

Динаміка -

розділ механіки, що вивчає рух і взаємодію механічних об'єктів, зміну характеристик їх руху під дією сил.

Пряма задача динаміки:

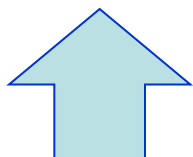
за відомими силами,
що діють на тіло,
знайти рівняння його
руху

Зворотна задача динаміки:

за відомим рівнянням
руху знайти діючі на
тіло сили

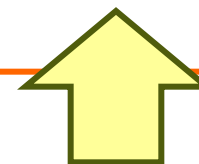
Перший закон Ньютона(закон інерції)

Матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія з боку інших тіл не примусить її змінити цей стан



У цьому формулюванні Ньютон дав закон, встановлений ще Галілеєм

Існують такі системи відліку, відносно яких тіла, що рухаються поступально, зберігають свою швидкість незмінною, якщо на них не діють інші тіла (чи дію інших тіл скомпенсовано)

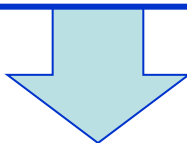


Перший закон Ньютона затверджує існування інерціальних систем відліку



Інерціальна система відліку

Система відліку, відносно якої вільна матеріальна точка, на яку не діють інші тіла, рухається рівномірно і прямолінійно, тобто за інерцією



Неінерціальна система відліку

Система відліку, що рухається відносно інерціальної системи з прискоренням

Інертність тіл

Властивість, яка властива усім тілам і полягає в тому, що для зміни швидкості (як за модулем, так і за напрямом) необхідний час

Маса тіла

Фізична величина, що є мірою його інерційних (інертна маса) та гравітаційних (гравітаційна маса) властивостей

Для опису дії одного тіла на інше, вводять поняття сили. Під дією сил тіла або змінюють швидкість руху, тобто набувають прискорення (динамічні прояви сил), або деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри (статичний прояв сил).

У кожен момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямом в просторі і точкою прикладання

Нині доведено, що числові значення інертної та гравітаційної маси співпадають (з точністю не меншою 10^{-12} їх значень)

Одиниця маси
кілограм / кг

Сила

Векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює свою форму і розміри

Одиниця сили
ньютон / 1 Н

Другий закон Ньютона

Динаміка

Матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою а рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія з боку інших тіл не змусить її змінити цей стан

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Другий закон Ньютона виконується лише в інерціальних системах відліку

Загальне формулювання другого закону Ньютона

Швидкість зміни імпульсу матеріальної точки визначає силу, що діє на неї

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Імпульс матеріальної точки

Векторна величина, чисельно рівна добутку маси матеріальної точки на її швидкість і що має напрям швидкості

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Одиниця імпульсу

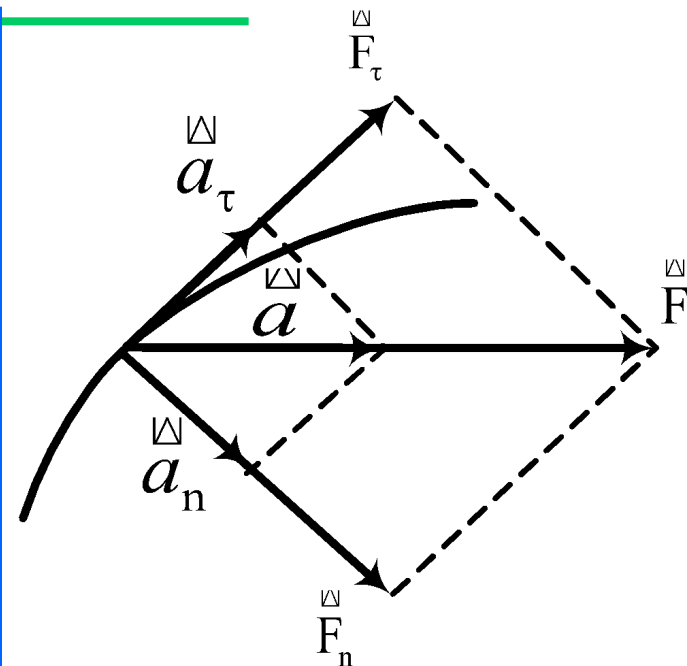
кілограм-метр у секунду / кг · м/с

Принцип незалежності дії сил

Якщо на матеріальну точку діє одночасно декілька сил, то кожна з цих сил надає матеріальній точці такого прискорення (згідно з другим законом Ньютона), наче інших сил не існує

Згідно з цим принципом сили і прискорення можна розкласти на складові, використання яких приводить до істотного спрощення розв'язання задач. Наприклад, на мал.

