Тема 2. Методы решения нелинейных уравнений

Лекция 5. Численные методы решения нелинейных уравнений.

1. Нелинейные уравнения. Понятия и определения.
2. Метод половинного деления.
3. Решение нелинейных уравнений методом итерации.
4. Решение нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона.

Литература: [1] с.31-43, 123-126.

1. Нелинейные уравнения. Понятия и определения

Уравнение вида: **$f(x)=0$**, если $f(x)$ не является многочленом 1-ой степени, называется ***нелинейным*** или ***трансцедентным***.

Всякое $x=x^*$, обращающее в 0 уравнение, есть его корень.

Решение состоит из 2-х этапов:

а) отделение корней (*изолированные* корни);

б) уточнение корней.

a):

Теорема 1

Если, непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ на его краях принимает разные значения, т.е. $f(a)f(b)<0$, то внутри этого отрезка существует хотя бы один корень уравнения $\mathbf{f(x)=0}$.

Корень единственный, если производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри интервала $(a;b)$.

Алгоритм отделения корней:

- определяются граничные точки x=a, x=b области существования f(x);
- вычисляются значения функции f(x) на [a;b] с шагом h до смены знака функции при переходе от f(x) до f(x+h) (шаг выбирается с учетом особенностей функции);

б):

Уточнение корней заключается в поиске приближенного корня x_n, при котором:

$$f(x_n)<\varepsilon, \tag{5.1}$$

где ε- заданная точность определения корней (для точного корня x^* выполняется $f(x)=0$).

Теорема 2

Для точного x^* и приближенного x_n корней нелинейного уравнения, принадлежащих отрезку [a;b], модуль производной функции на этом отрезке всегда больше некоторого m_1.

б):

Тогда, точность отыскания корней определяется:

$$| x_n - x^* | < f'(x) / m_1 \tag{5.2}$$

Методы уточнения корней (решения) нелинейных уравнений:

- метод половинного деления;
- метод простой итерации;
- метод касательных (метод Ньютона - Рафсона).

2. Метод половинного деления.

Постановка задачи: уточнить корни уравнения $f(x)=0$, на отрезке $[a;b]$.

Алгоритм:

- выбирается середина отрезка $C=(a+b)/2$;
- проверка условия окончания $f(c)=0$ или $|b-a|/2^n<E$ (n, E-число итераций и точность);
- определение отрезка $[a;c]$ или $[c;b]$, на концах которого значения функции имеют разные знаки;
- повторение итераций.

Пример:

Уточнить корень уравнения $x^4+2x^3-x-1=0$, принадлежащий отрезку $[0;1]$. Сделать 6 итераций.

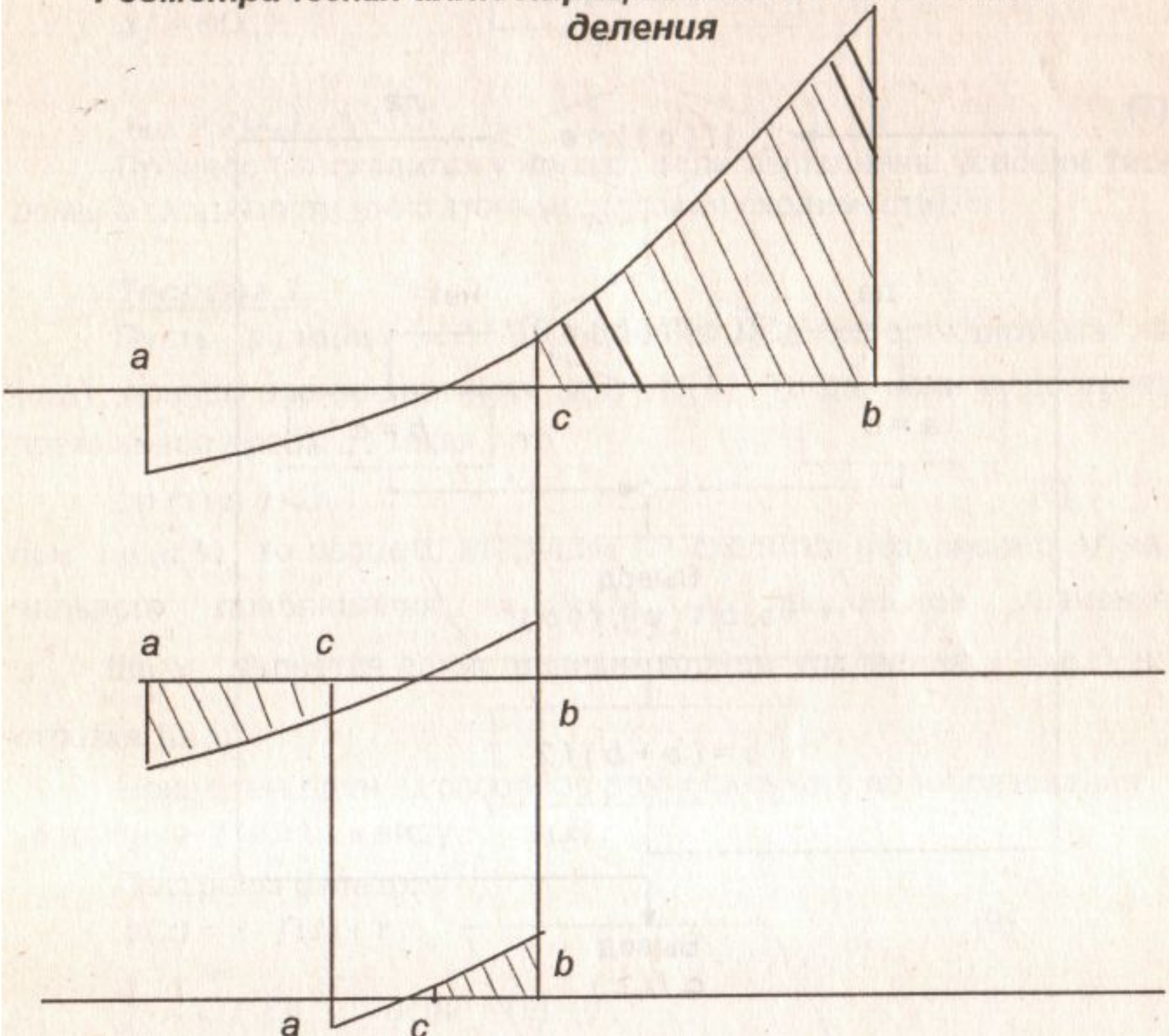
Решение.

