

Методы оптимизации

Оптимизация

- При поиске экстремальной точки осуществляется локальное изучение поверхности отклика. Экстремальное значение отклика достигается с помощью многократного последовательного изучения поверхности отклика и продвижения в факторном пространстве с помощью шагов.
- Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров (прочность, эластичность, относительное удлинение)
- Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.
- Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения цели исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями.
- Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров.

Применение численных методов

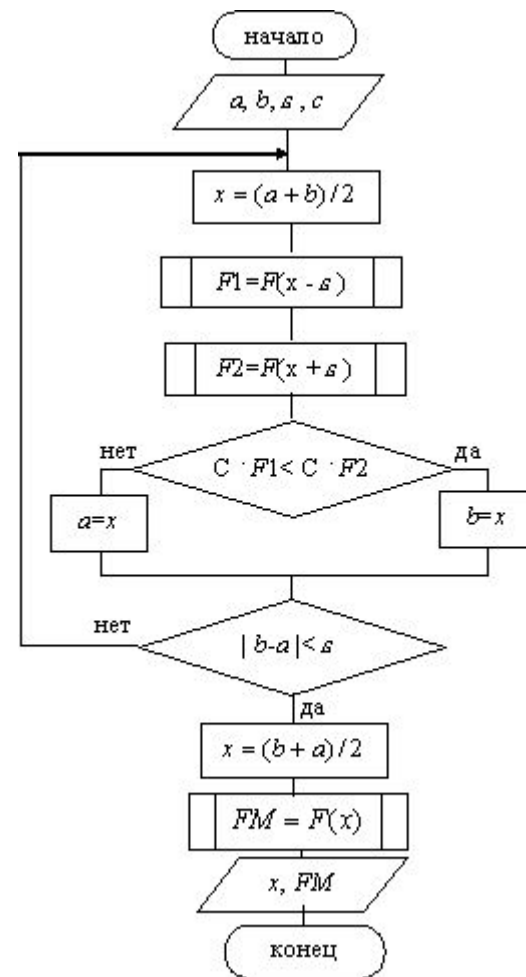
- Главное отличие численных методов от аналитических в том, что действия выполняются не с выражениями, а со значениями, когда соотношение или функция имеют определенный вид и поиск решения заключается в применении алгоритма.

Численные методы	Алгоритмические	Перебора	Итерационные	Интерполяционные
<i>Решение уравнений</i>		Прямого перебора Половинного деления	Простых итераций	Секущих Касательных Ньютона
<i>Решение систем уравнений</i>	Гаусса LU-разложения Прогонки		Якоби Зейделя	Ньютона
<i>Интегрирование</i>				Прямоугольников Трапечий Симпсона Сплайн-интерполяции
<i>Дифференцирование</i>				Численного дифференцирования
<i>Нахождение экстремумов</i>		Прямого перебора Трихотомии		Параболической интерполяции
<i>Другое</i>	Действия над матрицами Полином большой степени			

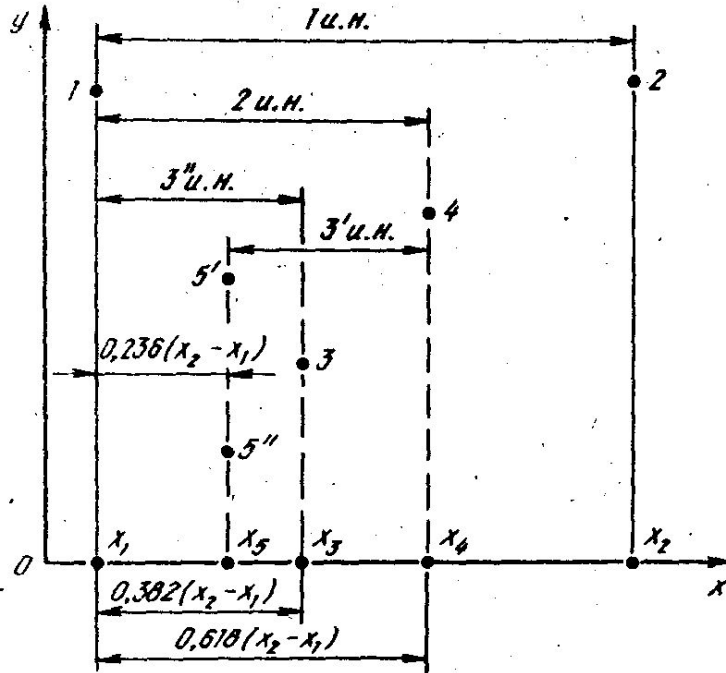
ОПТИМИЗАЦИЯ
ОДНОФАКТОРНЫХ
ОБЪЕКТОВ.

Деление отрезка пополам

- Существует довольно очевидная теорема: *"Если непрерывная функция на концах некоторого интервала имеет значения разных знаков, то внутри этого интервала у нее есть корень (как минимум, один, но м.б. и несколько)"*. На базе этой теоремы построено численное нахождение приближенного значения корня функции. Обобщенно этот метод называется **дихотомией**, т.е. **делением отрезка на две части**.
- Обобщенный алгоритм выглядит так:
 1. Задать начальный интервал;
 2. Убедиться, что на концах функция имеет разный знак;
 3. Повторять пока не будет достигнута нужная точность:
 - выбрать внутри интервала точку;
 - сравнить знак функции в точке со знаком функции в одном из концов;
 - если совпадает, то переместить этот конец интервала в точку,
 - иначе переместить в точку другой конец интервала;



