымки (помехи) обратного рассеяния:

$$D(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda \epsilon}{4\pi} x_\pi \Phi_0 \int_{z_1}^{\infty} \int E_\omega(\mathbf{r}') E_\Omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r' dz$$

Последнее выражение можно получить более строго из теории возмущений.



Яркость дымки (помехи) обратного рассеяния на основе теории возмущений так же выражается через решение для ТД

Решение УПИ для ТД-источника в среде с сильно анизотропным рассеянием

- Сильно анизотропное рассеяние - малоугловое приближение (МУП)
- МУП – разновидность параксиального приближения в оптике мутных сред
- В параксиальном приближении и МУП $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$
- При этом поле ТД эквивалентно полю ТИ источника

В случае ТИ-источника УПИ принимает вид

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L(r, \mu), \quad \mu = \frac{(\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{r})}{r} : \begin{cases} \mu \frac{\partial L(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial L}{\partial \mu} = -\varepsilon L(r, \mu) + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(r, \mu') d\hat{\mathbf{l}}' \\ L(r, \mu)|_{r \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{l}}) \end{cases}$$

- Наиболее общая форма МУП – Goudsmit-Saunderson
- Решение для ТД получено только в форме Компанеца-Molière-Snyder-Scott
- В 80-х удалось обобщить Goudsmit-Saunderson – МСГ: малоугловая модификация метода сферических гармоник

МСГ является обобщением МУП в форме Goudsmit-Saunderson и основывается на методе СГ

Малоугловая модификация метода сферических гармоник

Представим все угловые зависимости в УПИ в виде рядов по сферическим функциям:

$$L(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi r^2} C_k(r) P_k(\mu), \quad x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x_k P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}'), \quad x(\mu) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\mu)^{3/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) g^k P_k(\mu)$$

что после преобразований в соответствии с СГ приведет к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{2k+1} \frac{d}{dr} [(k+1)C_{k+1}(r) + kC_{k-1}(r)] + \frac{k(k+1)}{(2k+1)r} (C_{k+1}(r) - C_{k-1}(r)) = -\varepsilon(1 - \Lambda x_k) C_k(r)$$

Тело яркости сильно анизотропная по углу функция:

- Наличие особенностей по углу: δ -особенность в прямом излучении, θ^{-1} – в первой и логарифмической во второй
- Кратности выше третьей являются гладкими функциями по анизотропии близкими к индикатрисе – сильная анизотропия рассеяния
- Коэффициенты C_k очень медленно меняются с номером k

Определим непрерывную функцию $C(k, r)$ в целочисленных точках k равную значениям коэффициентов $C_k(r)$

Решение УПИ в МСГ для ТИ



- Чем быстрее убывает оригинал, тем медленнее убывает изображение
- Поскольку зависимость от k очень медленная, то допустим

$$C(k \pm 1, r) \approx C(k, r) \pm \frac{\partial C}{\partial k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial k^2} + \dots$$

Ограничимся 2 первыми членами – линейная аппроксимация:

$$\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{2k(k+1)}{2k+1} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial k} + \varepsilon(1 - \Lambda x(k))C(k, r) = 0$$

Сделаем замену переменных: $(r, k) \Rightarrow (r, \xi = r/p), p = \sqrt{k(k+1)}$

$$\frac{dC}{dr} + \varepsilon[1 - \Lambda x(r/\xi, r)]C(\xi, r) = 0 \Rightarrow C_k(r) = F\left(\frac{r}{p}\right) \exp\left\{-\int_0^r \varepsilon(\xi) d\xi + \int_0^r \sigma(\xi) x(\xi, \frac{\xi}{r} p) d\xi\right\}$$

$$C_k(r) = \exp\left[-\varepsilon r + \Lambda \int_0^r x\left(\frac{\xi}{r} p\right) d\xi\right] = \exp\left[-\varepsilon r + \Lambda \int_0^r g^{\frac{\xi}{r} p} d\xi\right] = \exp\left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{\Lambda}{\ln g} \frac{g^{\sqrt{k(k+1)}} - 1}{\sqrt{k(k+1)}}\right)\right]$$

Полученное выражение - распределение пространственной облученности от ТМ источника

Сигнал от подложки

Распределение облученности от точечного прожектора

$$E_{\left\{\omega\right\}}(\mathbf{r})=\frac{1}{\pi} \int\left\{\omega\right\}_{\Omega}(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}') e\left(z, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}'\right) d^2 r' d \hat{\mathbf{l}}'=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 k+1}{4 \pi r^2} C_k(r)\left\{\omega_k\right\}_{\Omega_k}$$

