



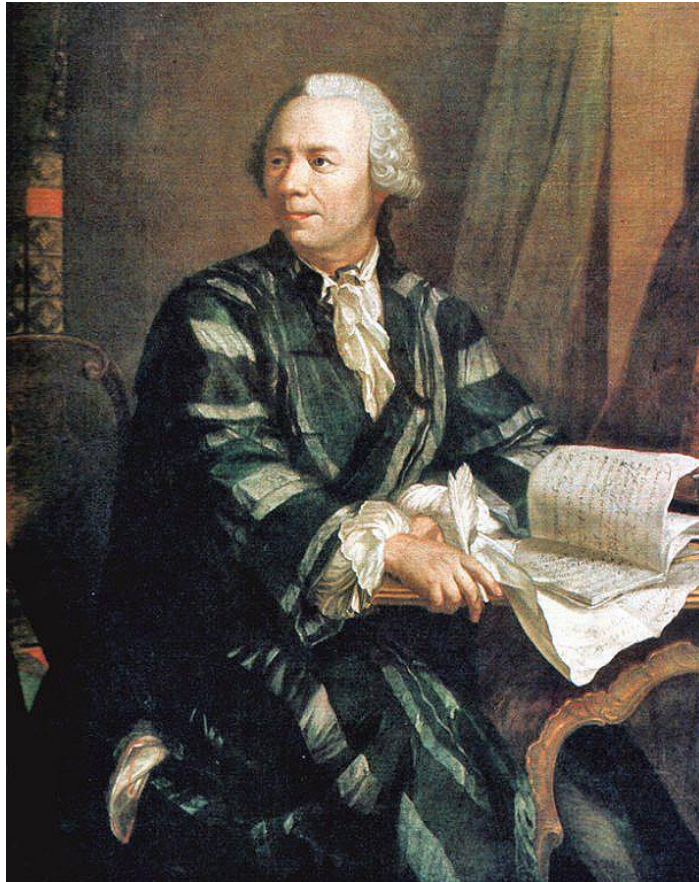
Лекция 2.

Система сходящихся сил. Момент силы

*Если на точку действует несколько сил,
то она получает от них то же движение,
как если бы на нее действовала одна сила,
эквивалентная им всем.*

Леонард Эйлер





Леонард Эйлер

1707 (Базель) – 1727-1741 (Санкт-Петербург) –
1741-1766 (Берлин) – 1766-1783 (Санкт-Петербург)

На предыдущей лекции

- Статика – раздел теоретической механики
- Основные задачи статики
- Модели в механике
- Статика – наука аксиоматичная
- Аксиомы статики
- Силы, связи и их реакции

Цель лекции

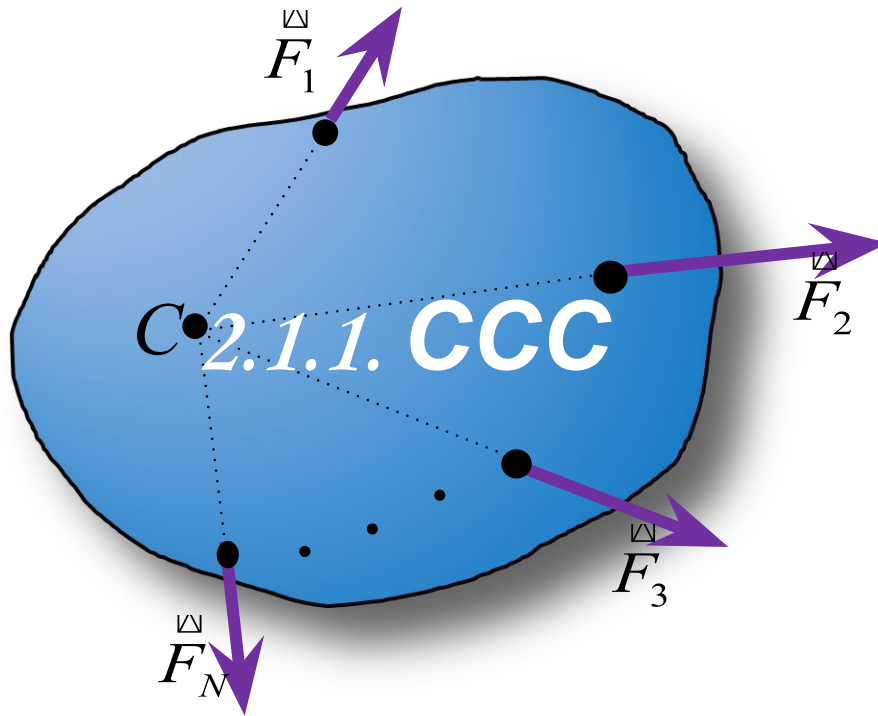
- *Решение задач статики для тел, на которые действует система сходящихся сил*
- *Ввести понятие момента силы*

План лекции

- 2.1. Определение системы сходящихся сил (ССС)
- 2.2. Теорема о равнодействующей СССР
- 2.3. Условия равновесия
- 2.4. Решение задач статики
- 2.5. Момент силы
- 2.6. Заключение