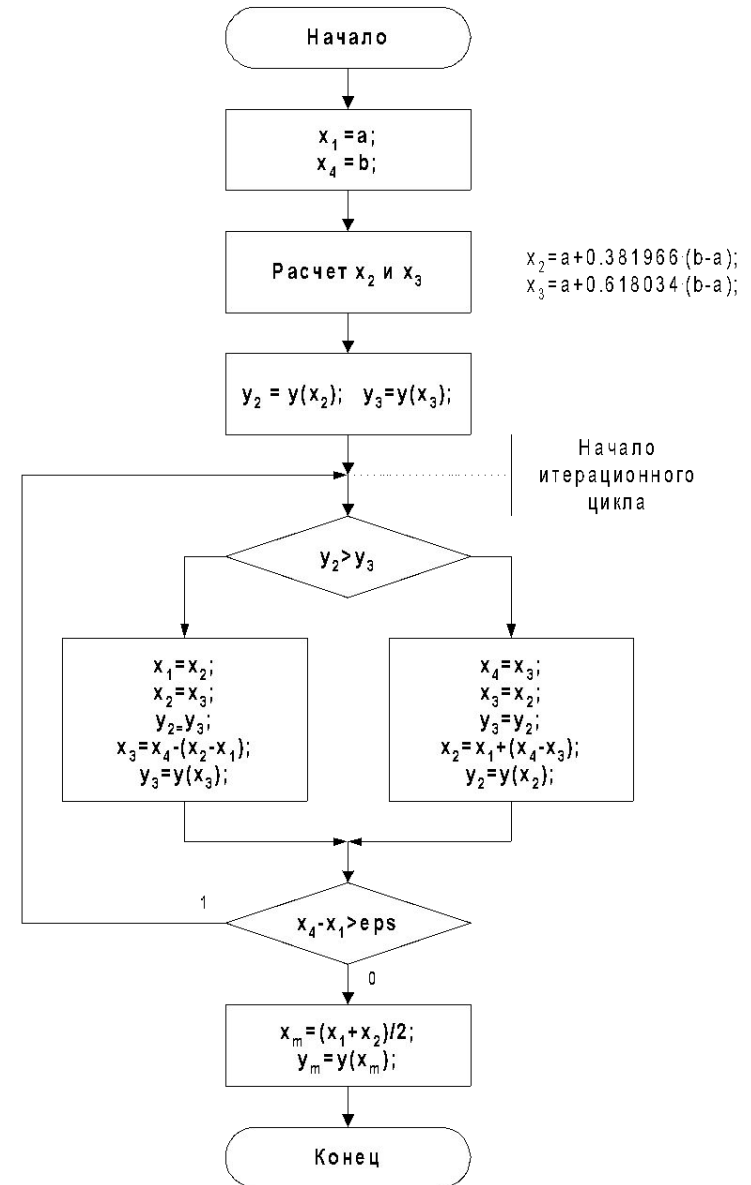
Метод золотого сечения



$$\delta x = b - a$$

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = \delta x \\ L_2 / L_1 = L_1 / \delta x \end{cases}$$

- $L_1 > L_2$; $L_2 / L_1 = 0,618$
- $X_4 = 0,618 (X_2 - X_1)$



Метод Фибоначчи

- Числа Фибоначчи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3$.

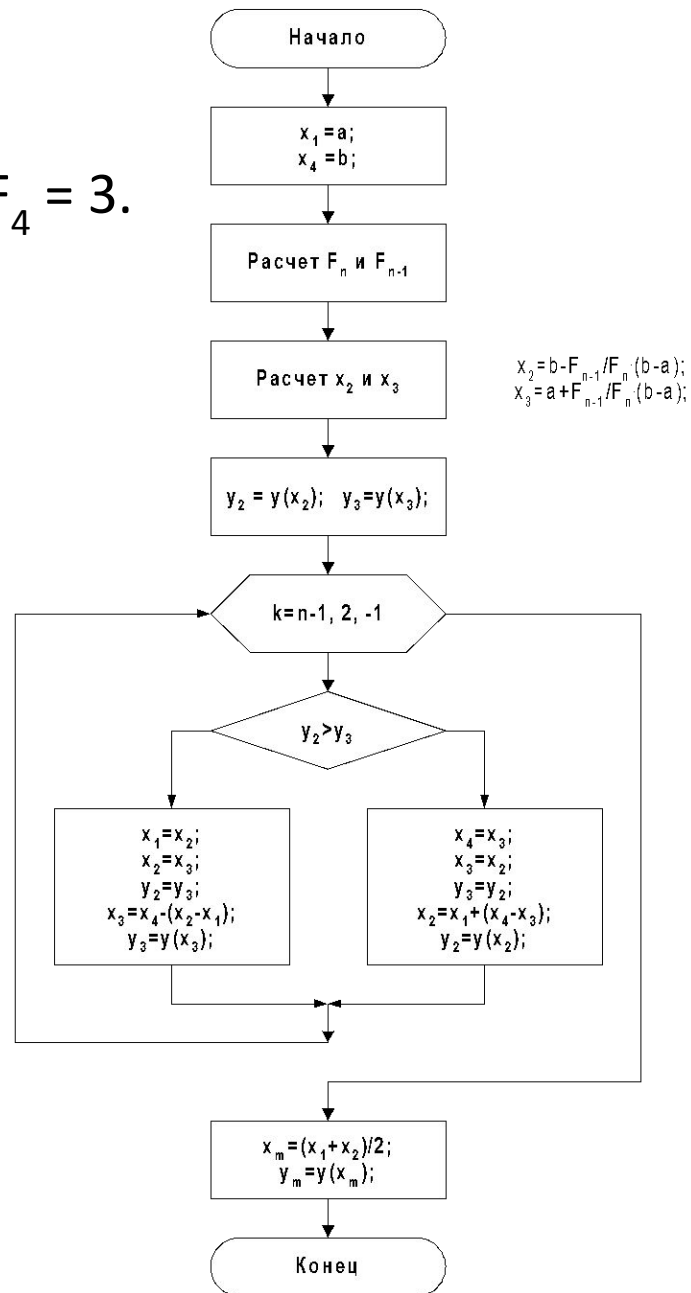
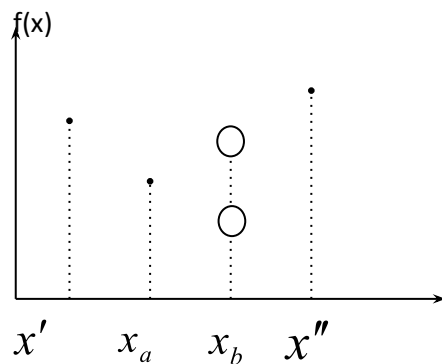
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n > 2$.

- Погрешность определяется $E_0 = \frac{L_0}{F_{N+2}}$

- Скорость сужения интервала $\frac{1}{(2E)}$

$$x_a = x' + \left(\frac{F_n}{F_{n+2}} \right) \cdot (x'' - x')$$

$$x_b = x'' + \left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \right) \cdot (x' - x'')$$



Метод парабол

- Наиболее часто используемый машинный метод
- Пусть есть функция с минимумом на отрезке **ab**. Выбирается три точки x_1, x_2, x_3 – любые. Через эти три точки проводится парабола.

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$$

- Построим квадратный трехчлен $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- Точку минимума можно определить, приравняв производную к 0:

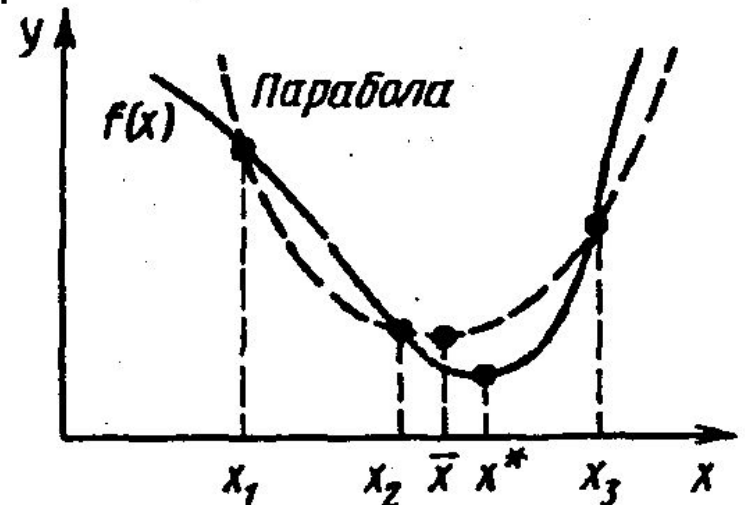
$$a_0 = f_1 \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