Если прожектор имеет распределение Gauss (Carl Friedrich, 30.04.1777-06.03.1855) по углу, то

$$\omega(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')=\frac{1}{\pi \alpha_0^2} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2}\right) \approx \frac{1}{\pi \alpha_0^2} \exp \left(\frac{2(\mu-1)}{\alpha_0^2}\right)=\frac{e^{-2 / \alpha_0^2}}{\pi \alpha_0^2} \exp \left(\frac{2 \mu}{\alpha_0^2}\right) \Rightarrow \omega_k=\exp \left(-\frac{k(k+1)}{4} \alpha_0^2\right)$$

Еще раз используя теорему сложения для полиномов Legendre (Adrien Marie, 18.09.1752-10.01.1833, 1783 - полиномы):

$$\eta_{\text{пс}}=\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 k+1}{4 \pi z^2} \omega_k \Omega_k C_k^2(z) P_k\left(\hat{\mathbf{n}}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}_S\right)\bigg|_{\left(\hat{\mathbf{n}}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}_S\right)=1}=\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 k+1}{4 \pi z^2} \omega_k \Omega_k C_k^2(z)$$

Многократные интегралы сведены к однократной сумме по полиномам Legendre

ОПФ слоя мутной среды

$$H(\nu) = E_\omega(0) F \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi z^2} \Omega_k C_k(z) P_k(\hat{\mathbf{n}}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}_S) \right\} = E_\omega(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi z^2} \Omega_k C_k(z) F \{ P_k(\hat{\mathbf{n}}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}_S) \}$$

$$F \{ P_k(\hat{\mathbf{n}}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}_S) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\hat{\mathbf{n}}_R, \hat{\mathbf{n}}_S) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{r}'} d^2 r' = 2\pi \int_0^\infty P_k(\hat{\mathbf{n}}_R, \hat{\mathbf{n}}_S) J_0(\mathbf{v}\mathbf{r}') r' dr'$$

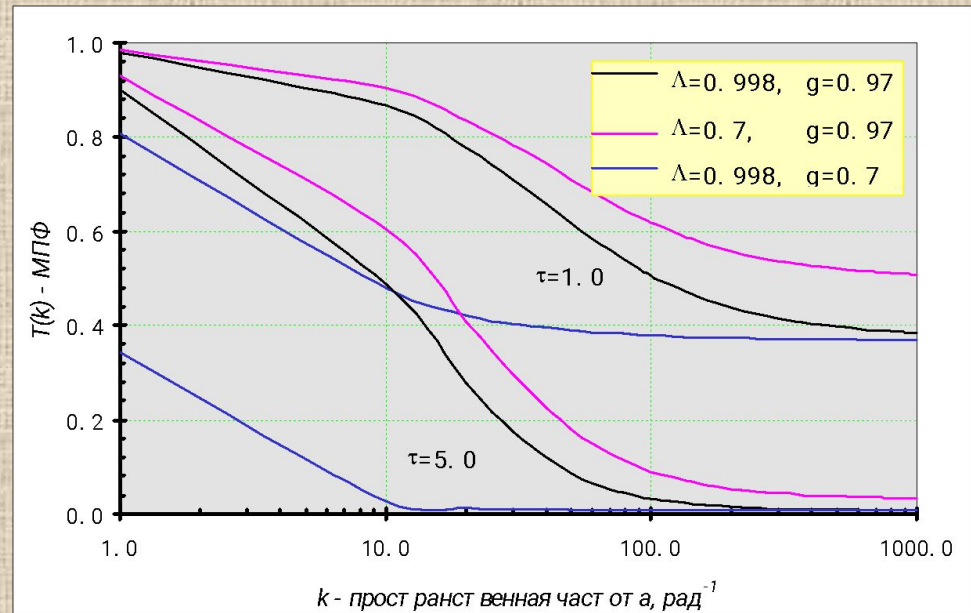
С учетом связи полиномов Legendre с функциями Bessel (Friedrich Wilhelm, 22.07.1784 – 17.03.1846)

$$F \{ P_k(\cos \alpha) \} = 2\pi z \int_0^\infty P_k(\cos \alpha) J_0 \left(\nu z \cdot \frac{r}{z} \right) \frac{r}{z} d \left(\frac{r}{z} \right)$$

$$\approx 2\pi z^2 \int_0^\infty J(k\alpha) J_0(\nu z \alpha) \alpha d\alpha = z^2 \frac{2\pi}{k} \delta(k - \nu z) \Big|_{k \gg 1}$$

$$\approx \frac{4\pi z^2}{2k+1} \delta_{k, \nu z} \Rightarrow H(\nu) = E_\omega(0) \Omega_{\nu z} C_{\nu z}(z)$$

$$T(\nu) = \Omega_{\nu z} \exp \left[-\Lambda \varepsilon z \left(1 - \frac{1}{\ln g} \frac{g^{\sqrt{\nu z(\nu z + 1)}} - 1}{\sqrt{\nu z(\nu z + 1)}} \right) \right]$$



