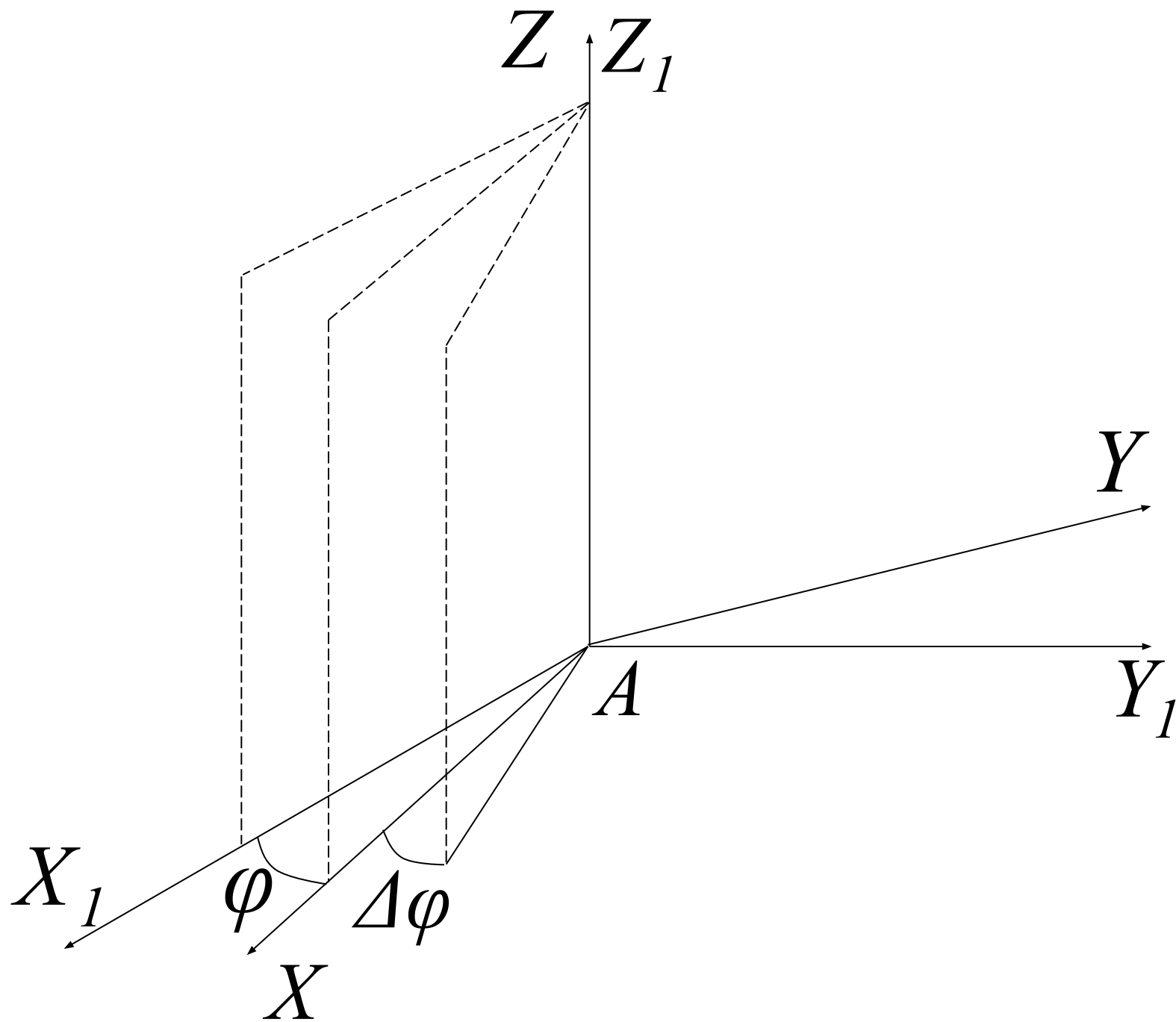


Механика 2

Вращательное движение твердого тела

- Вращательное движение твердого тела — это такое движение при котором какие-нибудь две точки остаются неподвижными.
- Проходящая через эти точки прямая называется осью вращения.