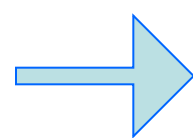
діюча сила $F = ma$ розкладена на дві складові: тангенціальну F_τ , напрямлену по дотичній до траєкторії, та нормальну - напрямлену вздовж нормалі до центру кривизни F_n



$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \qquad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

Третій закон Ньютона

Всяка дія матеріальних точок (тіл) одна на одну має характер взаємодії; сили, з якою діють одна на одну матеріальні точки, завжди рівні за модулем, протилежно напрямлені та діють вздовж прямої, що з'єднує ці точки.


$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Сили при взаємодії двох тіл прикладені до **різних** матеріальних точок (тіл), виникають **парами** та мають **одну природу**

Третій закон Ньютона дозволяє здійснити перехід від динаміки окремої матеріальної точки до динаміки системи матеріальних точок. Це пояснюється тим, що як для пари, так і для системи матеріальних точок взаємодія зводиться до сил парної взаємодії між ними

Механічний принцип відносності (принцип відносності Галілея) *Динаміка*

У усіх інерціальних системах відліку закони класичної динаміки мають однакову форму

Розглянемо дві системи відліку : інерціальну систему K

(з координатами x, y, z), яку умовно вважатимемо нерухомою, і

систему K' (з координатами x', y', z'), яка рухається відносно K рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\vec{u}$ ($u = \text{const}$)

Відлік часу розпочнемо в момент часу, коли початки координат обох систем співпадають. Нехай в довільний момент часу розташування цих систем одна відносно одної має вигляд, зображений на мал.

Швидкість $\vec{u}$ спрямована вздовж OO' , радіус-вектор, проведений з O в O' ; $r_0 = ut$

Зв'язок між радіусами-векторами довільної точки A в обох системах

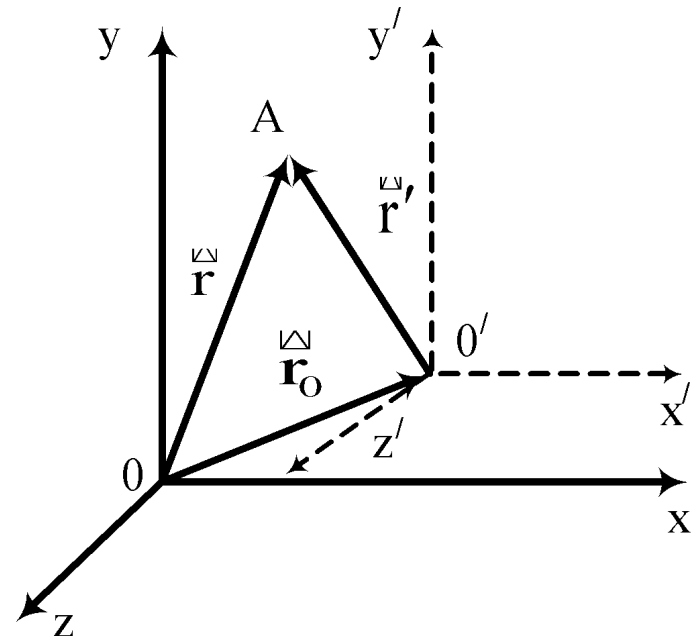
$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t$$

Зв'язок між координатами довільної точки A в обох системах

$$x = x' + u_x t$$

$$y = y' + u_y t$$

$$z = z' + u_z t$$



Перетворення координат Галілея

У окремому випадку, коли система K' рухається із швидкістю $\mathbf{U}$ вздовж додатного напрямку осі x системи K (в початковий момент часу осі координат співпадають), перетворення координат Галілея мають вигляд

$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

У класичній механіці вважається, що хід часу не залежить від відносного руху систем відліку, тобто до записаних перетворень можна додати ще одне рівняння: $t = t'$

Записані співвідношення справедливі лише у класичній механіці ($u \ll c$), а при швидкостях, що порівняні зі швидкістю світла, перетворення Галілея замінюються більш загальними перетвореннями Лоренца

Продиференціювавши вираз $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$

за часом та врахувавши, що $t = t'$

отримаємо: $\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{u}$

Правило додавання швидкостей в класичній механіці



Перетворення координат Галілея

Прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Отже, якщо на точку A інші тіла не діють $\vec{a} = 0$, то і $\vec{a}' = 0$, тобто система K' є інерціальною (точка рухається відносно неї рівномірно і прямолінійно або знаходиться у стані спокою). Це і є доведення механічного принципу відносності



Рівняння динаміки при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої не змінюються, тобто є інваріантними по відношенню до перетворень координат

Механічна система -

сукупність матеріальних точок (тіл), що розглядається як єдине ціле

Замкнена (ізолювана) система -

механічна система тіл, на яку не діють зовнішні сили

СИЛИ В МЕХАНІЧНІЙ СИСТЕМІ поділяють на:

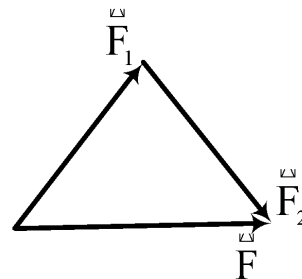
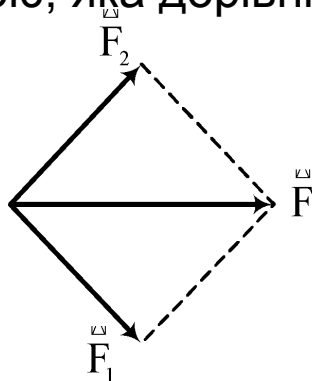
внутрішні -

сили взаємодії між матеріальними точками, що входять до механічної системи

зовнішні -

сили, з якими на матеріальні точки системи діють тіла, що не входять в систему

Якщо на матеріальну точку одночасно діють декілька сил, то їх можливо замінити **рівнодією** силою, яка дорівнює **геометричній сумі** цих сил



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

← Приклади визначення рівнодіючої сили

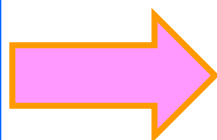
Закон збереження імпульсу

В замкнутій системі тіл геометрична сума імпульсів її тіл залишається незмінною при будь-якій взаємодії тіл цієї системи між собою

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

m_1, m_2 - маса тіл, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ та $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ - відповідно до швидкості тіл до та після взаємодії

**Узагальнене
формулювання
закону збереження
імпульсу**



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

n - число матеріальних точок (тіл), які входять в систему

Імпульс замкненої системи зберігається, тобто не змінюється з часом

Центр мас системи матеріальних точок

Уявна точка C , положення якої характеризує розподіл маси цієї системи. Її радіус-вектор дорівнює

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

m_i та $\vec{r}_i$ - відповідно маса та радіус-вектор i -ї матеріальної точки; n - кількість матеріальних точок в системі;

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad - \text{ маса системи}$$

Центр мас тіла

Точка, через яку повинна проходити лінія дії сили, щоб тіло рухалося поступально

Імпульс системи

$$\vec{p} = m \vec{v}_C$$

дорівнює добутку маси системи на швидкість її центру мас

**В механіці розглядаються
три види сил:**

- 1. Сили тертя**
- 2. Сили пружності**
- 3. Сили тяжіння
(гравітаційні сили)**

Сили тертя -

тангенціальні сили, що виникають при дотиканні поверхонь тіл та перешкоджають їх відносному переміщенню

сили тертя можуть бути різної природи, але в результаті їх дії механічна енергія завжди перетворюється на внутрішню енергію тіл, що дотикаються

зовнішнє (сухе)

тертя, що виникає в площині дотику тіл при їх відносному переміщенні

внутрішнє (рідке)

тертя між частинами одного і того ж тіла, наприклад між різними шарами рідини або газу, швидкості яких змінюються при переході від шару до шару

Тертя

Тертя спокою

тертя за відсутності відносного переміщення дотичних тіл

Сили тертя спокою

сили тертя, що перешкоджає виникненню руху одного тіла по поверхні іншого

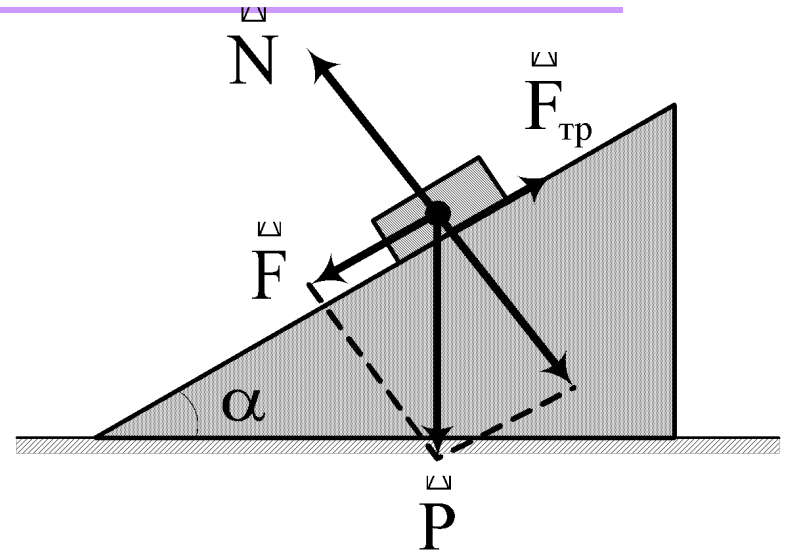
Відносний рух тіл виникає, якщо зовнішня сила

