Кинематика твердого тела

Абсолютно твёрдым телом в теоретической механике называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остаются постоянными.

В кинематике форма твердого тела не влияет на кинематические параметры его движения. Считаем, что в движение вовлекаются любые точки из примыкающей области пространства, и их тоже можно отнести к рассматриваемому телу.

Основные задачи кинематики твердого тела

- Задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом.
- Определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Для задания движения твердого тела необходимо установить ***число степеней свободы твердого тела*** – минимальное число независимых скалярных переменных, в совокупности однозначно определяющих положение материального тела в пространстве.

Взаимодействие твердого тела с другими телами осуществляется через ***связи***.
Связи – любые материальные тела, накладывающие ограничения на положение или движение тела в пространстве.

Кинематика твердого тела

Будем рассматривать твердое тело как механическую систему, состоящую из материальных точек, расстояние между которыми остается постоянным.

Пусть система состоит из N материальных точек $\Rightarrow$ $3N$ координат.

На систему наложено m связей вида $f_l(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad l = \overline{1,m}$

Число независимых координат: $\mathrm{n} = 3N - m$

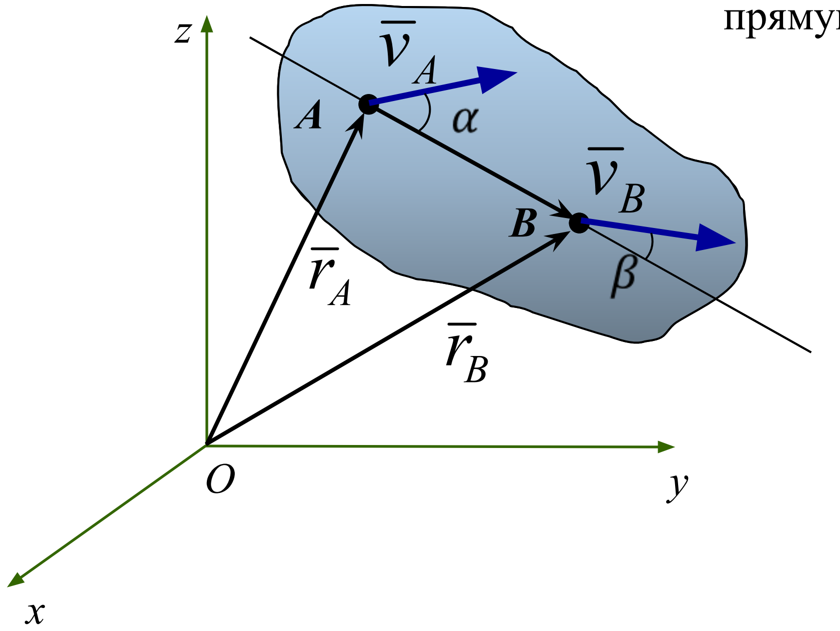
Обобщенные координаты $q_i, i = \overline{1,n}$ – независимые координаты, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве в любой момент времени. ***Число степеней свободы механической системы равно числу ее обобщенных координат.***

Виды движения твердого тела

- поступательное
- вращательное
- плоское
- сферическое
- общий случай

Простейшие движения твердого тела

Основная теорема кинематики твердого тела



Теорема. При любом виде движения твердого тела проекции скоростей точек тела на прямую, соединяющую эти точки равны.

$$\bar{r}_B - \bar{r}_A = \overline{AB}.$$

Возводя в квадрат правую и левую части, получим:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 = \overline{AB}^2$$

$$\left|\overline{AB}\right| = const$$

Дифференцируем по времени это соотношение

$$2(\bar{r}_B - \bar{r}_A)\left(\frac{d\bar{r}_B}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt}\right) = 0.$$

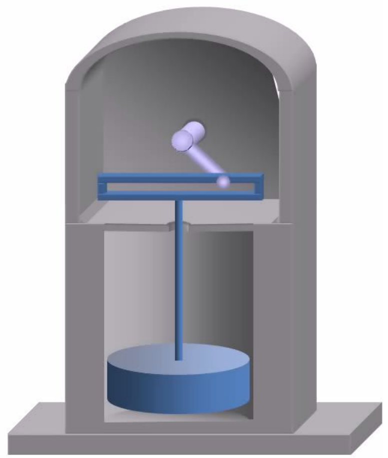
Поскольку в этом равенстве $(\bar{r}_B - \bar{r}_A) = \overline{AB}$; $\dfrac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{v}_B$; $\dfrac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$, то $2\overline{AB}(\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0$ или $\overline{AB} \cdot \bar{v}_B = \overline{AB} \cdot \bar{v}_A$.