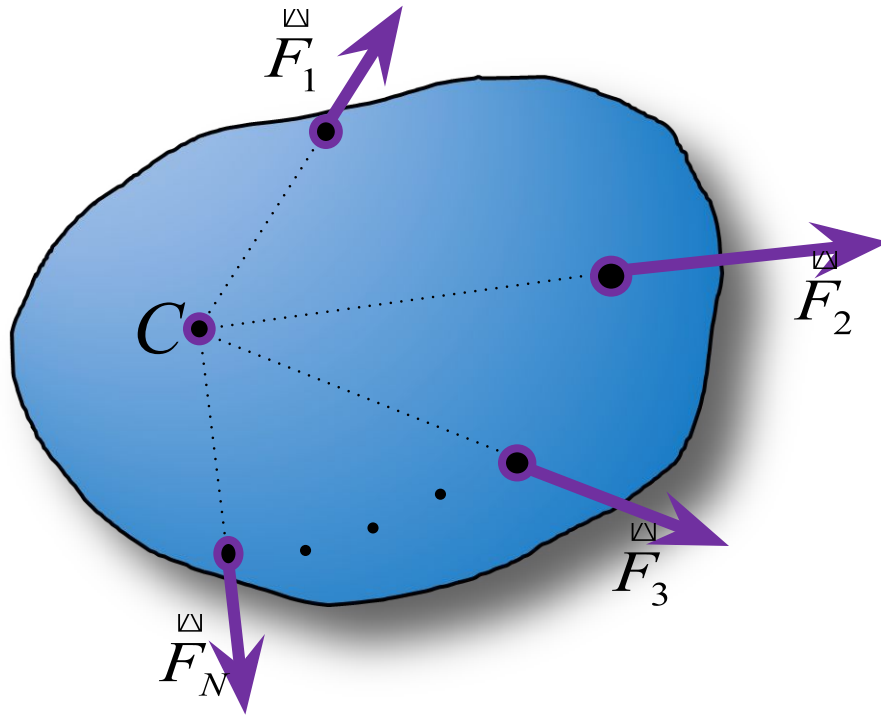
2.1. Определение ССС

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил (ССС)



2.1.2. Примеры ССС

Система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке, называются системой сходящихся сил (ССС)



2.2. Теорема о равнодействующей ССС

*Однажды Лебедь, Рак, да Щука
Везти с поклажей воз взяли,
И вместе трое все в него впряглись;
Из кожи лезут вон, а возу все нет ходу!*

*Поклажа бы для них казалась и легка:
Да Лебедь рвется в облака,
Рак пятится назад,
а Щука тянет в воду.*

*Кто виноват из них,
кто прав, - судить не нам.
Да только воз и ныне там.*



При каких условиях воз сдвинулся бы?

2.2.1. Теорема о

Равнодействующей ССС

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и проходящую через точку пересечения их линий действия

Доказательство

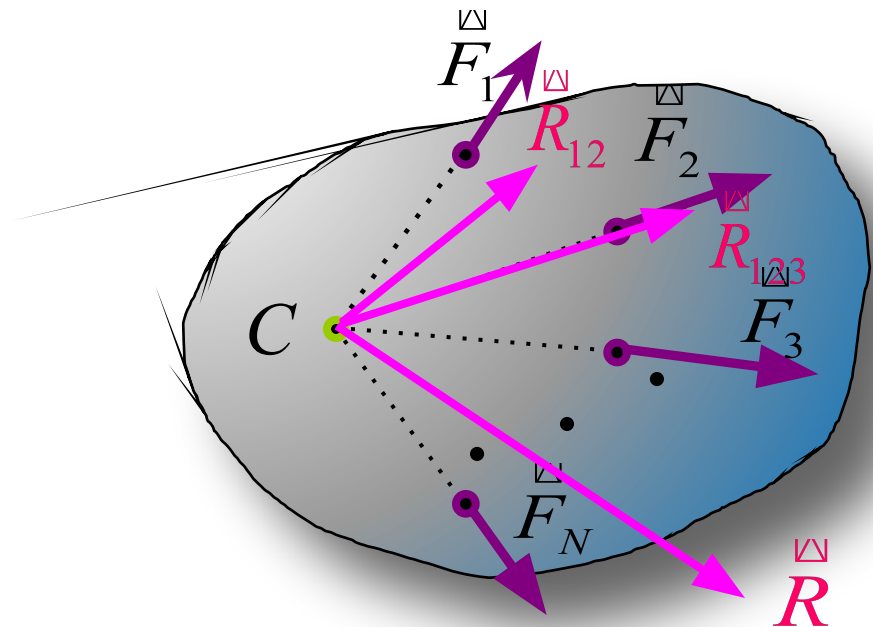
- Перенесем силы в точку пересечения линий действия
- Складывая затем силы попарно по правилу параллелограмма

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

.....