Вращательное движение твердого тела

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$$

$$(\omega_z)_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{средняя угловая скорость}$$

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{угловая скорость}$$

Вектор угловой скорости и ускорения

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \omega_z \vec{k}$$

Вектор угловой скорости- это вектор численно равный первой производной по времени от закона изменения угла поворота, направленный по оси вращения в ту сторону, чтобы глядя с конца вектора угловой скорости вращение происходило бы против часовой стрелки.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \vec{k} = \varepsilon_z \vec{k}$$

Вектор углового ускорения- это вектор численно равный первой производной по времени угловой скорости,

Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим векторное произведение для скорости, если начало координат лежит на оси вращения

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Формула Эйлера

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Вектор угловой скорости и ускорение

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Определение скорости, через
вектор
угловой скорости

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Ускорени
е

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + [\vec{\omega}, \vec{v}]$$

$$[A, [B, C]] = B(A, C) - C(A, B)$$

$$\vec{a} = [\vec{\epsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$$

$$\vec{a} = [\vec{\epsilon}, \vec{r}] + \vec{\omega}(\vec{r}\vec{\omega}) - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{\omega})$$

$$\text{если } \vec{r} \perp \vec{\omega}$$

$$\vec{a} = \tau * (\omega r) + n * (\omega^2 r)$$

$$|\vec{r}| = r$$

Первый закон Ньютона

Существуют такие инерциальные системы отсчёта, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют силы (или действие сил уравновешено), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

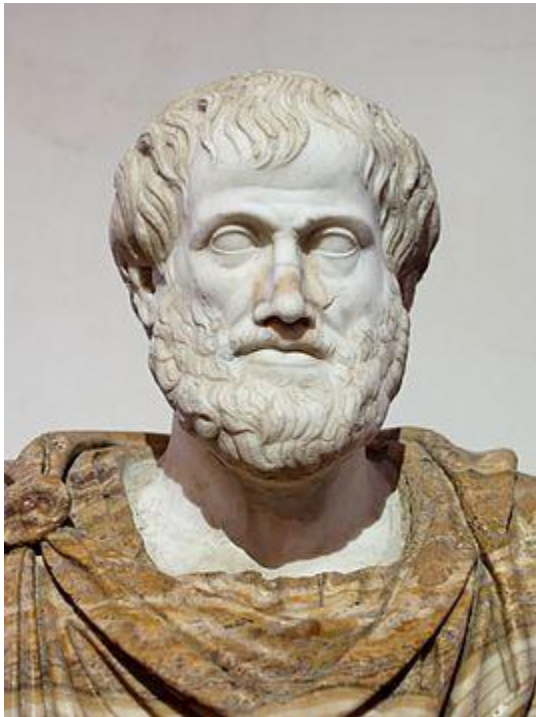
Понятие силы

- Сила причина движения (Аристотель)
- Сила причина ускорения (Галилей)

Сила — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

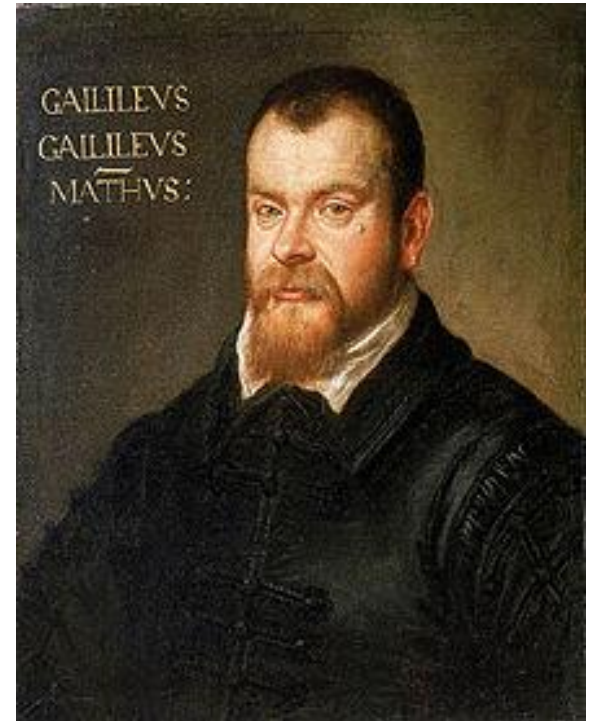
$$[H] = [L / T^2 M]$$

Классики механики



Аристотель 382-322 д.н.