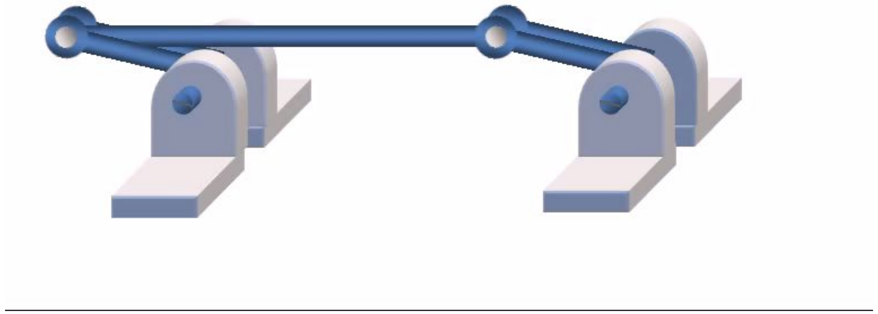
Раскрывая скалярное произведение, получим:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки в этом теле, будет оставаться параллельной своему первоначальному положению на протяжении всего времени движения.





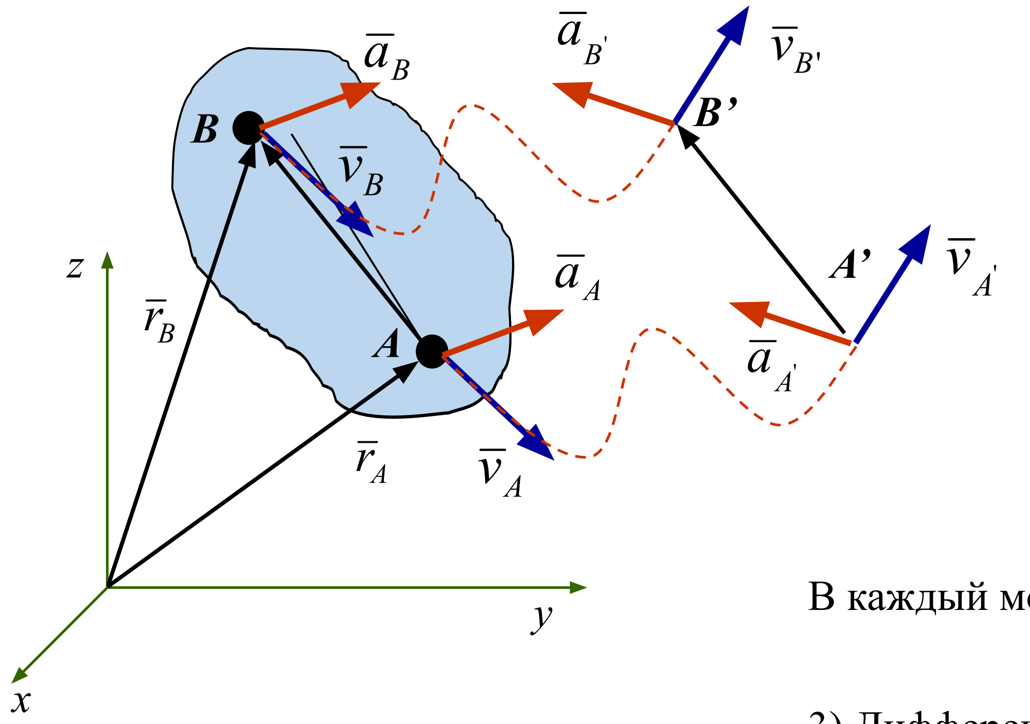
Свойства поступательного движения:

1) траектории всех точек тела, совершающего поступательное движение конгруэнтны, т.е. одинаковы и могут быть совмещены друг с другом параллельным переносом;

2) скорости всех точек тела одинаковы;

3) ускорения всех точек тела одинаковы.

Поступательное движение твердого тела



1) Для любых двух точек A и B

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}, \qquad \overline{AB} = \overline{const}.$$

Траектории точек ***A*** и ***B***, как годографы $\bar{r}_A, \bar{r}_B$ смещены на одну и ту же величину в одном и том же направлении.