Таблица 1

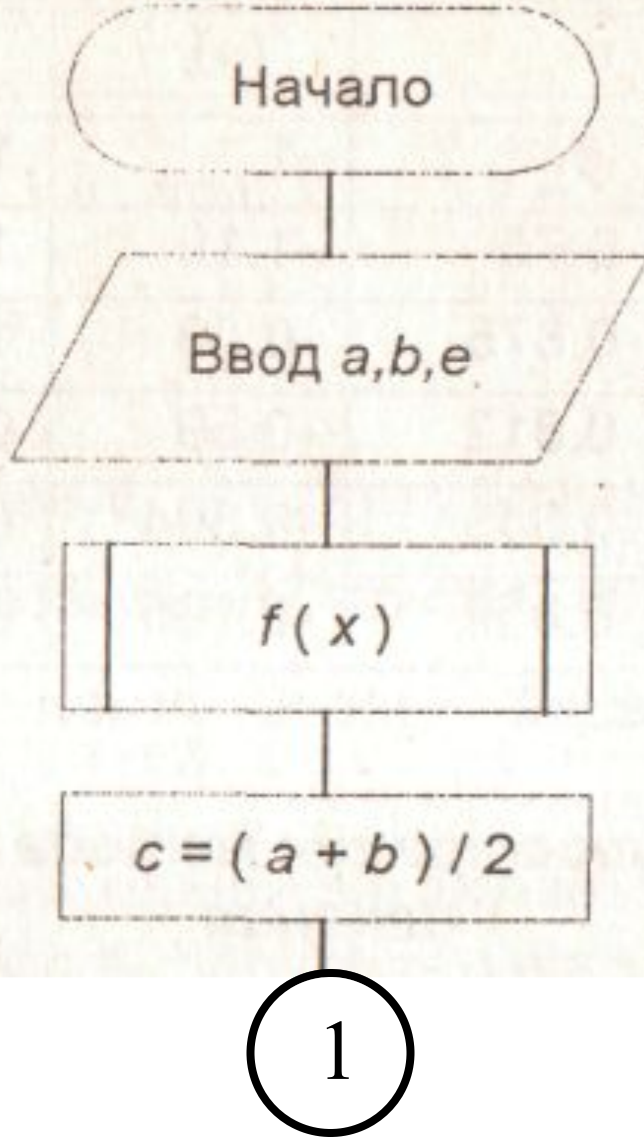
n	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
1	0	1	.5	-1	1	-1.19
2	0.5	1	0.75	-1.19	1	-0.59
3	0.75	1	0.875	-0.59	1	.05
4	0.75	0.875	0.812	-0.59	0.05	0.304
5	0.812	0.875	0.843	-0.304	0.05	-0.135
6	0.843	0.875	0.859	-0.135	0.05	0.045

После шести итераций корень локализован на отрезке [0.843;.875].