- очередное приближение

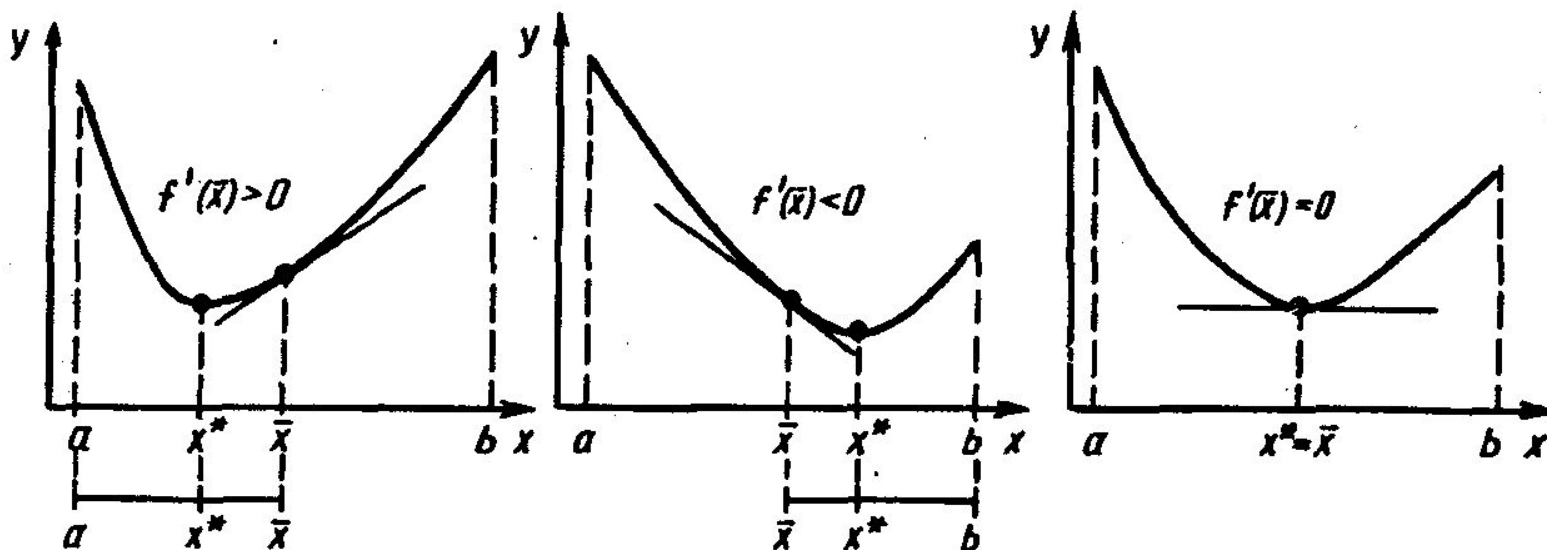
$$\bar{x} = \frac{1}{2} \left(x_1 - x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right)$$

- Затем переходят к новому отрезку



Метод средней точки

- возможен только для функции, где берется первая производная.
- В этом случае вычисление значений функции можно заменить вычислением производной вблизи середины данного отрезка.
- Если $f'(\bar{x}) > 0$, то точка середины лежит на участке возрастания $\Rightarrow$ необходимо исследовать отрезок $a\bar{x}$.



Метод Хорд

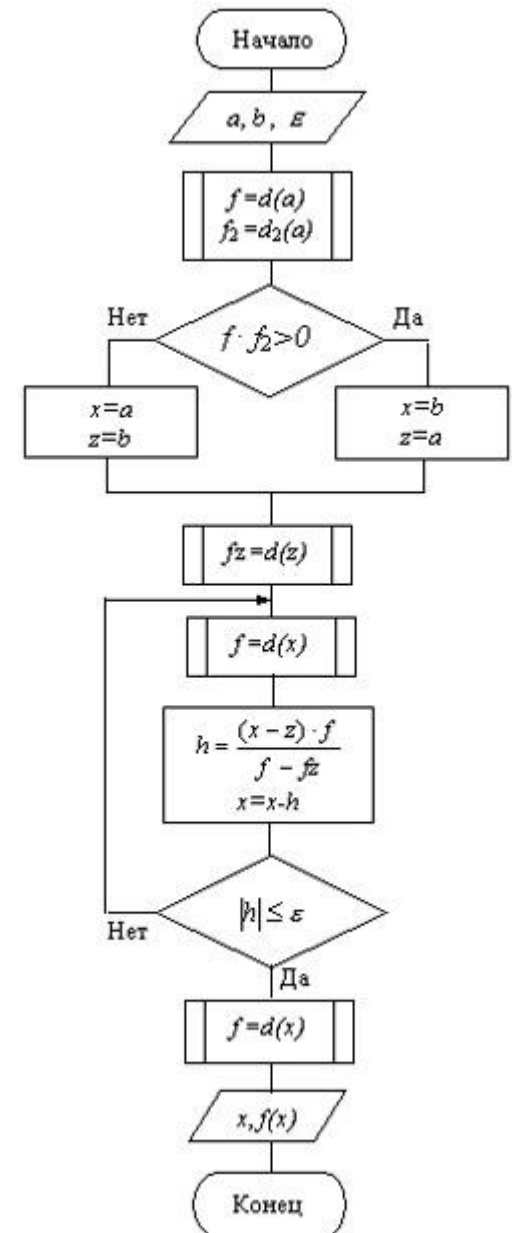
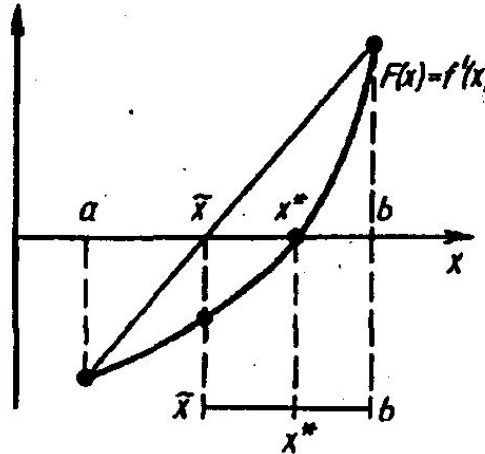
- Если на отрезке ab производная имеет разные знаки

$$f'(a) \cdot f'(b) < 0$$

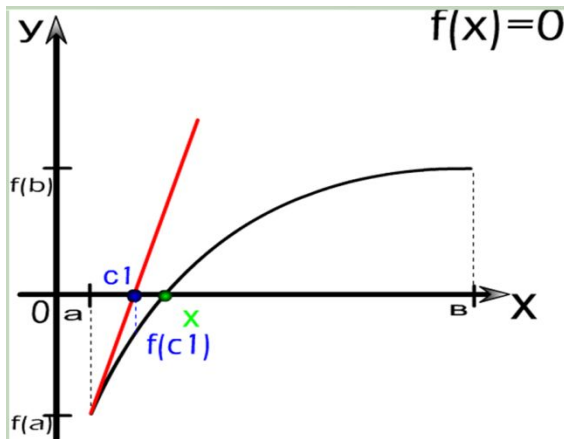
- то обязательно найдется точка экстремума

$$f'(x) = 0$$

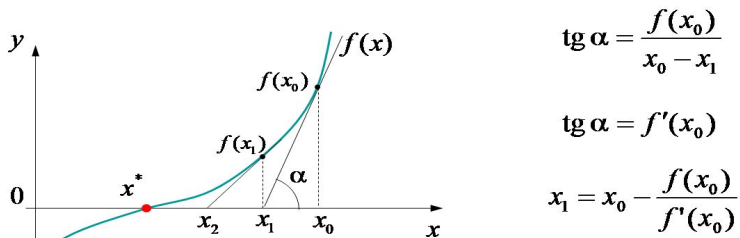
$$\tilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b)$$