2) Дифференцируя по времени правую и левую части соотношения для радиус-векторов, получим:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}, \qquad \frac{d\,\overline{AB}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt}.$$

В каждый момент времени скорость точки *B* геометрически равна скорости точки *A*:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A.$$

3) Дифференцируя левую и правую части соотношения для скоростей, получим:

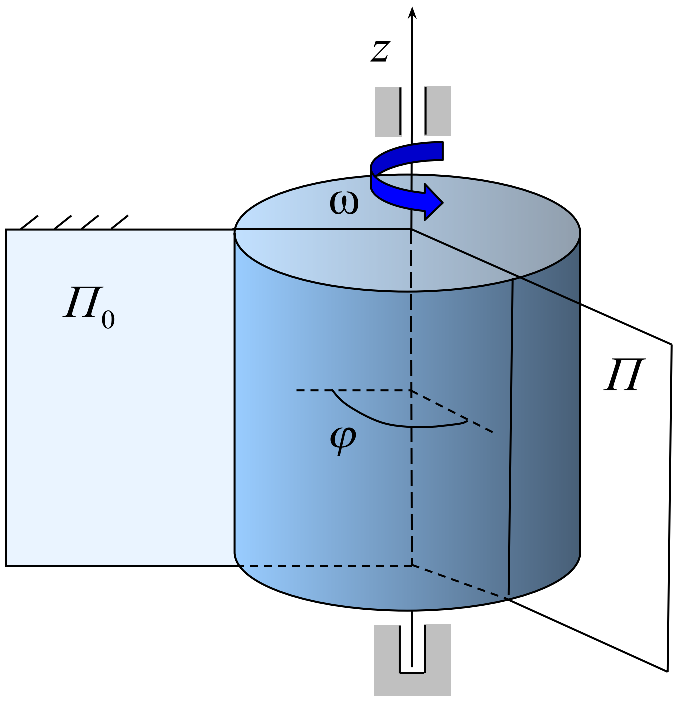
$$\frac{d\bar{r}^2{}_A(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}^2{}_B(t)}{dt^2}, \qquad \bar{a}_B = \bar{a}_A.$$

Для описания поступательного движения тела, достаточно задать движение любой одной его точки.

$x_A = x_A(t),\;\; y_A = y_A(t),\;\; z_A = z_A(t)$ уравнения поступательного движения твердого тела

Свободное твердое тело при поступательном движении имеет **три степени свободы.**

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси или вращательным движением называется такое движение, при котором в теле можно выделить прямую, все точки которой будут оставаться неподвижными во время движения. Эта прямая называется ***осью вращения*** твердого тела.

Проведем через ось вращения неподвижную плоскость $П_0$ и подвижную П, жестко связанную с вращающимся телом. Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают.

Тогда в момент времени t положение подвижной плоскости и самого вращающегося тела можно определить двугранным углом между плоскостями. Этот угол называется углом поворота тела.

$\varphi = \varphi(t)$ – закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Таким образом, при вращательном движении тело имеет ***одну степень свободы.***

Угловая скорость.

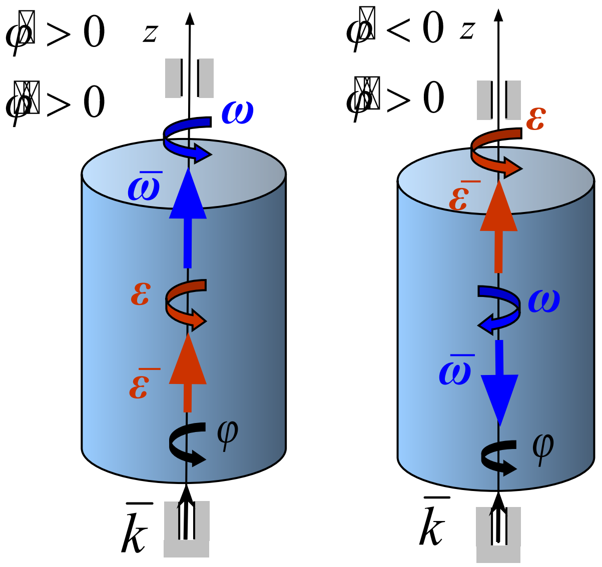
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t)}{\Delta t} = \omega_{cp}$$ – средняя угловая скорость,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$$ – алгебраическая угловая скорость.