Геометрическая иллюстрация метода половинного деления



Структурная схема алгоритма метода половинного деления



Входные параметры:

a - начало отрезка;

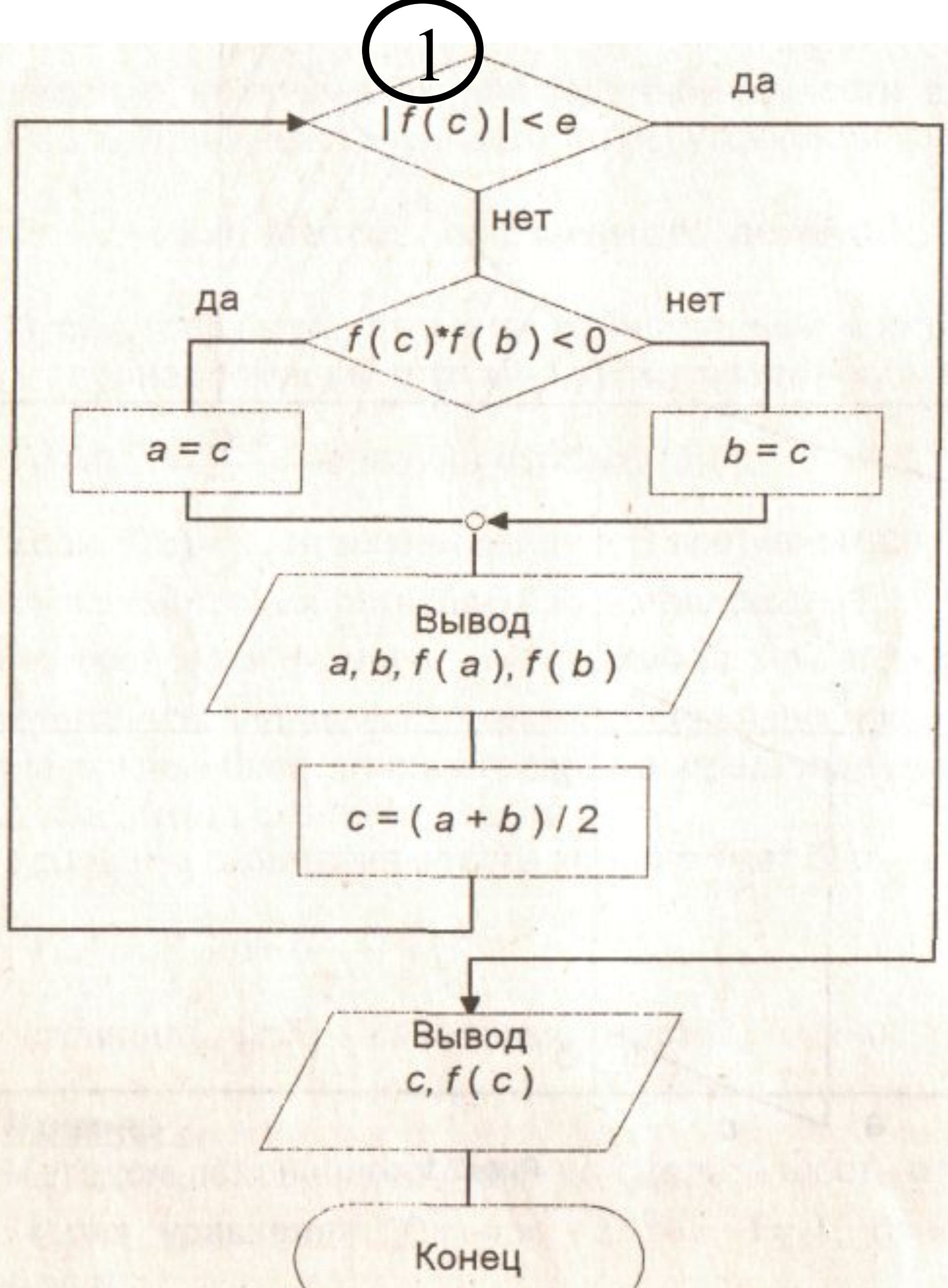
b - конец отрезка;

e - точность.

Выходные параметры:

c - значение корня;

f (*c*) - значение функции в точке *c*.


1
|f(c)| < e
да
нет
да
f(c)*f(b) < 0
нет
a = c
b = c
Вывод
a, b, f(a), f(b)
c = (a + b) / 2
Вывод
c, f(c)
Конец

3. Решение нелинейных уравнений методом итерации.