$F > (F)_{\max}$, де $(F)_{\max}$ - гранична сила тертя спокою

$$(F)_{\max} = \mu_0 N$$

μ_0 - коефіцієнт тертя спокою,

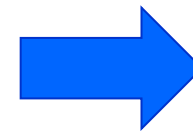
N - сила нормального тиску



Тертя ковзання -

тертя при відносному переміщенні тіл, що дотикаються

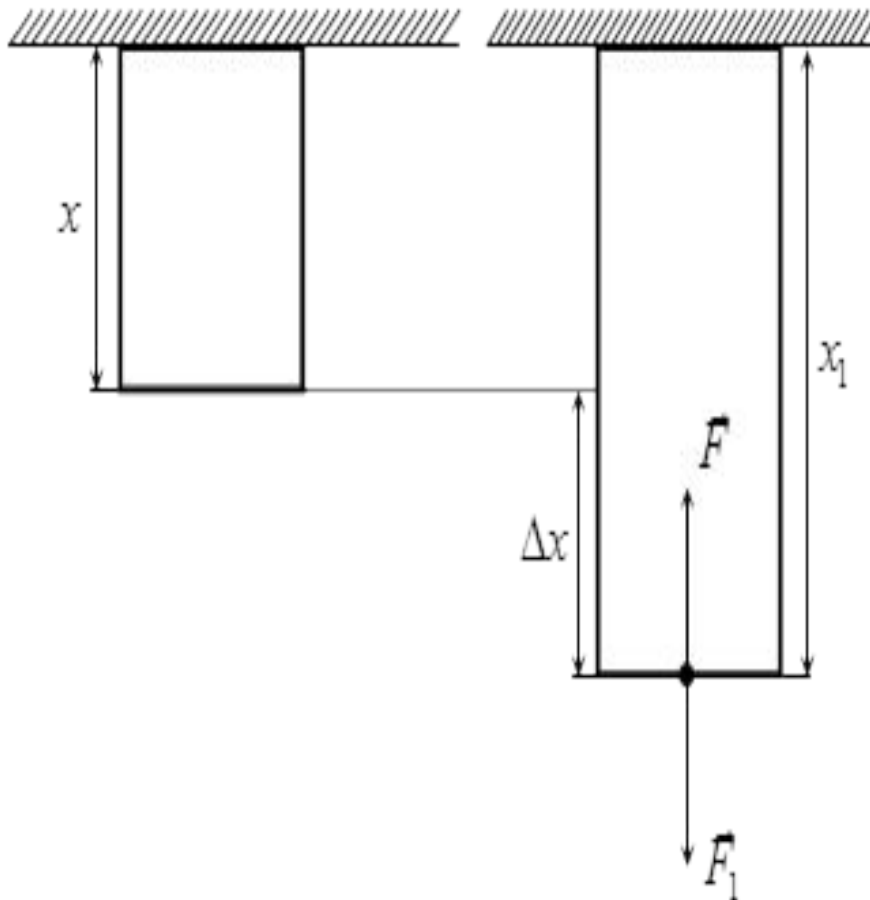
сила тертя ковзання $F_{\text{тр}}$
пропорційна силі N
нормального тиску, з якою
одно тіло діє на інше


$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

μ - коефіцієнт тертя ковзання, який залежить
від властивостей дотичних поверхонь
(а саме від якості їх обробки та матеріалу)

Сили пружності

При будь-якій деформації виникають сили, які залежать як від величини так і від типу деформації. Ці сили називаються силами пружності.



Якщо до незакріпленого кінця стержня прикласти силу F , то він видовжиться під дією цієї сили, а величину

$$\Delta x = x_1 - x$$

Називають його *абсолютним видовженням*. Величину

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$$

називають *видовженням*

відносним

Сили пружності

- Якщо до незакріпленого кінця стержня прикласти силу F , то він видовжиться під дією цієї сили, а величину

$$\Delta x = x_1 - x$$

Називають його *абсолютним видовженням*. Величину

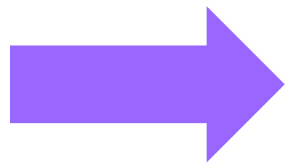
$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$$

називають
видовженням

відносним

Закон всесвітнього тяжіння

між будь-якими двома матеріальними точками діє сила взаємного тяжіння, прямо пропорційна добутку їх мас m_1 m_2 та обернено пропорційна квадрату відстані між ними (r^2)



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

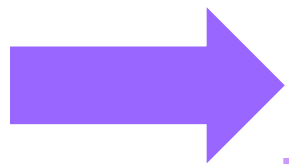
G – гравітаційна стала

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Н} \times \text{м}^2 / (\text{кг})^2$$

Дві матеріальні точки масою по 1 кг кожна, що знаходяться на відстані 1 м один від одної, притягуються з силою $6,67 \times 10^{-11} \text{ Н}$

[Сила тяжіння]

сила, що діє на будь-яке тіло, що знаходиться поблизу земної поверхні, і напрямлена вертикально вниз



$$F = m \overset{\nabla}{g}$$

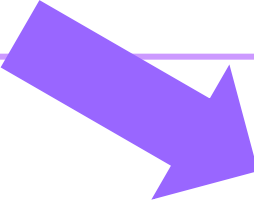
m – маса тіла,

g - прискорення вільного падіння

Закон всесвітнього тяжіння

Сила тяжіння завжди спрямована вздовж прямої, що проходить через тіла, що взаємодіють