$[\omega]$ = рад/с

Угловая скорость на чертеже изображается дуговой стрелкой, направленной в сторону вращения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Вектор угловой скорости

$$\bar\omega = \dot\varphi\bar k,\ \ \omega_z = \bar\omega\bar k = \dot\varphi, \qquad \omega = |\bar\omega| = |\omega_z| = |\dot\varphi|.$$

Техническая характеристика – частота n, $[n] = \text{об/мин}$, $\omega = \dfrac{2\pi n}{60} \approx 0{,}1n$

Алгебраическое угловое ускорение

$$\varepsilon_z = \ddot\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad [\varepsilon] = \text{рад/с}^2$$

Вектор углового ускорения

$$\bar\varepsilon = \frac{d\bar\omega}{dt} = \ddot\varphi\bar k, \quad \varepsilon_z = \bar\varepsilon\bar k = \ddot\varphi, \quad \varepsilon = |\bar\varepsilon| = |\varepsilon_z| = |\ddot\varphi|.$$

$\bar\omega, \bar\varepsilon$ - это скользящие вектора

$\bar\omega \uparrow\uparrow \bar\varepsilon$ ускоренное вращение
$\bar\omega \uparrow\downarrow \bar\varepsilon$ замедленное вращение

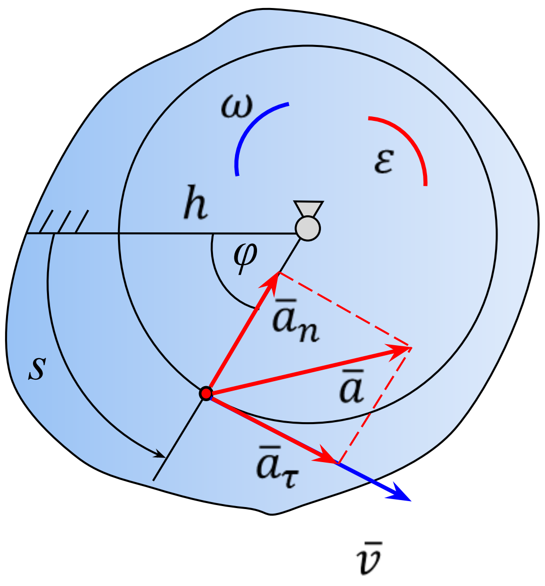
Частные случаи.

1) Равномерное вращение $\omega_z = const.$ $\quad \varepsilon_z = \dot\omega_z = 0,\quad \varphi(t) = \omega_z t + \varphi_0$

2) Равнопеременное вращение $\varepsilon_z = const.$ $\quad \varepsilon_z = \dot\omega_z,\quad \omega_z = \varepsilon_z t + \omega_0,\quad \varphi(t) = \varepsilon_z\dfrac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$

Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении

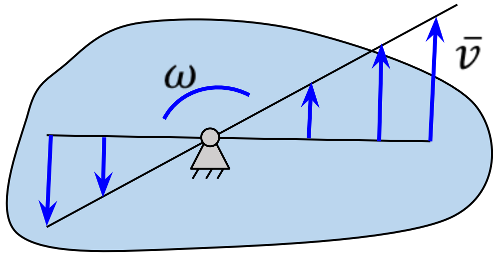
Скалярные выражения для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении.



$$s(t) = h\varphi(t); \qquad v_\tau = \dot{s} = h\dot{\varphi}; \qquad v = h\omega.$$

Скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси.

Поле скоростей точек тела при вращательном движении:

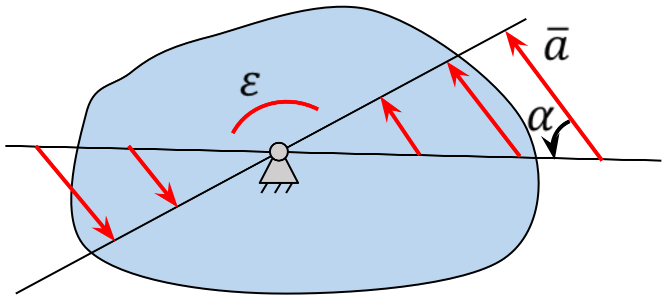


$$a_n = v^2/\rho = h^2\omega^2/h = h\omega^2 \qquad a_\tau = \ddot{s} = h\ddot{\varphi} = h\varepsilon;$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси.

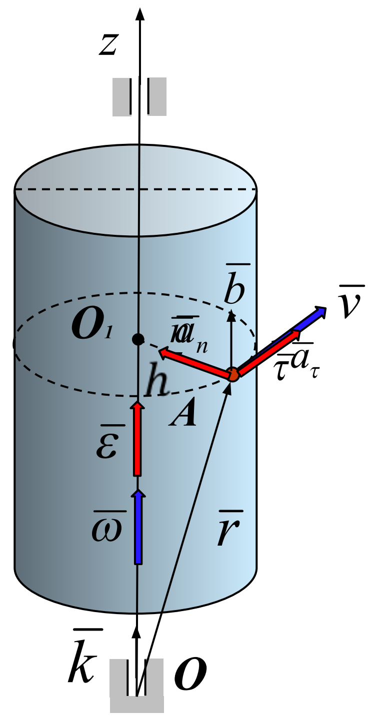
Поле ускорений точек тела при вращательном движении:



$$tg\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении

Векторные выражения для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении.