Уравнение **f(x)=0** должно удовлетворять условиям:

- **f(x)** должна быть дифференцируема на [a,b];
- **f(x)** должна принимать разные значения на краях интервала: **f(a)f(b)<0** (тогда внутри интервала имеется хотя бы один корень уравнения);
- $\mathbf{f'(x)\neq 0}$ на [a,b] (если производная внутри интервала не меняет знак, то корень один);

Метод заключается в том, что:

а)заменяется уравнение $\mathbf{f(x)=0}$ на равносильное ему уравнение вида $\mathbf{x=\varphi(x)}$;

б)произвольно выбирается начальное значение $\mathbf{x_0 \in [a,b]}$;

в)вычисляются итерации:

$$\mathbf{x_1 = \varphi(x_0);}$$

$$\mathbf{x_2 = \varphi(x_1);}$$

…………………..

$$\mathbf{x_{n+1} = \varphi(x_n);\ n=0,1\ldots..}$$

г)проверяется выполнение условий сходимости:

<u>Теорема:</u> процесс итерации $\mathbf{x_{n+1}=\varphi(x_n)}$ сходится не зависимо от выбора начального значения $\mathbf{x_0 \in [a,b]}$ и предельное значение $\mathbf{x^*=\lim_{n\to\infty} x_n}$ – единственный корень уравнения $\mathbf{x=\varphi(x)}$ на **[a,b],** если:

- все значения $\mathbf{\varphi(x) \in [a,b]}$ и она дифференцируема на этом отрезке;
- существует правильная дробь q, такая, что $\mathbf{|\varphi(x')| \le q < 1}$.

Алгоритм метода итераций:

А) исходное уравнение заменяется функцией вида $\boldsymbol{\varphi(x)=\lambda f(x)+x}$, где: (1)

$$-1/r<\lambda<0 \quad \text{при } f(x)>0;$$

$$0<\lambda<1/r \quad \text{при } f(x)<0;$$

$$r=\max(|f'(a)|,|f'(b)|).$$

Б) выбирается начальное значение $\boldsymbol{x_0 \in [a,b]}$.

В) в (1) по условиям после вычисления **r** выбирается **λ** и составляется рекурентная формула метода итерации вида:

$$X_{n+1}=\lambda f(x_n)+x_n$$

Г) Проверяются условия сходимости:

$$\Delta \mathbf{x} = |\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n| \leq \mathbf{m}/(1-\mathbf{q})\mathbf{q}^{\mathbf{m}}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{m} = |\mathbf{x}_n - \varphi(\mathbf{x}_n)|$; $\mathbf{q} = |\varphi'(\mathbf{x}_n)|$.

Процесс вычисления (пункты в, г) повторяется до тех пор, пока не достигается заданная точность решения E, т.е. расчеты прекращаются, когда выполнится неравенство (пункт г):

$$\Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{E}.$$

4. Решение нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона.

Для решения уравнения вида **f(x)=0** формула метода Ньютона-Рафсона:

$$\mathbf{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (1)$$

Возможность применения метода определяется теоремой:

если на интервале [a;b] функция F(x)=f(x)-x дважды дифференцируема и на краях интервала принимает различные по знаку значения F(a)F(b)<0, то исходя из начального приближения, отвечающего условию:

$$F(x_0)F''(x)>0, \qquad (2)$$

можно вычислить методом Ньютона-Рафсона единственный корень уравнения с любой заданной точностью.

Из теоремы следует, что $F(x)=f(x)-x$ на интервале $[a;b]$ должна удовлетворять следующим требованиям:

- должна быть определена и непрерывна;
- на краях принимать противоположные по знаку значения $F(a)F(b)<0$;

- $F'(x) \neq 0$;
- $F''(x)$ существует и сохраняет знак (следовательно, на [a;b] только один корень);
- если F(x) в окрестности корня x^* имеет производную близкую к нулю (корень-экстремум функции), то применение метода дает неудовлетворительный результат.

Погрешность оценивается как:

$$|\mathbf{x_n - x_{n-1}}| \leq \sqrt{\mathbf{2min}|F'(x)|\mathbf{E/max}|F''(x)|}\mathbf{;} \qquad (3)$$

Алгоритм метода Ньютона-Рафсона :

А) определяются 1-я и 2-я производные, их знаки, минимальное для 1-ой и максимальное для 2-ой производных значения на отрезке **[a,b]** (с помощью Excel);

Б) выбирается начальное значение $\mathbf{x_0}$ из условия (2), т.е. если это условие выполняется и на **[a,b] 2-я** производная сохраняет знак, то $\mathbf{x_0}$ **может быть любым;**

В) по рекурентной формуле (1) вычисляется значение корня;

Г) по соотношению (3) оценивается погрешность: если условие выполняется, то вычисления прекращаются, в противном случае повторяются В), Г).

Т.о., метод Ньютона-Рафсона критичен к выбору $\mathbf{x_0}$, поэтому его комбинируют с др. методами: вначале «грубо» определяют приближенное значение корня методом половинного деления, а затем методом Ньютона-Рафсона уточняют его.