Якщо знехтувати добовим обертанням Землі навколо своєї осі, то сила тяжіння і сила гравітаційного тяжіння рівні між собою


$$P = mg = F = G \frac{mM}{R^2}$$

M – маса Землі;

R – відстань між тілом і центром Землі

Ця формула дана для випадку знаходження тіла на поверхні Землі або поблизу від неї

Вага тіла

Сила, з якою тіло внаслідок тяжіння до Землі діє на опору чи підвіс, що утримують тіло від вільного падіння

Сила тяжіння діє завжди, а вага з'являється тільки у випадку, якщо на тіло крім сили тяжіння діють ще інші сили, внаслідок чого

тіло рухається з прискоренням a , відмінним від g . Якщо тіло рухається в полі тяжіння Землі з прискоренням $a \neq g$

то до цього тіла прикладена додаткова сила N , що задовольняє умову

$$N + P = ma$$

Тоді вага тіла $P' = -N = P - ma = mg - ma = m(g - a)$

якщо тіло знаходиться у стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно, то $a = 0$

і $P' = mg$

Якщо ж тіло вільно рухається в полі тяжіння по довільній траєкторії, то $a = g$, $P' = 0$ - тіло буде невагомим

Невагомість -

стан тіла, при якому воно рухається тільки під дією сили тяжіння

Згідно фундаментального фізичного закону - узагальненого закону Галілея, усі тіла в одному і тому ж полі тяжіння набувають однакове прискорення. Отже, в цьому місці Землі прискорення вільного падіння однакове для усіх тіл. В розрахунках приймають $g=9,81 \text{ м/с}^2$

Перша космічна (колова) швидкість v_1

Найменша швидкість, яку необхідно надати тілу, щоб воно могло рухатися навколо Землі по коловій орбіті, тобто перетворитися на штучний супутник. За другим законом Ньютона

$$\underline{GmM/r^2 = mv_1^2/r}$$

Якщо супутник рухається поблизу поверхні Землі, то $r \approx R_0$

(радіус Землі) $g = GM/R_0^2$

Тоді $\underline{v_1 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \text{ км/с}}$

Енергія, робота, потужність

Енергія -

універсальна міра різних форм руху і взаємодії



Робота сили -

кількісна характеристика процесу обміну енергією між тілами, що взаємодіють

Одиниця енергії та роботи

Джоуль

Дж

Якщо тіло рухається прямолінійно і на нього діє постійна сила $\vec{F}$, яка складає певний кут з напрямом переміщення, то робота цієї сили дорівнює добутку проекції сили на напрям переміщення

$$F_s = F \cos \alpha$$

на переміщення точки прикладання сили

$$A = F_s s = F s \cos \alpha$$

При $\alpha < \pi/2$ робота сили додатна, при $\alpha > \pi/2$ робота сили від'ємна.
При $\alpha = \pi/2$ (сила напрямлена перпендикулярно до переміщення) робота сили дорівнює нулю

У загальному випадку (сила змінюється як за модулем, так і за напрямом) формулою

$$A = F_s s = F s \cos \alpha$$

не користуються.

Якщо ж розглянути елементарне переміщення $d\mathbf{r}$ то силу $\mathbf{F}$ можна вважати постійною, а рух точки її прикладання – прямолінійним. У цьому випадку спочатку визначають елементарну роботу

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \alpha ds = F_s ds$$

Енергія, робота, потужність

Елементарна робота – робота сталої сили $\vec{F}$ при переміщенні на $d\vec{r}$


$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha ds = F_s ds$$

α - кут між векторами $\vec{F}$ та $d\vec{r}$;

$ds = |d\vec{r}|$ - елементарний шлях;

F_s - проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$



Робота – скалярна величина

Потужність

- фізична величина, що характеризує швидкість виконання роботи

Одиниця потужності

Ватт

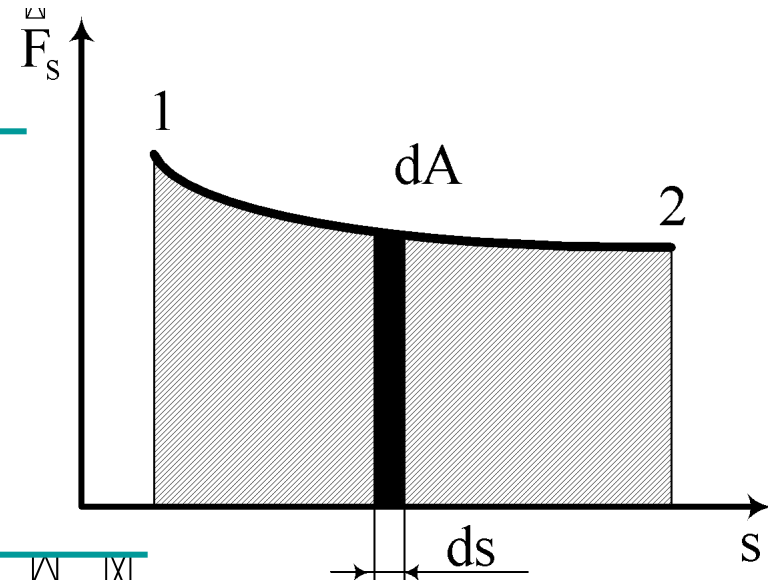
Вт

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Потужність - скалярна величина