Метод Ньютона



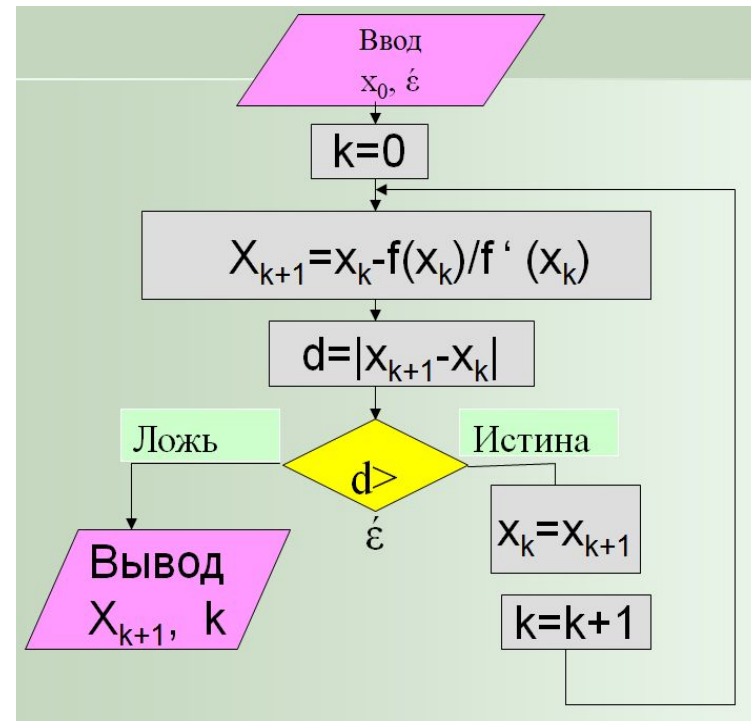
Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



! Общая формула метода Ньютона

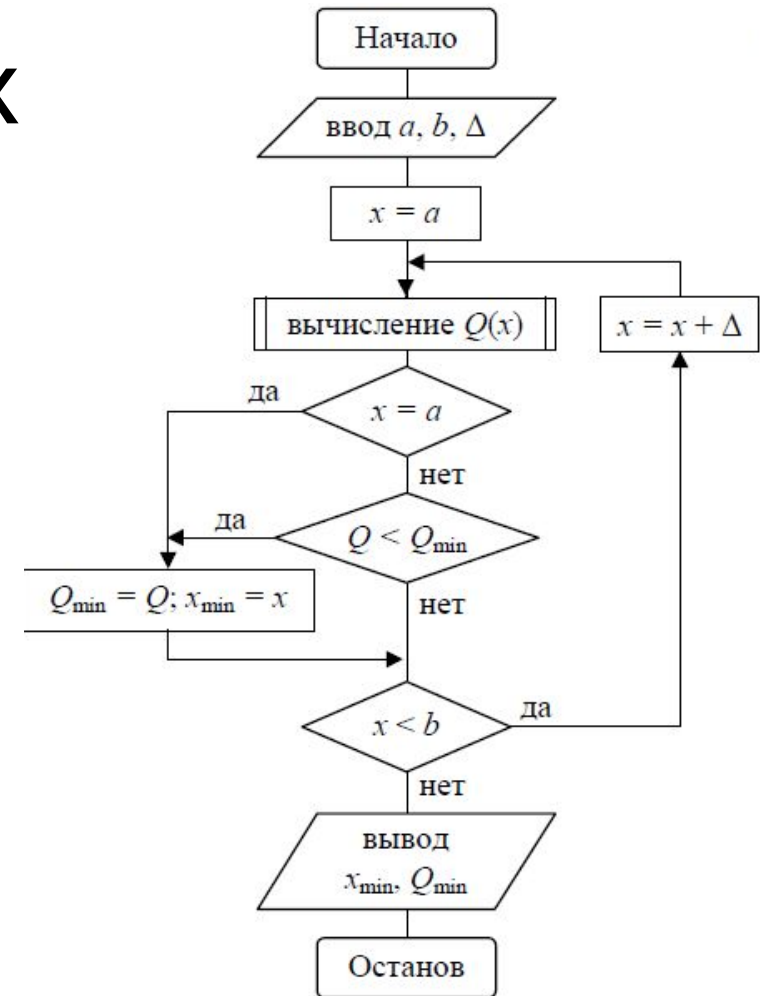
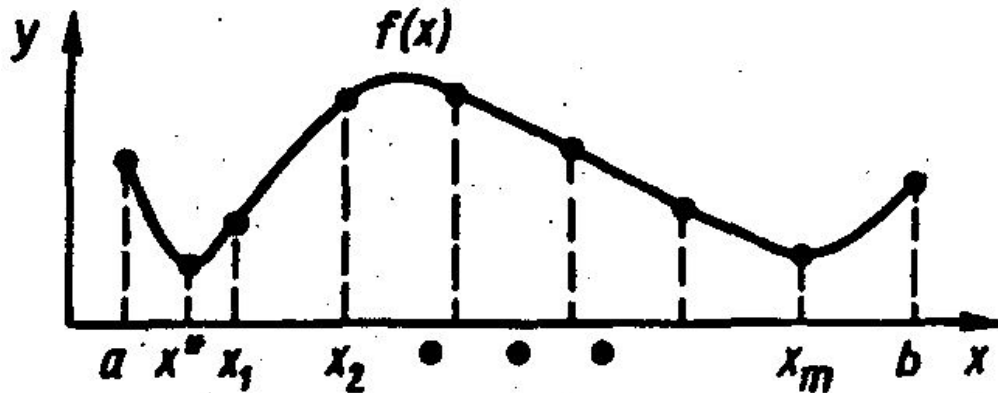
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Функция должна быть дважды дифференцируемая, причем $f''(x) > 0$
- Корень уравнения ищут приближенно, используя метод касательных. В очередной точке строится линейная аппроксимация.
- Точка, в которой линейная аппроксимация обращается в 0, используется для следующего приближения.