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$



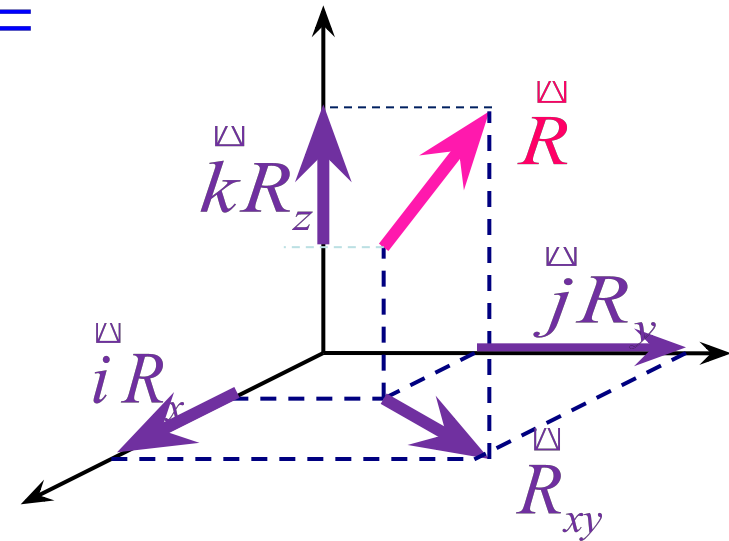
Теорема доказана

2.2.2. Аналитический Способ Определения Равнодействующей

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (i F_{kx} + j F_{ky} + k F_{kz}) =$$

$$= i R_x + j R_y + k R_z$$

Где R_x, R_y, R_z – проекции
равнодействующей на оси x, y, z



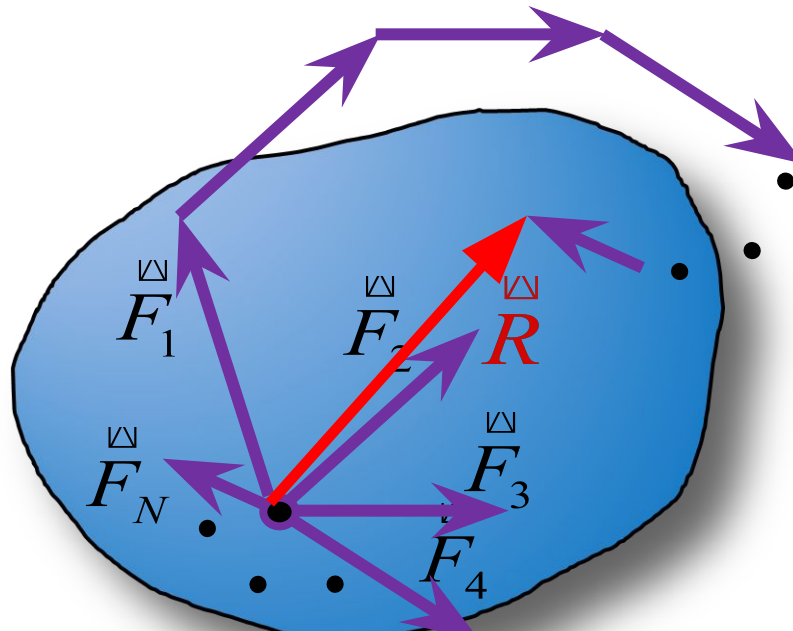
$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} \longrightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{|R|}, \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{|R|}, \quad \cos(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{|R|}$$

2.2.3. Графический Способ Определения Равнодействующей

- Равнодействующая может быть найдена геометрически
- Она является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на данных силах

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$



2.3. Условия равновесия

Действие на тело произвольной ССС эквивалентно действию одной силы, равнодействующей

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\} \sim \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Но если тело находится в равновесии под действием одной силы, то эта сила равна нулю

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

Геометрически это условие означает замкнутость силового многоугольника сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$

Тело под действием СССР находится в равновесии, если

$$\vec{R} \equiv i R_x + j R_y + k R_z = 0$$

Это векторное уравнение содержит сумму трех взаимно перпендикулярных векторов. Поэтому оно удовлетворяется только, если нулю равен каждый из слагаемых



$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

Если на тело действует плоская СССР, скажем, в плоскости xy , то данная система уравнений сводится к следующей

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

2.3.3. Теорема о Трех Силах

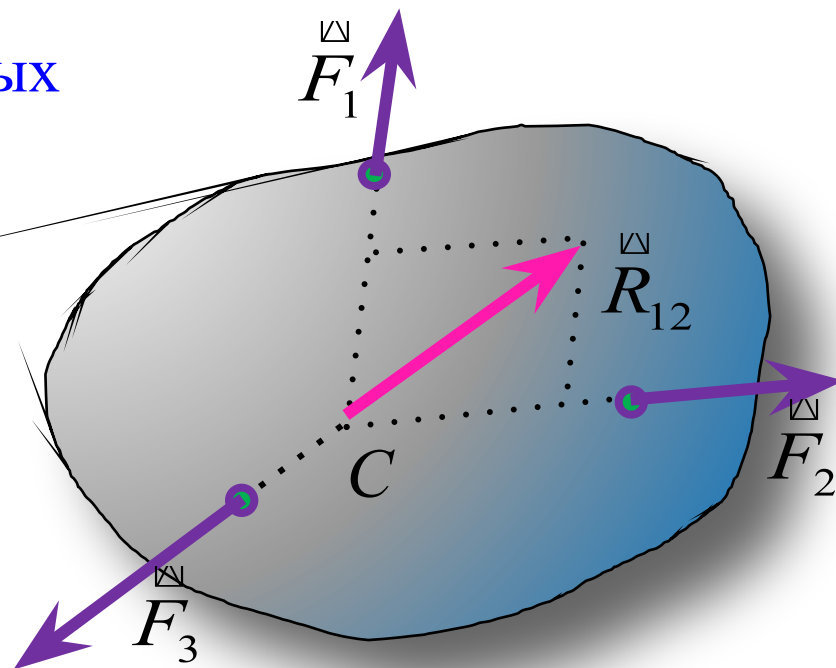
Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, причем линии действия двух из них пересекаются, то эти силы образуют ССС