$$\bar{r} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}, \qquad \overline{OO_1} = OO_1\bar{k}, \qquad \overline{O_1A} = -h\bar{n}, \qquad \overline{OO_1} = \overline{const}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{OO_1} + \overline{O_1A}) = \frac{d}{dt}(\overline{OO_1} - h\bar{n}) = -h\frac{d\bar{n}}{dt}, \qquad \frac{d\bar{n}}{dt} = -\dot{\varphi}\bar{\tau} \Rightarrow \bar{v} = h\dot{\varphi}\bar{\tau}$$

Поскольку $\bar{\tau} = \bar{n} \times \bar{b} = \bar{n} \times \bar{k}$, то:

$$\bar{v} = h\dot{\varphi}(\bar{n} \times \bar{k}) = \dot{\varphi}\bar{k} \times (-h\bar{n}) = \dot{\varphi}\bar{k} \times (OO_1\bar{k} - h\bar{n})$$

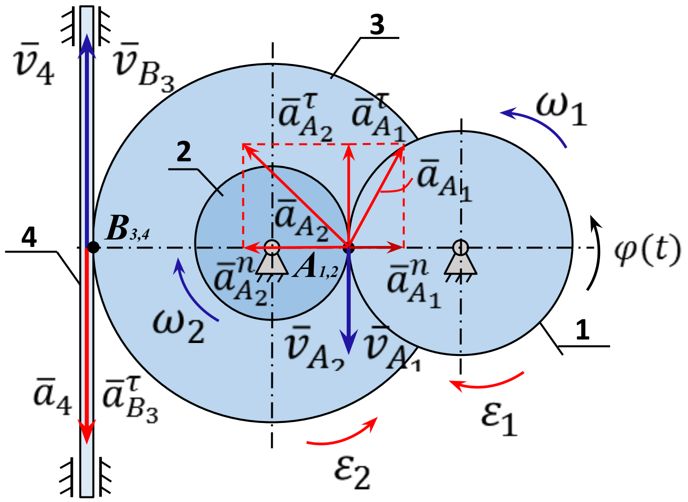
Окончательно получаем: $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ – **формула Эйлера.**

Дифференцируя формулу Эйлера по времени, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

$$\overline{a_\tau} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\,; \quad \overline{a_n} = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Пример



Дано:

$\varphi(t) = 3t - t^2$*рад,* ***R****1 =10см,* ***R****2=5см,* ***R****3 =20см,* ***t*** *=1с*

Найти: $v_{A_1} v_{A_2}, a_{A_1}, a_{A_1}, v_4, a_4$

Решение.

$\omega_{1z} = \dot{\varphi} = 3 - 2t = 1\text{рад/с}, \qquad \omega_1 = |\omega_{1z}| = 1\text{рад/с}$

$v_{A_1} = \omega_1 R_1 = 10\text{см/с}, \qquad v_{A_1} = v_{A_2}$

$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \qquad \omega_2 = \dfrac{v_{A_1}}{R_2} = 2 \text{ рад/с}$

$\omega_3 = \omega_2, \qquad v_{B_3} = v_{B_4} = v_4 = \omega_3 R_3 = 40 \text{ см/с}$

$\varepsilon_{1z} = \ddot{\varphi} = -2 \text{ рад/с}^2, \qquad \varepsilon_1 = |\varepsilon_{1z}| = 2\text{рад/с}^2,$

$a^{\tau}_{A_1} = \varepsilon_1 R_1 = 20\text{см/с}^2, \qquad a^{\tau}_{A_1} = a^{\tau}_{A_2}, \qquad \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2,$

$\varepsilon_2 = \dfrac{a^{\tau}_{A_1}}{R_2} = 4 \text{ рад/с}^2, \qquad a^{n}_{A_1} = \omega_1^2 R_1 = 10\text{см/с}^2, \qquad a^{n}_{A_2} = \omega_2^2 R_2 = 20\text{см/с}^2, \qquad a^{\tau}_{B_3} = a^{\tau}_{B_4} = a_4 = \varepsilon_3 R_3 = 80\text{см/с}^2$

$a_{A_1} = \sqrt{a^{\tau 2}_{A_1} + a^{n2}_{A_1}} \approx 22{,}36 \text{ см/с}^2, \qquad a_{A_2} = \sqrt{a^{\tau 2}_{A_2} + a^{n2}_{A_2}} \approx 28{,}28 \text{ см/с}^2$