Метод перебора (для многомодульных функций)

- Разбиение отрезков на равные части и проверка каждой из точек, т.е. расчет или сравнение производных



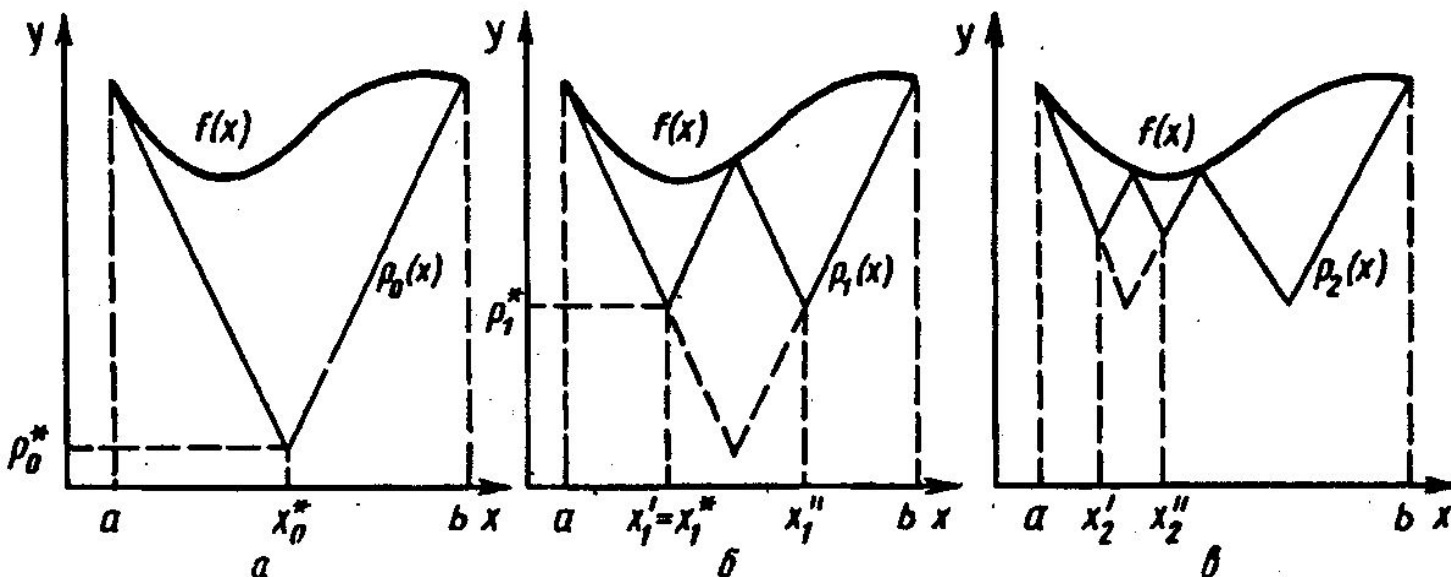
Метод ломаных линий

- Строят аппроксимирующие кусочно-линейные функции с параметрами:

$$P_0(x) = \begin{cases} f(a) - L(x-a) & x < x_0 \\ f(b) - L(x-b) & x > x_0 \end{cases} \quad \operatorname{tg} \alpha = L$$

$$x_0 = \frac{1}{2L} [f(a) - f(b) + L(a+b)]$$

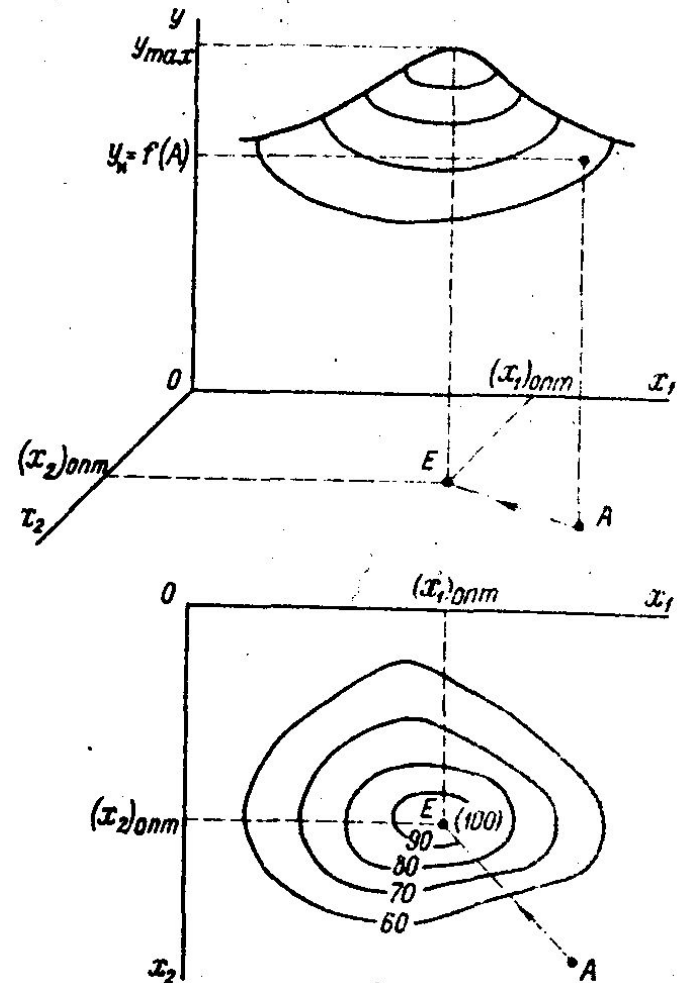
$$y_0 = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) + L(a-b)]$$



Оптимизация многофакторных объектов

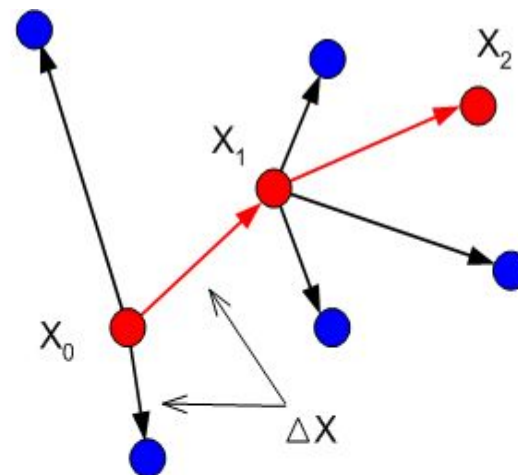
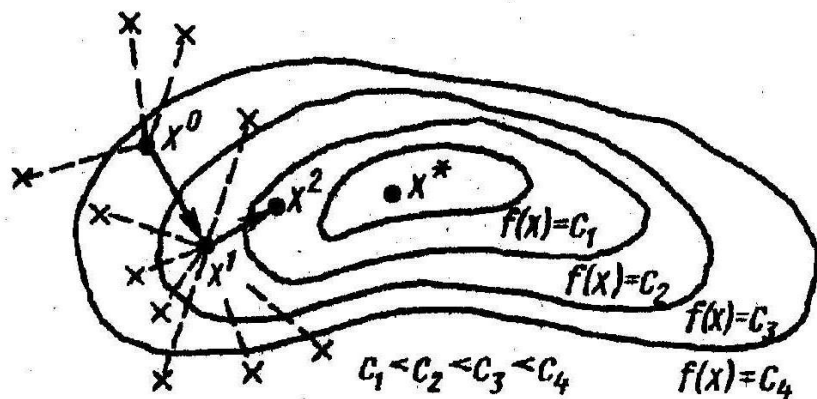
Графическая интерпретация задачи

- Принцип многофакторности отражает новый подход к эксперименту в задачах с многими факторами. При изучении объектов с несколькими факторами согласно этому принципу исследователю предлагается ставить опыты так, чтобы варьировать все факторы сразу в отличие от традиционного подхода, когда исследователь пытается изучать действие каждого фактора при поочередном варьировании.
- Организация эксперимента с применением многофакторных схем варьирования позволяет повысить точность оценок параметров подбираемых моделей для недетерминированных объектов, точнее оценить чувствительность выходной зависимой переменной объекта к вариации изучаемых входных независимых переменных.
- Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При многих факторах поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно и приходится ограничиваться только алгебраическим языком. Но для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью.