Доказательство

Пусть линии действия двух первых сил пересекаются

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}_{12}, \vec{F}_3)$$

Но согласно А1 эти силы должны быть равны по величине и противоположно направлены



Линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через C . Теорема доказана

2.4. Решение задач статистики

2.4.1. Алгоритм Решения Задач

Статики

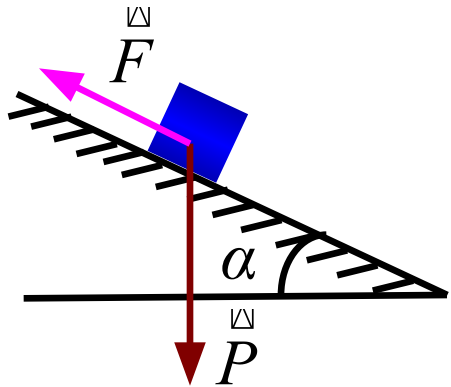
1. Установить, исследование равновесия какого тела (точки, системы тел) следует рассмотреть
2. Освободить тело от связей и изобразить действующие на него активные силы и силы реакций отброшенных связей
3. Установить, какая система сил действует на тело, и сформулировать условия равновесия этой системы
4. Составить уравнения равновесия
5. Решить уравнения равновесия и определить искомые неизвестные

Замечание

Если число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, то система называется *статически определенной*, в противном случае – *статически неопределенной*

2.4.2. Задача 2.1. Графическое

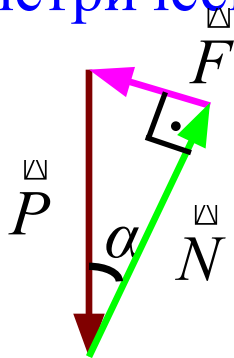
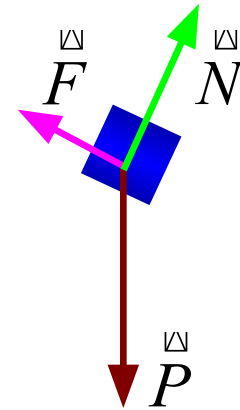
Решение



Груз весом P (точка) лежит на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить силу давления груза на плоскость и величину силы F , которую нужно приложить параллельно плоскости, чтобы удержать груз в равновесии.

Решение

- Освобождаемся от связей и рисуем все силы, под действием которых груз (точка) находится в равновесии
- Геометрическое решение задачи

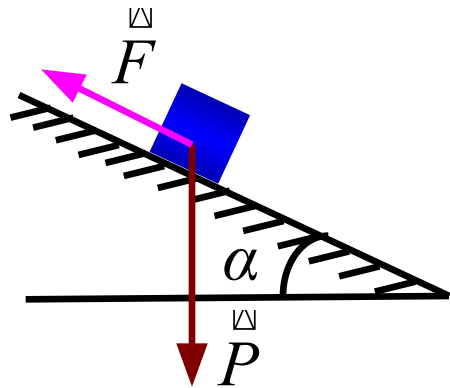


$$F = P \sin \alpha,$$

$$N = P \cos \alpha$$

2.4.2. Задача 2.1. Аналитическое

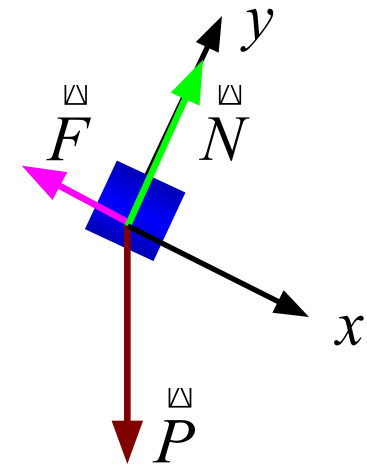
Решение



Груз весом P (точка) лежит на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить силу давления груза на плоскость и величину силы F , которую нужно приложить параллельно плоскости, чтобы удержать груз в равновесии.