Графічне визначення роботи

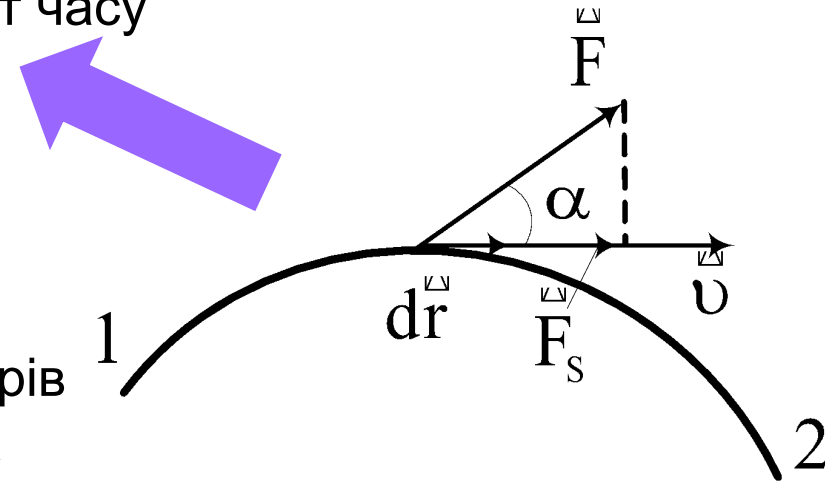
Знаючи залежність F_s від траєкторії на певній ділянці 1-2, можна визначити роботу, як площу криволінійної трапеції, зображеної на малюнку



За час dt сила $\vec{F}$ здійснює роботу Fdr і потужність що розвивається цією силою в даний момент часу

$$N = \frac{Fdr}{dt} = Fv$$

тобто дорівнює скалярному добутку векторів сили та швидкості, з якою рухається точка прикладання цієї сили



Кінетична енергія

Кінетична енергія тіла масою m ,
що рухається зі швидкістю u


$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

**Кінетична енергія
механічної системи -**

це енергія механічного
руху цієї системи

Визначається роботою, яку
необхідно вчинити, щоб надати
тілу певної швидкості

Одиниця

Джоуль

Дж

Теорема про кінетичну енергію

Робота рівнодійної прикладених
до тіла сил дорівнює зміні
кінетичної енергії тіла



$$A = E_{k_2} - E_{k_1}$$

Теорема про кінетичну енергію

Приріст кінетичної енергії тіла на елементарному переміщенні дорівнює елементарній роботі на тому ж переміщенні



Приріст кінетичної енергії тіла на деякому переміщенні дорівнює роботі усіх сил, що діють на тіло



$$\Delta E_k = \Delta A$$

Кінетична енергія неоднакова в різних інерціальних системах відліку

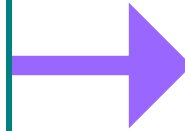
$$E_{k_1} - E_{k_2} = A_{12}$$



Кінетична енергія завжди додатна

Потенціальна енергія -

механічна енергія системи тіл, що визначається їх взаємним розташуванням та характером сил взаємодії між ними



Потенціальне поле -

поле, в якому робота, що виконується силами при переміщенні тіла з одного положення в інше не залежить від форми траєкторії, а залежить лише від початкового та кінцевого положень цього тіла

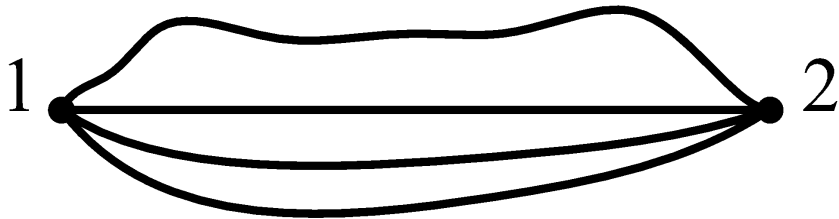
Потенціальна енергія визначається з точністю до деякої сталої. Тому потенціальну енергію тіла в певному положенні приймають рівною нулю (вибирають нульовий рівень відліку), а енергію тіла в інших положеннях визначають відносно вибраного нульового рівня