Э



Galileo Galilei 1562-1642

Силы в природе

Фундаментальные взаимодействия

Тип взаимодействия	Источник	Константа взаимодействия	Радиус действия (м)
Гравитационное	Масса	10^{-38}	∞
Электромагнитное	Электрически заряженные частицы	10^{-2}	∞
Сильное	Частицы, входящие в состав ядер (протоны, нейтроны)	1	10^{-15}
Слабое	Элементарные частицы	10^{-14}	10^{-18}

Неинерциальность систем отсчета

Ускорения из-за вращения земли вокруг
оси $a_{земля} = R_{сут} \omega^2 \sim 0.032 \text{ м/с}^2$

$$\omega_{сут} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \quad R_{земля} = 6500$$

Ускорения из-за вращения земли вокруг
солнца $a_{прб} = R_{год} \omega^2 \sim 0.0055 \text{ м/с}^2$

$$R_{прб} \approx 150 \text{ км}.$$

Ускорения из вращения нашей галактики $< 0.000001 \text{ м/с}^2$

Понятие группы Галилея

Набор преобразований какого-либо множества называется группой, если вместе с любыми двумя преобразованиями он содержит результат их последовательного применения, а вместе с каждым преобразованием — обратное преобразование.

Преобразование Галилея будет:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$t = t'$$

$$\vec{r}$$

- радиус вектор в неподвижной инерциальной системе отсчета (ИСО).

$$\vec{r}'$$

- радиус вектор в движущейся ИСО.

$$\vec{u}$$

- скорость движущейся ИСО

Второй закон Ньютона

В инерциальных системах отсчёта ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально ее массе.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m}$$

- дифференциальное уравнение 2-ого порядка,
- уравнение движения материальной точки .

Масса

Масса тела — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (**инертная масса**) и гравитационные (**гравитационная масса**) свойства.

Обобщенный закон
Галилея -

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}_{gr}}{m_{in}} \propto \frac{m_{gr}}{m_{in}}$$

$$[k_2] = [M]$$



Friedrich Bessel
1784 -1846

Импульс

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p}_{sum} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Импульс системы (суммирование по i)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Общая форма второго закона
Ньютона

$$[kg \cdot m / s] = [M \frac{L}{T}]$$

Третий закон Ньютона

Силы , которые действуют между материальными точками равны по модулю, противоположны по направлению и параллельны прямой, которая их соединяет.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Закон сохранения импульса

- Для системы из двух материальных

$$\frac{dp_1}{dt} = F_{12} + f_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = F_{21} + f_2$$

F_{12} – сила, действующая на материальную точку со стороны точки 2

F_{21} – сила, действующая на материальную точку со стороны точки 1

f_1 и f_2 – внешние силы

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = f_1 + f_2$$

$$f_1 = f_2 \equiv 0$$



$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0 \quad \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

$$F_{12} = -F_{21}$$

$$p_1 + p_2 = p_{const}$$

Закон сохранения импульса

- Для системы из N материальных точек

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots \vec{F}_{1N} + \vec{f}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \dots \vec{F}_{2N} + \vec{f}_2$$

.....

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots \vec{F}_{NN-1} + \vec{f}_N$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \dots = \vec{f}_N \equiv 0$$



$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const}$$

Теорема о движении центра масс

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i m_i}{M}$$

Центр масс $M = \sum_{i=1}^N m_i$ масса системы

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \ddot{\vec{r}}_i m_i$$

- Ускорение центра масс

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

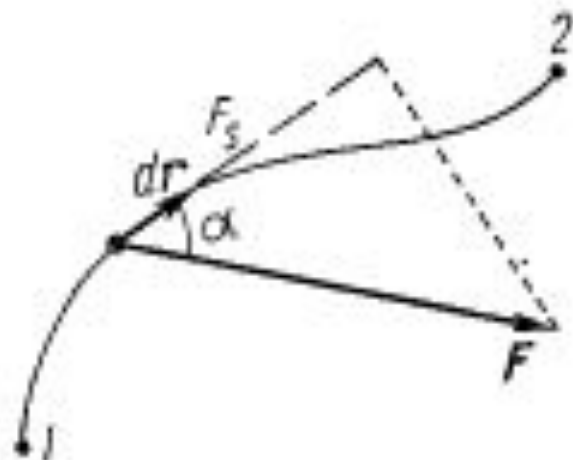
$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