Метод случайного поиска

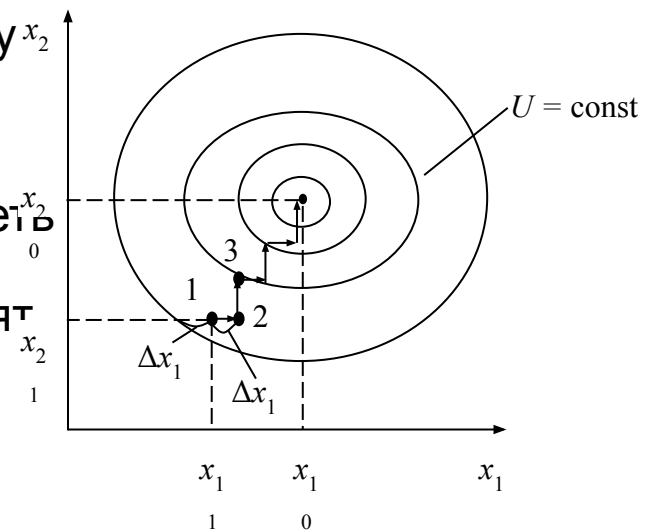
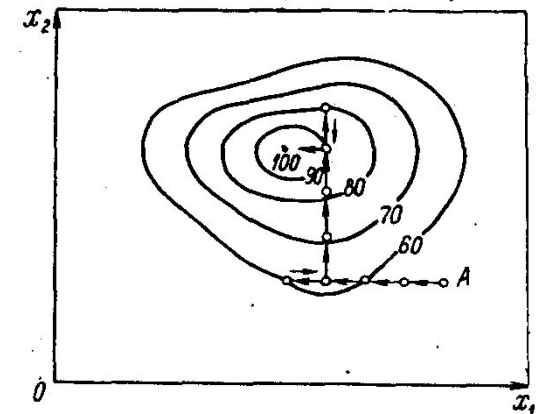
- Направление поиска не параллельно ни одной из осей.
- При достижении частного экстремума перемещение производится по другому частному направлению, причем если два последовательных шага улучшают значения выходного параметра, то шаг увеличивают в 1,618 раз.
- Если же m шагов, где $m = 3k$ (k – фактор), не дают улучшения, то шаг уменьшают в 0,618 раз.



- Точки, в которых было достигнуто улучшение целевой функции
- Точки, в которых значение целевой функции не улучшилось (ухудшилось или осталось прежним)

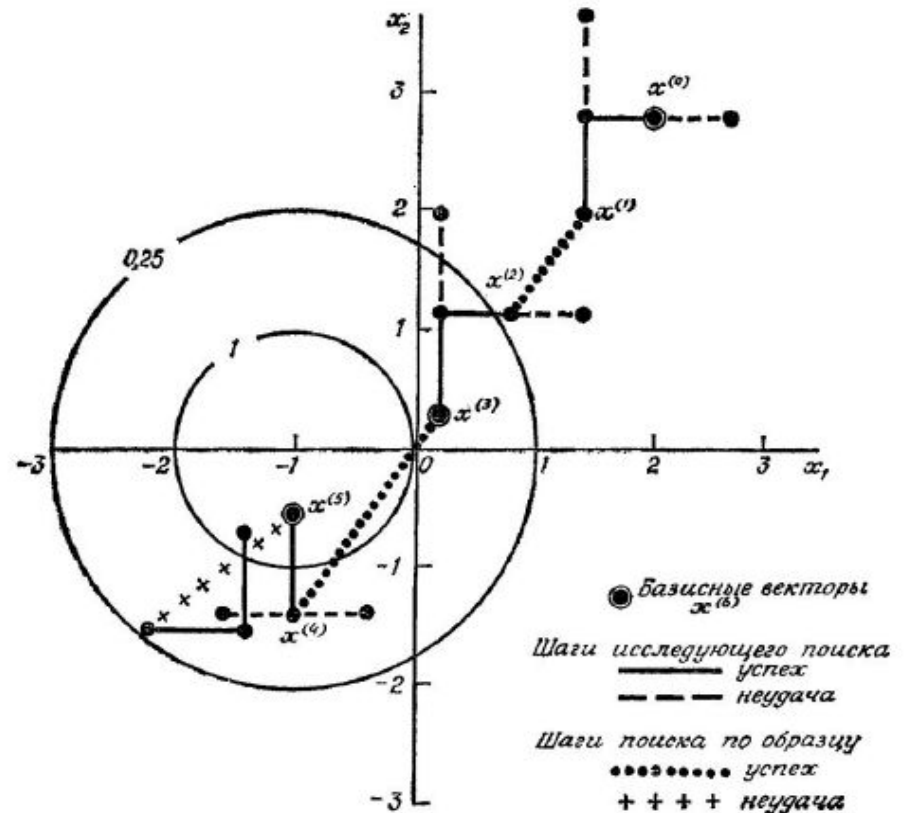
Метод Гаусса – Зейделя

- Суть метода заключается в эквивалентной замене общей многопараметрической задачи поиска экстремума критерия последовательностью однопараметрических задач поиска частных экстремумов.
- Метод осуществляется поочередным варьированием каждого фактора (при постоянстве остальных) до достижения частного экстремума. Затем производится поворот.
- В исходной точке фиксируют все координаты x , кроме одной. Этой координате x_i задают приращение в сторону ее увеличения и в сторону уменьшения и получают две точки. Вычисляют значение целевой функции f в этих точках и сравнивают между собой. Следующей исходной точкой будет та, для которой функция f будет иметь наибольшее значение.
- В случае двумерной целевой функции происходят последовательные вычисления и движения смещение по координате x_1 , затем по x_2 .



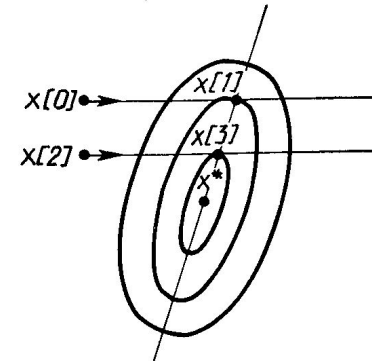
Метод Хука – Дживса

- Исследуют по координатный спуск в окрестностях данной точки и перемещаются в направлении убывания или возрастания.

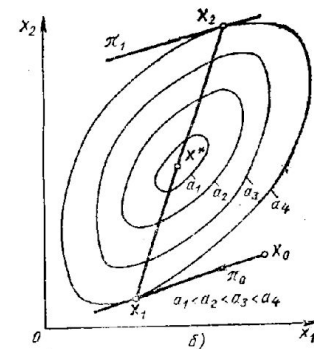


Метод сопряженных направлений

- Суть метода такова. Выбирается некоторая начальная точка $x[0]$ и выполняется одномерный поиск вдоль произвольного направления, приводящий в точку $x[1]$. Затем выбирается точка $x[2]$, не лежащая на прямой $x[0] - x[1]$, и осуществляется одномерный поиск вдоль прямой, параллельной $x[0] - x[1]$. Полученная в результате точка $x[3]$ вместе с точкой $x[1]$ определяет направление $x[1] - x[3]$ одномерного поиска, дающее точку экстремума x^* . В случае квадратичной функции n переменных оптимальное значение находится за n итераций. Поиск минимума при этом в конечном счете осуществляется во взаимно сопряженных направлениях. В случае неквадратичной целевой функции направления поиска оказываются сопряженными относительно матрицы Гессе.
- Алгоритм метода параллельных касательных состоит в следующем. Из точки X_0 к линии уровня (в точке X_1) строят касательную, затем параллельно этой прямой строят прямую π_1 и на ней точку X_2 , соответствующую точке касания π_1 и линии уровня. Местоположение центра определяется вдоль линии $X_1 X_2$.