Приклади: поле пружних сил,
поле гравітаційних сил
електростатичне поле

Консервативна сила -

сила, робота якої при переміщенні точки (тіла) залежить тільки від початкового і кінцевого положень точки (тіла) в просторі

Робота консервативних сил при нескінченно малій зміні конфігурації системи дорівнює зміні потенціальної енергії, взятій з протилежним знаком, (оскільки робота здійснюється за рахунок зменшення потенціальної енергії)



$$\Delta A = -\Delta E_p$$

Одиниця

джоуль

Дж

Робота сили тяжіння. Потенційна енергія тіла, піднятого над землею

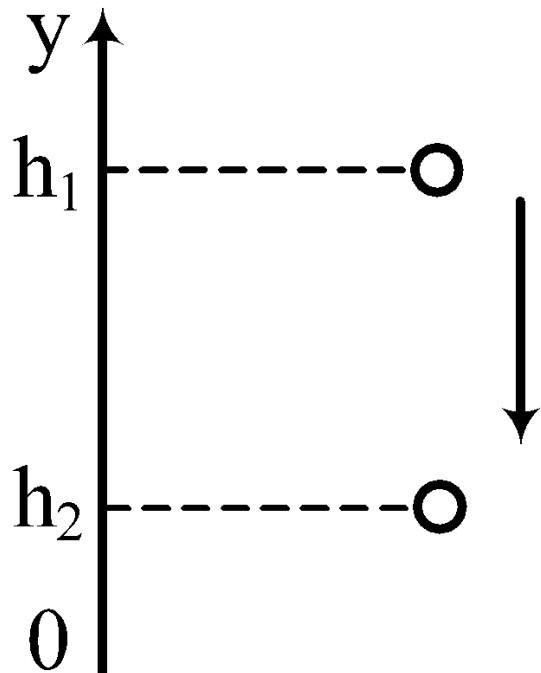
Робота сили тяжіння при вільному падінні тіла з висоти h_1 (початок відліку) до висоти h_2



$$A = mg(h_1 - h_2)$$

m - маса тіла,

g - прискорення вільного падіння



Якщо кинуте тіло рухається по вертикалі вниз з висоти h до нульового рівня, то



$$A = mgh$$

Якщо тіло рухається по вертикалі вгору на висоту h з нульового рівня, то



$$A = -mgh$$

Якщо тіло рухається по похилій площині, то робота сили тяжіння $A = mgs \cos\alpha$ (але $s \cos\alpha = h$), тому

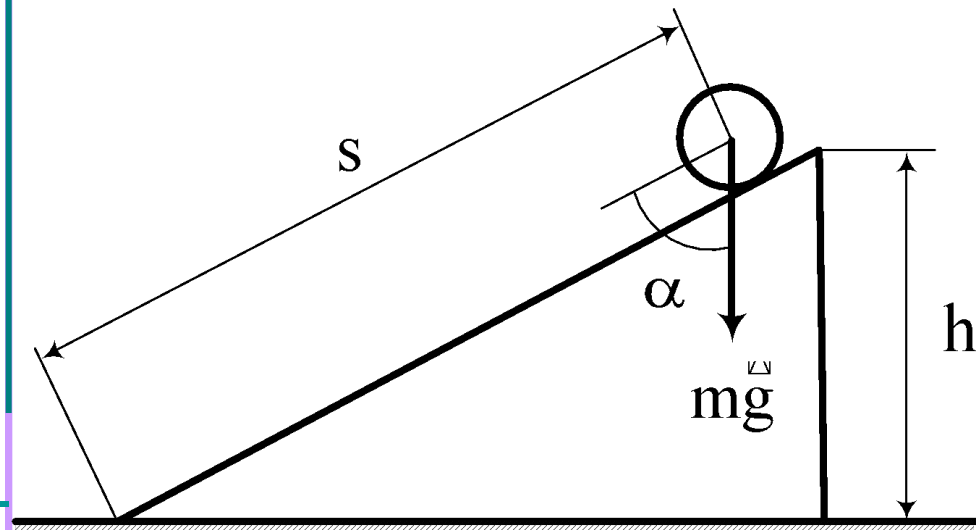
Потенціальна енергія тіла, піднятого на висоту h

$$E_p = mgh$$

Робота сили тяжіння залежить тільки від початкового і кінцевого положень тіла, тобто поле тяжіння – потенціальне