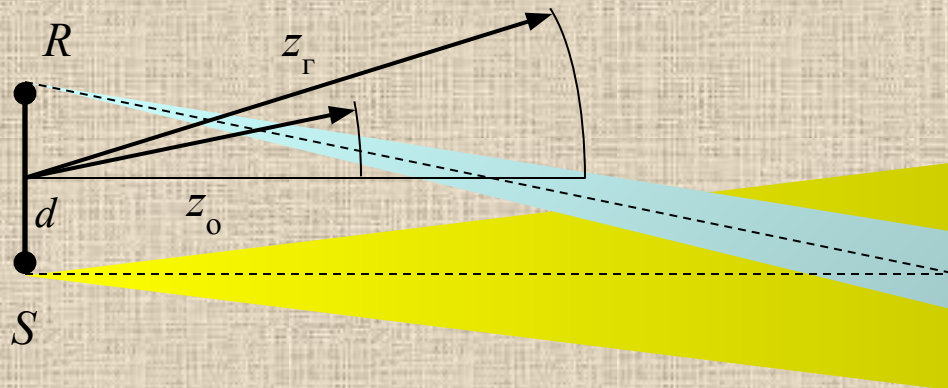
*Особенность ОПФ слоя мутной среды – наличие «полочки»:
прямая бугеровская компонента – наличие δ -особенности ФРТ*

Яркость ПОР

$$P_{\text{пор}}(\hat{\mathbf{n}}_R, \hat{\mathbf{n}}_S) = \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} x_\pi \Phi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \omega_k \Omega_k \int_{z_1}^{z_2} \frac{C_k^2(z)}{z^2} dz P_k(\hat{\mathbf{n}}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}_S)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{C_k^2(z)}{z^2} dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} \exp \left[-2\varepsilon z \left(1 - \frac{\Lambda}{\ln g} \frac{1 - g^{\sqrt{k(k+1)}}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \right] dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\exp(-2\varepsilon z f_k)}{z^2} dz = \frac{1}{z_1} E_1(2\varepsilon z f_k z_1) - \frac{1}{z_2} E_1(2\varepsilon z f_k z_2)$$

Задача определения z_1 и z_2 является нетривиальной:



$$z_1 = \begin{cases} 1 \\ \varepsilon \end{cases} \begin{cases} \text{граница однократного рассеяния} \\ \text{геометрическое пересечение} \end{cases}$$

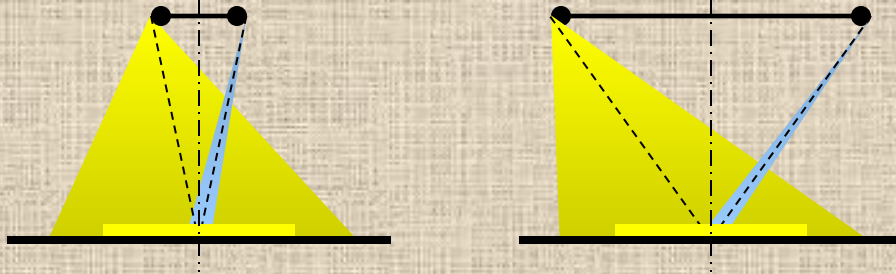
ПОР – главный фактор, ограничивающий видение в мутной среде

Методы подавления ПОР

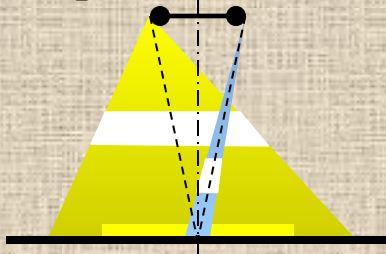
Поскольку $R_{\text{пор}}$ и $R_{\text{пс}}$ являются нелинейными компонентами, то передачу контраста будет характеризовать функция передачи контраста - ПЧХ

$$T_{\text{сист}}(v) = \frac{H(v)}{\eta_{\text{пс}} + \eta_{\text{пс}}\bar{\rho} + \frac{R_{\text{пор}}}{\Phi_0}} = \frac{T(v)}{1 + \bar{\rho} + \frac{R_{\text{пор}}}{\eta_{\text{пс}}\Phi_0}} \quad - \text{главная задача снижение } R_{\text{пор}}$$

1. Увеличение оптической базы d - уменьшение z_1 :



2. Метод пространственной селекции:



3. Метод поляризационной дискриминации:

- ПОР формируется ближайшими слоями среды
- ПОР сильно поляризована
- Сигнал напротив деполаризован многократным рассеянием и ламбертовским отражением

При наблюдении объектов на темном фоне при малых оптических базах наиболее эффективен МПС