Аналитическое решение задачи

- Введем систему координат
- Тело находится в равновесии по действием ССС. Составим уравнения равновесия

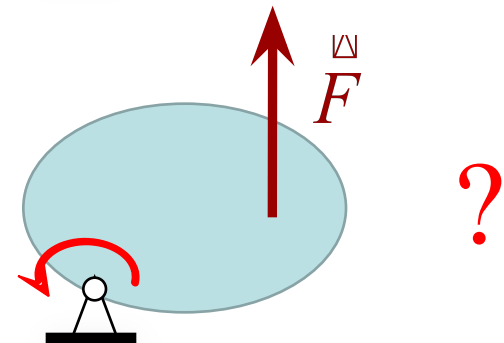
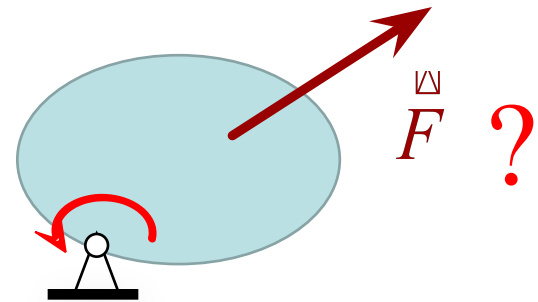
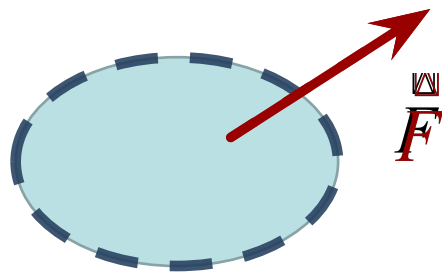


$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -F + P \sin \alpha = 0, \\ N - P \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = P \sin \alpha, \\ N = P \cos \alpha \end{cases}$$

2.5. Момент силы

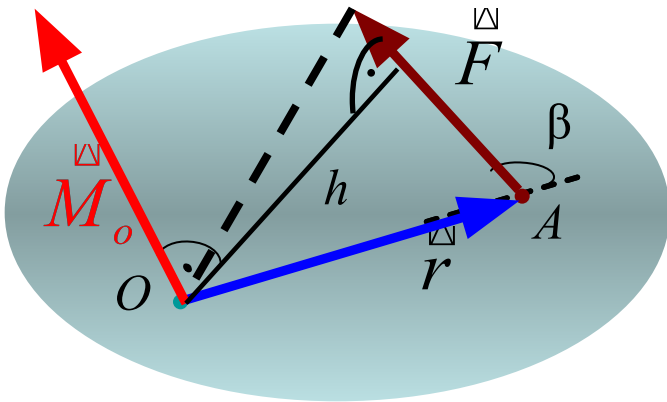
2.5.1. Мотивация

Под действием силы F неподвижное тело шарнирно закреплению ее действия



Важнейшим понятием механики наряду с силой является момент силы, отражающее тот опытный факт, что шарнирно закрепленное тело под действием силы вращается

2.5.2. Момент Силы Относительно Точки



Моментом силы F относительно точки O называется вектор $M_o(F)$, равный векторному произведению радиус-вектора r точки приложения силы и силы: $M_o(F) = r \times F$

Момент силы направлен перпендикулярно плоскости векторов r и F и в ту сторону, откуда вращение тела происходит против часовой стрелки

$$|M_o(F)| = |r| |F| \sin \beta \longrightarrow h = |r| \sin \beta \longrightarrow |M_o(F)| = Fh$$

Плечо силы h – это кратчайшее расстояние от точки относительно которой вычисляется момент до линии ее действия

2.5.3. Момент Силы Относительно Точки

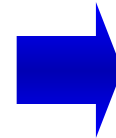
$$\vec{M}_o(F) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_o(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

где x, y, z — координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z — проекции силы на оси координат



$$\vec{M}_o(F) = \vec{i} M_{ox} + \vec{j} M_{oy} + \vec{k} M_{oz}$$

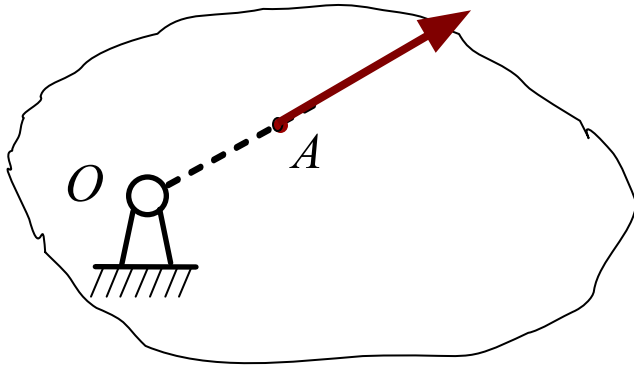


$$M_{ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_{oy} = zF_x - xF_z, \quad M_{oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

2.5.4. Модуль момента силы

$$M_O(\vec{F}) = Fh = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}$$

Замечание



- Если точка O лежит на линии действия силы, то момент силы относительно этой точки равен нулю
- Тело, закрепленное шарнирно в точке O , не будет вращаться под действием силы, линия действия которой проходит через эту точку