Робота сили тяжіння на замкненій траєкторії дорівнює нулю

$$A = mgh$$

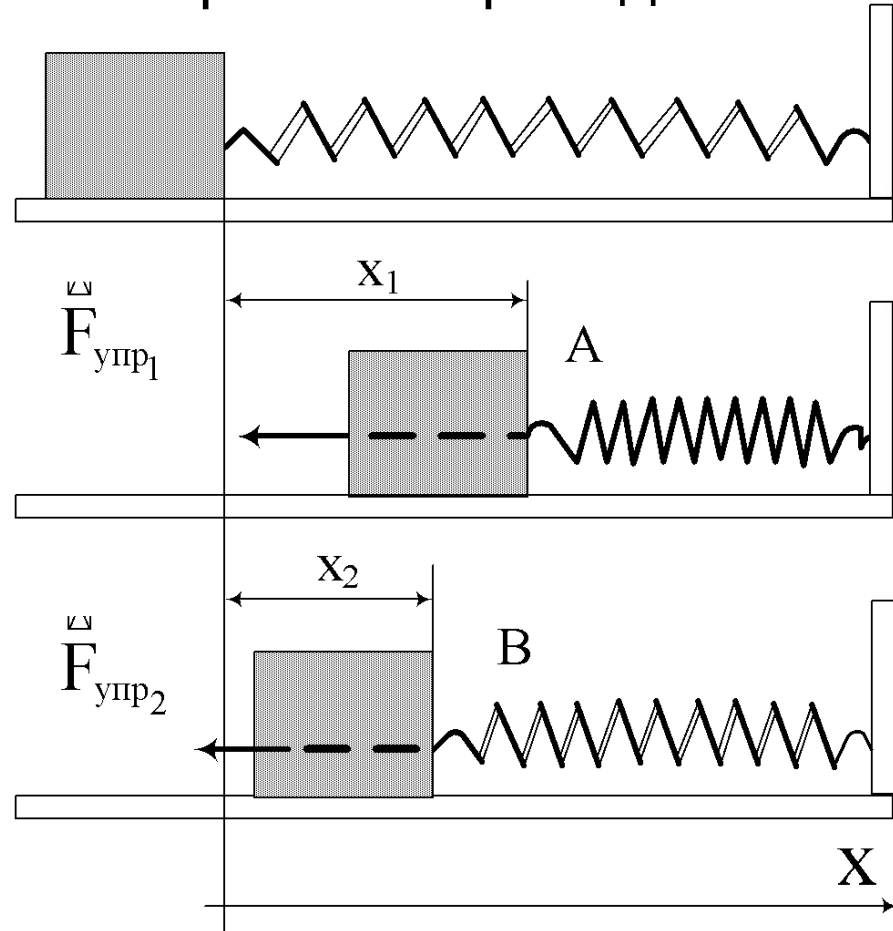


Робота сили пружності

Як приклад зазвичай розглядається робота сили пружності пружини, проте закономірності справедливі і для інших деформованих тіл


$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

k - жорсткість пружини
 x_1 і x_2 - координати
початкового та кінцевого
положення пружини



Робота сили пружності

Робота сил пружності визначається тільки початковою та кінцевою координатою, тобто поле пружних сил - потенціальне

Робота сили пружності на замкненій траєкторії дорівнює нулю

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла дорівнює роботі сили пружності під час переходу пружно деформованого тіла в положення, у якому його деформація дорівнює нулю

Повна механічна енергія системи -

Енергія механічного руху та взаємодії (дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій)


$$E = E_k + E_p$$

Взаємне перетворення кінетичної і потенціальної енергії в замкненій системі

Якщо тіла замкненої системи взаємодіють один з одним за допомогою сил тяжіння або сил пружності, то

$$A = -\left(E_{p2} + E_{p1}\right) \quad \text{і} \quad A = E_{k2} + E_{k1}$$

звідки

$$E_{k2} + E_{k1} = -\left(E_{p2} + E_{p1}\right)$$

де $E_{k1}, E_{k2}, E_{p1}, E_{p2}$ - відповідно загальна кінетична енергія системи тіл в два різні моменти часу і потенціальну енергія системи тіл в ті ж два різні моменти часу.

Отже

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$



Закон збереження повної механічної енергії

Повна механічна енергія замкненої системи тіл, що взаємодіють силами тяжіння або пружності, залишається незмінною при будь-яких рухах тіл цієї системи

Консервативна система

Механічна система, на тіла якої діють тільки консервативні сили

Більш загальніше формулювання закону збереження механічної енергії

У системі тіл, між якими діють тільки консервативні сили, повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом

У консервативних системах повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

У консервативних системах повна механічна енергія залишається постійною. Можуть відбуватися лише перетворення кінетичної енергії на потенційну і назад в еквівалентних кількостях, так що повна енергія залишається незмінною. Цей закон не є просто закон кількісного збереження енергії, а закон збереження і перетворення енергії, що виражає і якісну сторону взаємного перетворення різних форм руху один в одного. Закон збереження і перетворення енергії - **фундаментальний закон природи**.

Дисипативна сила -

сила, робота якої при переміщенні точки (тіла) з одного положення в інше залежить від траєкторії руху

Дисипативна система -

система, в якій механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в її інші (немеханічні) форми. Цей процес дістав назву дисипації (розсіювання енергії). Всі системи, в яких діє сила тертя, є дисипативними