- с прошлого слайда

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

Центр масс механической системы движется, как материальная точка с массой, равной массе системы, под действием только суммы внешних сил

Механическая работа



$d\vec{r}$ – элементарное перемещение, в пределах которого сила $\vec{F}$ постоянна
 F_s – проекция силы на направление перемещения

$$|d\vec{r}| = ds$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F_s ds$$

$$[A] = \text{Дж}$$

Работа силы и кинетическая энергия материальной точки

Скалярное произведение силы на перемещение:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$$

Пусть сила действует на материальную точку, найдем дифференциал работы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m \vec{v} d\vec{v} = d \frac{m \vec{v}^2}{2} = dK$$

Кинетическая энергия материальной точки называется:

$$K = \int dK = \frac{m \vec{v}^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек

Одной материальной точки:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Системы N материальных точек:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Столкновения

Абсолютно упругий удар — столкновение двух тел, в результате которого полная кинетическая энергия сохраняется.

Центральный удар, когда тела после удара движутся по прямой, проходящей через их центры масс.

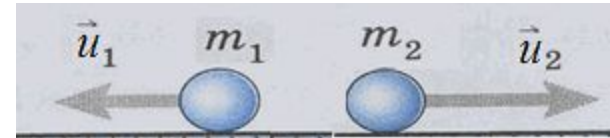
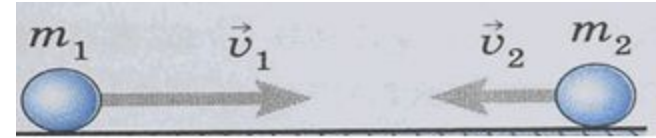
Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела приобретают одинаковую скорость (движутся, как единое целое).

Примеры

Упругое центральное
столкновение:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{И} \end{matrix}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{Э} \end{matrix}$$



$$m_1(v_1 + u_1) = m_2(u_2 + v_2) \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{П} \end{matrix} \qquad m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{Э} \end{matrix}$$

$$m_1 / m_2 (v_1 + u_1) = (u_2 + v_2) \quad (v_1 - u_1) = (u_2 - v_2)$$

$$u_1 = \frac{(2v_2 + v_1)m_2 - m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

Случай равных
масс: $m_1 = m_2$

$$u_1 = v_2$$

$$u_2 = v_1$$

$$u_2 = \frac{(2v_1 + v_2)m_1 - m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

Случай столкновения с
движущейся стенкой:

$$m_2 \rightarrow \infty$$

$$u_1 = 2v_2 + v_1$$

$$|\Delta p| = |2v_2 + 2v_1| m_1$$

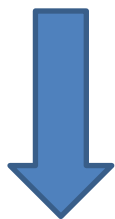
$$u_2 = -v_2$$

Пример

Упругое не центральное столкновение двух одинаковых шаров

$$m\vec{V}_1 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{И} \end{matrix}$$

$$\frac{m\vec{V}_1^2}{2} = \frac{m\vec{U}_1^2}{2} + \frac{m\vec{U}_2^2}{2} \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{Э} \end{matrix}$$