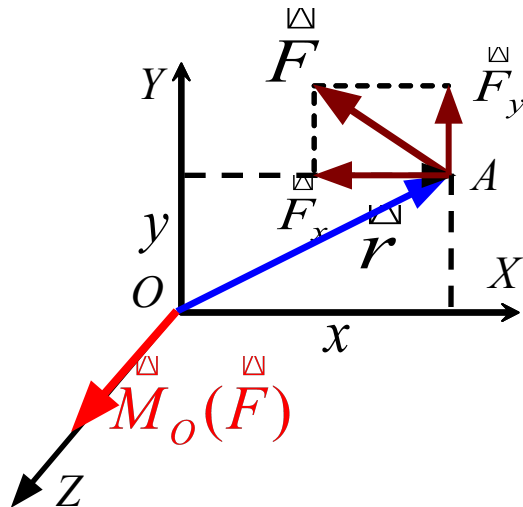
2.5.5. Момент силы на плоскости

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\vec{k} = Fhk$$

$$\vec{F} \in OXY$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) \parallel \vec{k}$$



- Вектор момента силы имеет одну составляющую и направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит сила и центр

$$m_O(\vec{F}) = \pm M_O(\vec{F}) = \pm Fh$$

- Алгебраический момент силы $m_O(\vec{F})$ имеет знак плюс, если под действием силы тело поворачивается против часовой стрелки, и минус – в противном случае

2.5.6. Задача 2.2

Найти момент силы $\vec{F} = (2, 3, 0)$ линия действия которой проходит через точку O с координатами $(1, 0, 0)$, относительно начала координат A

Решение

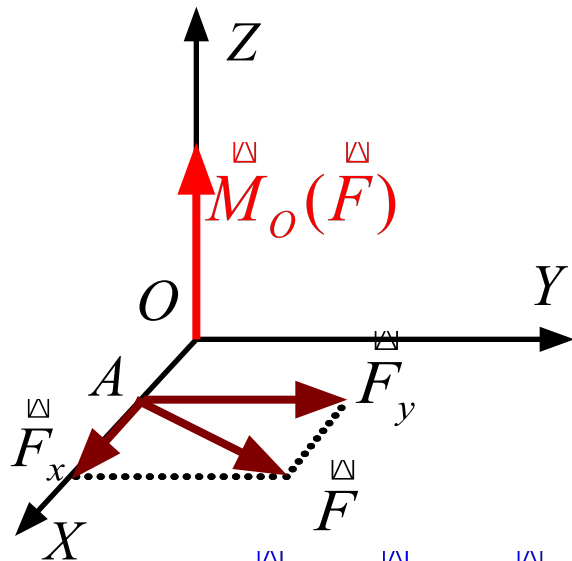
$$M_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{k}$$

Замечание

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \longrightarrow M_O(\vec{F}_x) = 0, \quad M_O(\vec{F}_y) = 3\vec{k} \longrightarrow$$

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y)$$

Это частный случай теоремы Вариньона



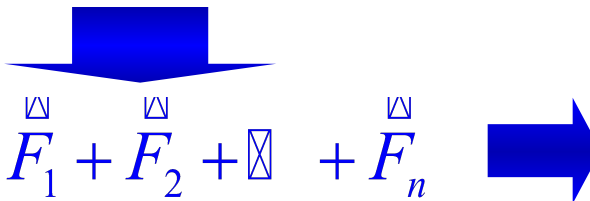
2.5.7. Теорема Вариньона

Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольной точки O равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки

Доказательство

Векторное произведение удовлетворяет закону дистрибутивности

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \rightarrow$$

$$M_O(\vec{R}) = \vec{r}_O \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \sum M_O(\vec{F}_k)$$

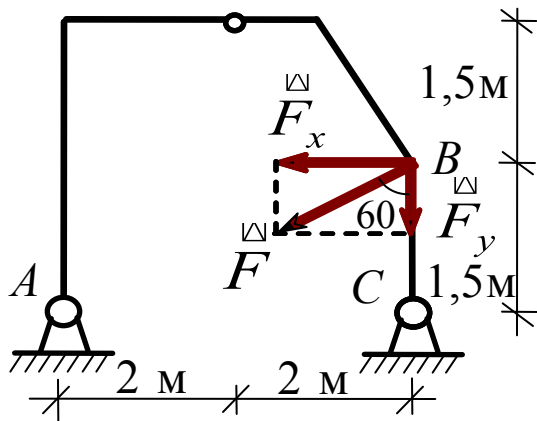
Теорема доказана



Pierre Varignon (1654-1722, Paris)

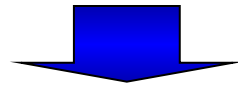
2.5.8. Задача 2.3

К двухсоставной рамной конструкции в точке B под углом 60° к вертикали приложена сила $\vec{F}$. Определить ее момент относительно точки A .