$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$



Метод Ньютона

- Если функция дважды дифференцируема, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки x^k . Поэтому поведение описывается квадратичной функцией, т.е. сходимость быстрее, чем у метода grad. Этапы расчета следующие:
- В этом методе 1) определяется grad функции; 2) определяется матрица вторых производных и обратная к ней матрица. Необходимо найти точку минимума аппроксимирующей квадратичной функции:
$$x^{k+1} = x^k - [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)$$

Метод градиента

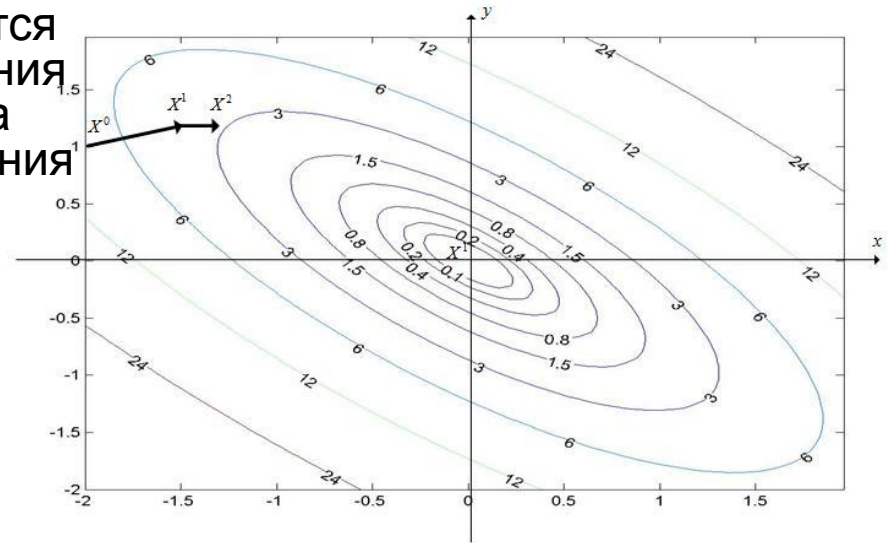
- При оптимизации движение совершается в направлении максимального изменения критерия, т.е. в направлении градиента целевой функции. Направление движения корректируется после каждой серии опытов. При этом находят градиент функции, равный:

$$\text{grad}(y(\bar{x})) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} i + \frac{\partial y}{\partial x_2} j + \dots \right)$$

- После нахождения состава grad (коэффициента уравнения) выполняется шаг по направлению к экстремуму:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + \rho \cdot \text{grad}(y(\bar{x}_n))$$

- ρ – параметр шага
- Показателем выхода в область оптимума является малое значение grad, т. е. коэффициенты полинома близки к 0.

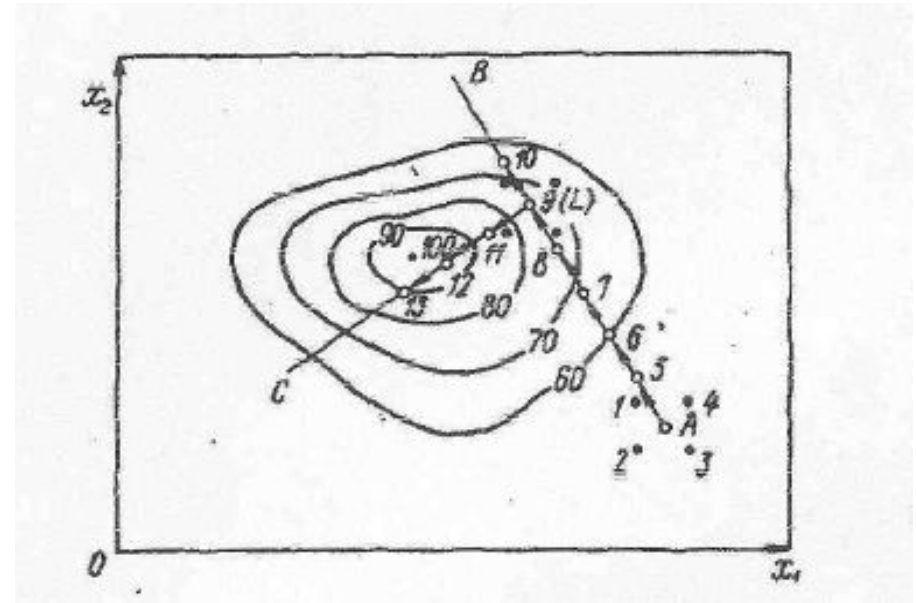


Фрагмент траектории поиска минимума функции градиентным методом с дроблением шага.

Метод крутого восхождения Бокса-Уилсона

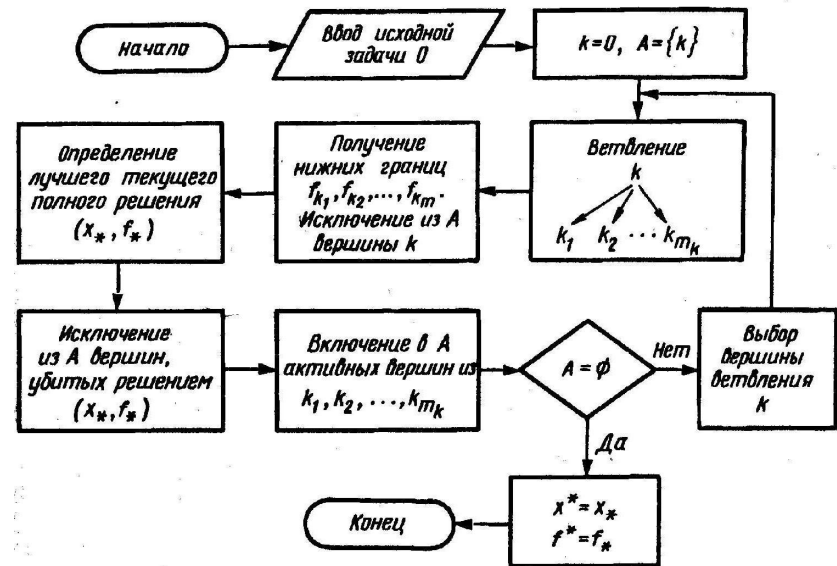
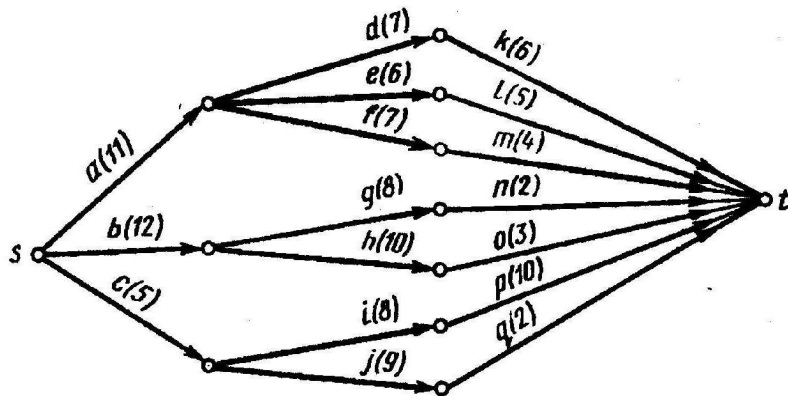
Крутое восхождение по поверхности отклика – ставят эксперимент для нахождения уравнения

- Находят базовый фактор
- По нему нормируют остальные шаги
- Производят так называемые «мысленные» опыты, которые заключаются в вычислении значений целевой функции в точке факторного пространства, лежащих на пути к экстремуму от исходной точки.