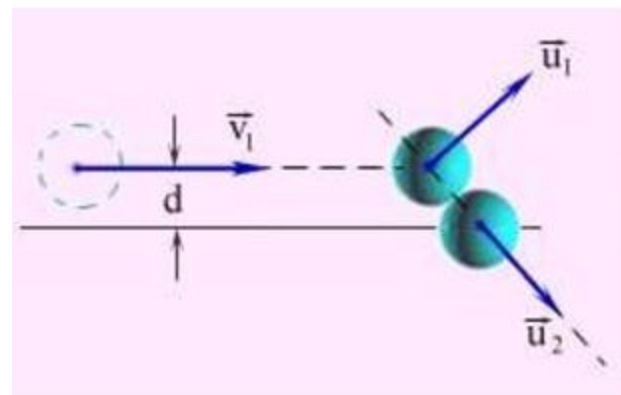


$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$$

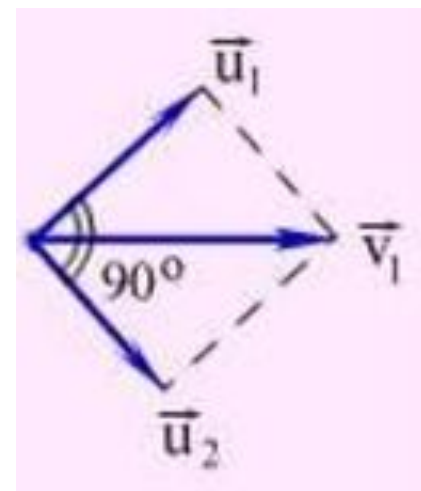
Вектора образуют треугольник

$$\vec{V}_1^2 = \vec{U}_1^2 + \vec{U}_2^2$$

Этот треугольник прямоугольный



Один шар налетает на другой



Кинетическая энергия системы материальных точек

Одной материальной точки:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Системы N материальных точек:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Теорема Кёнига

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i'^2}{2} + \frac{M \vec{v}_M^2}{2}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_M$$

$\vec{v}_M$ - скорость движения центра масс

$\vec{v}_i'$ - скорость точки i в системе центра масс

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{- полная масса}$$

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_M)^2}{2}$$

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i'^2}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_M^2}{2} + 2 \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{v}_M \cdot m_i \vec{v}_i')}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i'^2}{2} + \frac{M \vec{v}_M^2}{2}$$

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{v}_M \cdot m_i \vec{v}_i')}{2} = (\vec{v}_M \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i') \equiv 0$$



Johann König
1712 - 1757

Мощность

Мощность – скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени; (характеризует скорость, с которой совершается работа) .

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad [N] = \text{Дж/с} = \text{Вт (СИ)}$$

1 л.с. = 735 Вт

Средняя мощность работы постоянной силы:

$$N = (\vec{F} \cdot \vec{v}_{cp})$$

Консервативные силы

Стационарное поле – поле сил, остающееся постоянным со временем.

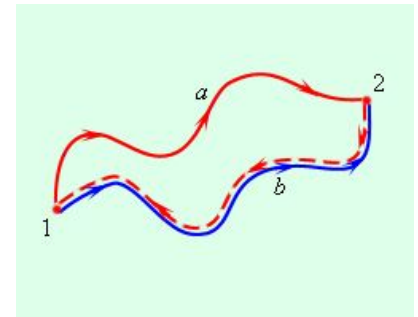
Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы пути, по которому перемещается тело, а определяется только начальным или конечным положением тела 1 и 2.

Потенциальное поле – поле, в котором действуют консервативные силы.

Работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю.

$$A_{12a} = A_{12b}; \quad A_{21a} = -A_{12a};$$

$$A_{\text{замкн}} = 0$$



Центральные силы

Центральные силы – силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами и направленные вдоль прямой, соединяющей эти частицы (гравитационные, кулоновские, упругие).

Все центральные силы являются консервативными! Т.е. работа центральных сил не зависит от формы пути, по которому перемещается тело.

Потенциальная энергия

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

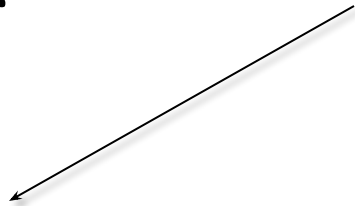
Так как работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений тела, то существует скалярная функция, определяющая положение тел, убыль которой равна работе.

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

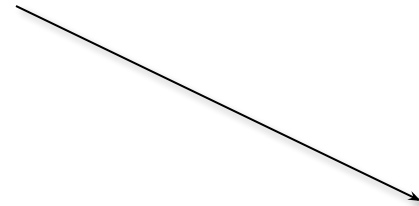
U – потенциальная энергия.

Энергия

Энергия- скалярная физическая величина, характеризующая способность тел совершать работу.



Кинетическая энергия
- энергия
механического
движения тела.



Потенциальная
энергия – энергия,
зависящая от
положения тела в
потенциальном поле
сил.