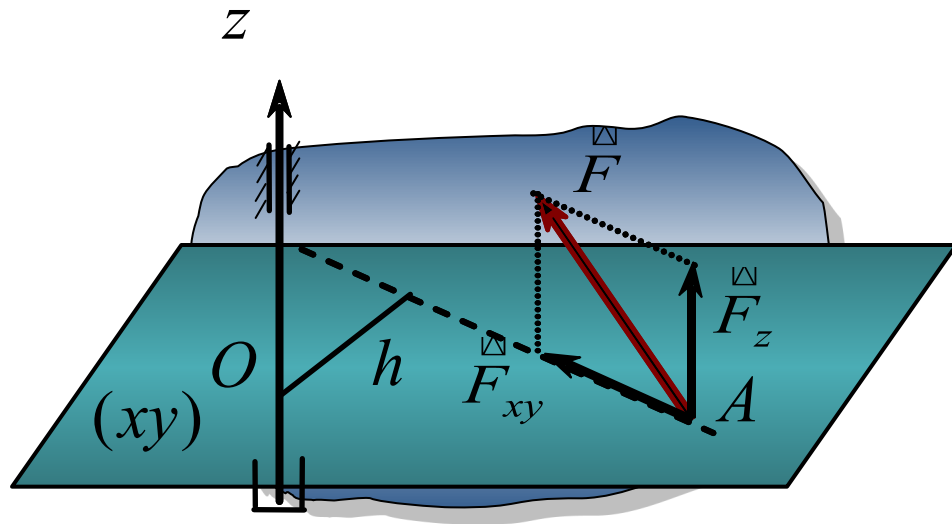
Решение

- Воспользуемся теоремой Вариньона
- Исходная сила может быть эквивалентно заменена плоской системой двух сходящихся сил $\vec{F}_x, \vec{F}_y$.



$$m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}_x) + m_A(\vec{F}_y) = 1.5F_x - 4F_y = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 2 \right) F$$

2.5.9. Момент Силы Относительно Оси

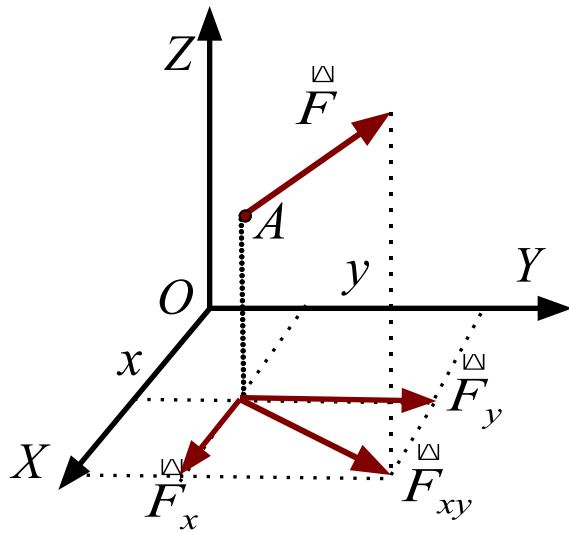


- Тело под действием данной силы будет вращаться относительно оси Oz
- Это вращение характеризуется скалярной величиной, называемой моментом силы относительно оси Oz
- За вращательное движение отвечает сила F_{xy}

Моментом силы F относительно оси OZ называется скалярная величина, равная алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения данной оси с этой плоскостью

$$M_z(F) = \pm M_z(F_{xy}) = \pm F_{xy} h$$

2.5.10. Связь Моменты Силы Относительно Точки и Оси



Чтобы найти момент силы F относительно оси Oz , воспользуемся теоремой Вариньона



$$M_z(F) = M_z(F_{xy}) = xF_y - yF_x = M_{Oz}(F)$$

Аналогично

$$M_x(F) = M_{Ox}(F) = yF_z - zF_y,$$

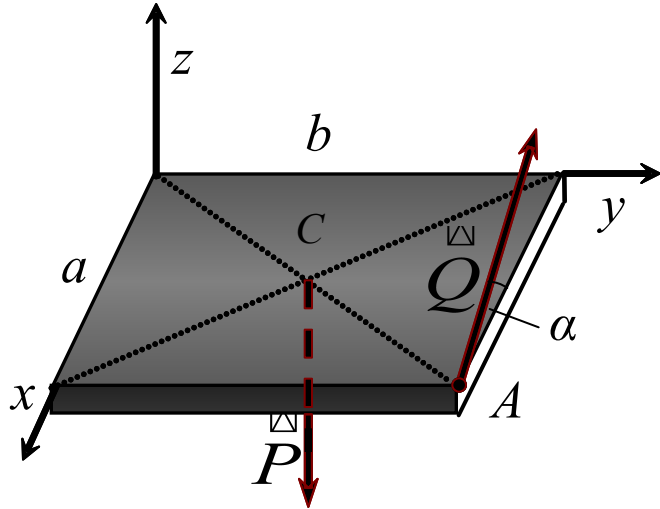
$$M_y(F) = M_{Oy}(F) = zF_x - xF_z$$

Теорема

Моменты сил относительно осей в системе координат $OXYZ$ равны проекциям момента силы относительно начала координат O

2.5.11. Задача 2.4

Определить моменты сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие на горизонтальную плиту, относительно осей x, y, z .