Некоторые из «мысленных» опытов (обычно через 2-5) реализуются для того, чтобы проверить соответствие аппроксимации процесса найденной зависимостью.

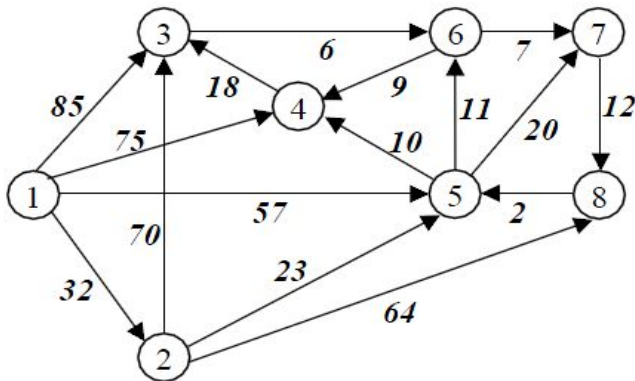
Метод ветвей и границ



- На каждом шаге метода элементы разбиения (подмножества) подвергаются анализу – содержит ли данное подмножество оптимальное решение или нет.
- Если рассматривается задача на минимум, то проверка осуществляется путем сравнения нижней оценки значения целевой функции на данном подмножестве с верхней оценкой функционала.
- Допустимое решение, дающее наименьшую верхнюю оценку, называют рекордом. Если оценка снизу целевой функции на данном подмножестве не меньше оценки сверху, то рассматриваемое подмножество не содержит решения лучше рекорда и может быть отброшено.
- Если значение целевой функции на очередном решении меньше рекордного, то происходит смена рекорда.
- Если просмотрены все элементы разбиения, алгоритм завершает работу, а текущий рекорд является оптимальным решением.
- В противном случае среди непросмотренных элементов разбиения выбирается множество, являющееся в определенном смысле перспективным. Оно подвергается разбиению (ветвлению).

Теория графов

- Найти кратчайшие пути в орграфе от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстры. Постройте дерево кратчайших путей.



Шаги	Вершины								x_i	$L^*(x_i)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x_1	0
2		32	85	75	57	∞	∞	∞	x_2	32
3			85	75	55	∞	∞	96	x_5	55
4			85	65		66	75	96	x_4	65
5			83			66	75	96	x_6	66
6			83				73	96	x_7	73
7			83					85	x_3	83
8								85	x_8	85

Вершинам графа присваиваются временные метки, которые затем по определенным правилам заменяются на постоянные метки. После этого из всех временных меток выбирается наименьшая, и она становится постоянной меткой. Действия продолжаются, пока не будут найдены постоянные метки для всех вершин графа. Результаты действий на каждом шаге будем заносить в таблицу. В предпоследний столбец заносим вершину, получившую постоянную метку, в последний столбец – величину этой метки (для данного шага).

Кратчайшие пути найдены, их длина приведена в последних двух столбцах расчетной таблицы. Дерево кратчайших путей – **ребра**

(1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (5,6), (6,7), (7,8).

Графический метод решения задачи линейного программирования

$$x - 2y \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \end{cases}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \end{cases}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

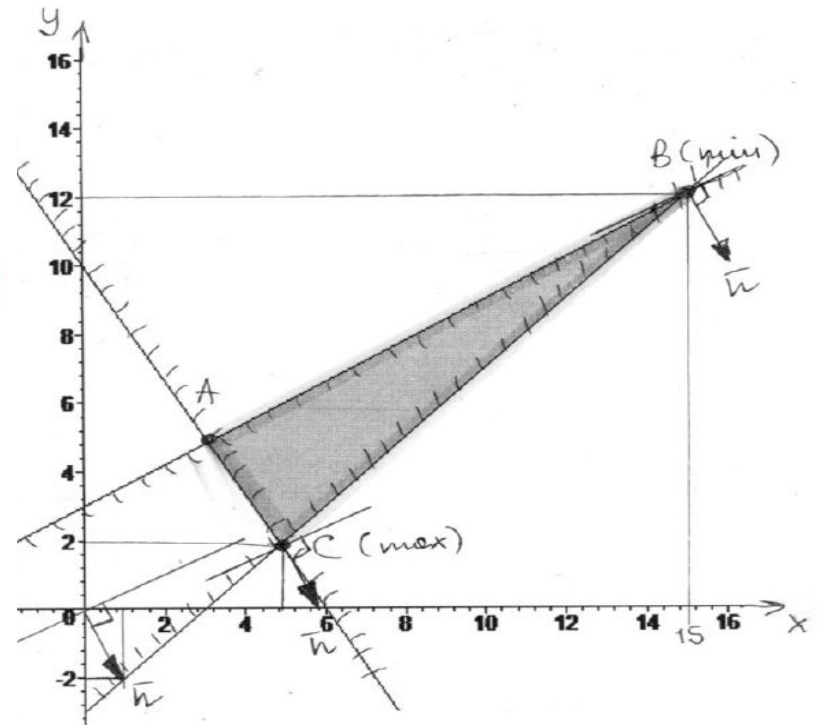
Строим прямые (по двум точкам каждую):

(I) $5x + 3y = 30$, точки (6, 0), (0, 10).

(II) $x - y = 3$, точки (3, 0), (6, 3).

(III) $-3x + 5y = 15$, точки (0, 3), (5, 6).

Штриховкой выделяем нужные полуплоскости, соответствующие знакам неравенств.



Симплексный метод решения ЗЛП

- **Симплекс-метод** - это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.
- Составление первого опорного плана. Переход к канонической форме задачи линейного программирования путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных.
- *Проверка плана на оптимальность*. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный, и его необходимо улучшить.
- *Определение ведущих столбца и строки*. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбирается наибольший по абсолютной величине. Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делит на элементы того же знака ведущего столбца.
- *Построение нового опорного плана*. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана—Гаусса.
- Построение симплекс-таблиц продолжается до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.
- Движение к точке оптимума осуществляется путем перехода от одной угловой точки к соседней, которая ближе и быстрее приближает к X^* . Такую схему перебора

точке

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	min
x_3	20	5	2	1	0	$20:5=4$
x_4	6	1	1	0	1	$6:1=6$
F(X1)	0	-8	-5	0	0	0