Решение

- Найдем проекции сил
 $P_x = P_y = 0, P_z = -P = 0,$
 $Q_x = -Q \cos \alpha, Q_y = 0, Q_z = Q \sin \alpha$
- Определим координаты приложения этих сил

$$C = (a/2, b/2, 0), A = (a, b, 0)$$

$$M_x(\vec{P}) = -0,5bP, M_y(\vec{P}) = 0,5aP, M_z(\vec{P}) = 0,$$

$$M_x(\vec{Q}) = bQ \sin \alpha, M_y(\vec{Q}) = -aQ \sin \alpha, M_z(\vec{Q}) = bQ \cos \alpha$$

2.6. Заключение

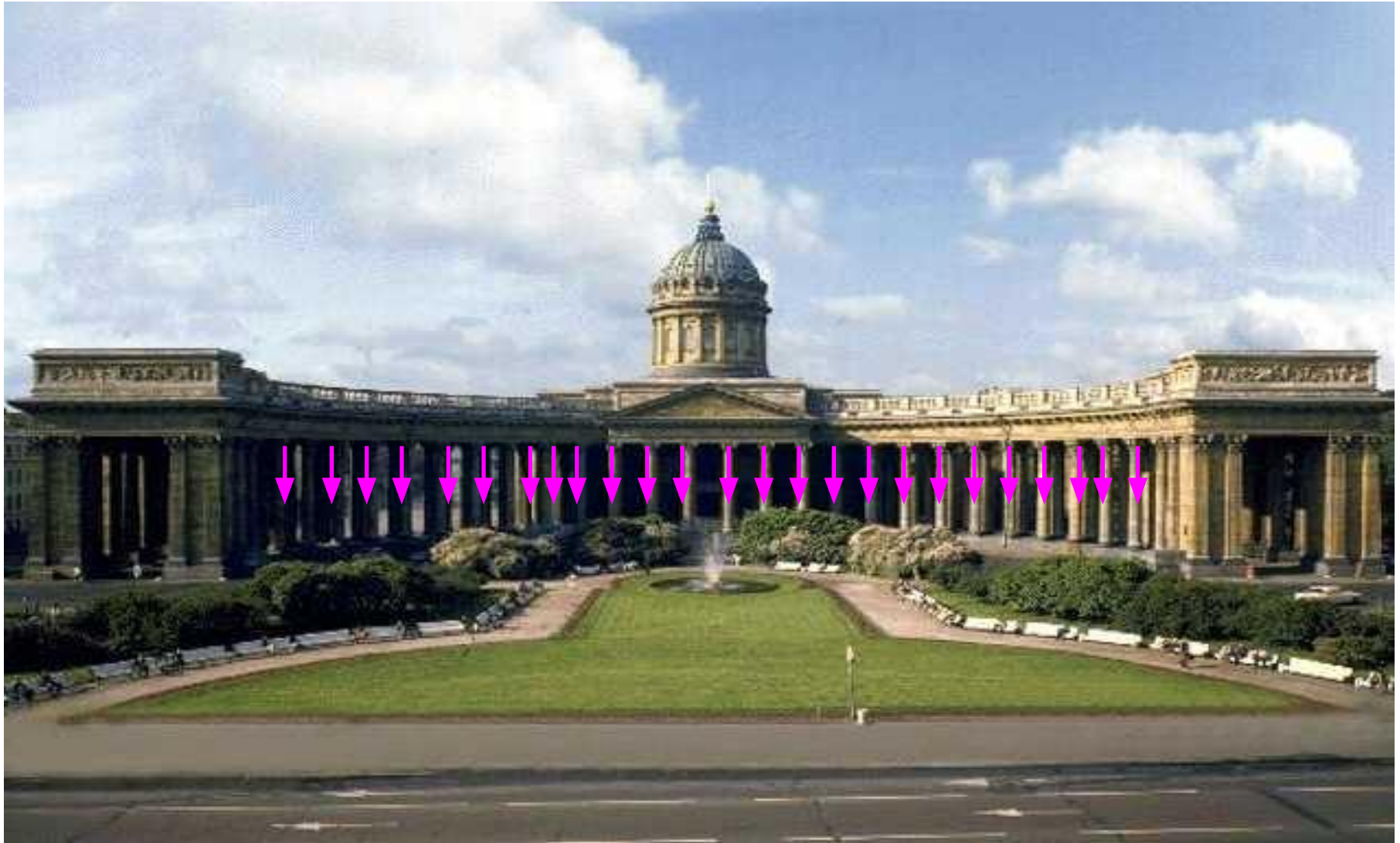
2.6.1. Основные Выводы. I

- **ССС эквивалентна действию одной силы – равнодействующей. В состоянии равновесия эта равнодействующая равна нулю**
- **Все задачи статики имеют достаточно простой алгоритм решения**
- **В статике решаются только статически определимые задачи**

2.6.2. Основные Выводы. II

- **Введен момент силы относительно центра и оси**
- **Установлена связь момента силы относительно оси и относительно центра**
- **Для плоской системы сил можно использовать алгебраическое определение момента силы**

2.6.3. Тема Следующей Лекции



Тема следующей лекции

