

# Тема 2. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

- 2.1. Понятие механики, модели в механике
- 2.2. Система отсчета, тело отсчета
- 2.3. Кинематика материальной точки
  - 2.3.1. Путь, перемещение
  - 2.3.2. Скорость
  - 2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат
  - 2.3.4. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорение
- 2.4. Кинематика твердого тела
  - 2.4.1. Поступательное движение  
**Поступательное движение твердого тела**
  - 2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

## 2.1. Понятие механики, модели в механике

**Механика** – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

**Механическое движение** – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Механика вообще подразделяется на три части: **статику**, **кинематику** и **динамику**.

**Кинематика** (от греческого слова *κίνημα* – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

**Динамика** (от греческого *δυναμική* – сила) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обуславливают это движение.

**Статика** (от греческого *στατική* – равновесие) изучает условия равновесия тел.

Без знаний механики невозможно представить себе развитие современного машиностроения.

Развитие механики, как науки, начиналось с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый **Архимед** (287 – 312 до н.э.) сформулировал закон рычага и законы равновесия плавающих тел.

Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом **Г. Галилеем** (1564 – 1642) и окончательно сформулированы английским физиком **И. Ньютоном** (1643 – 1727).

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической***, т.к. она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме.

# Галилео Галилей

(Galileo Galilei)

Родился *15 февраля 1564*  
*Пиза (Pisa)*  
*Италия*

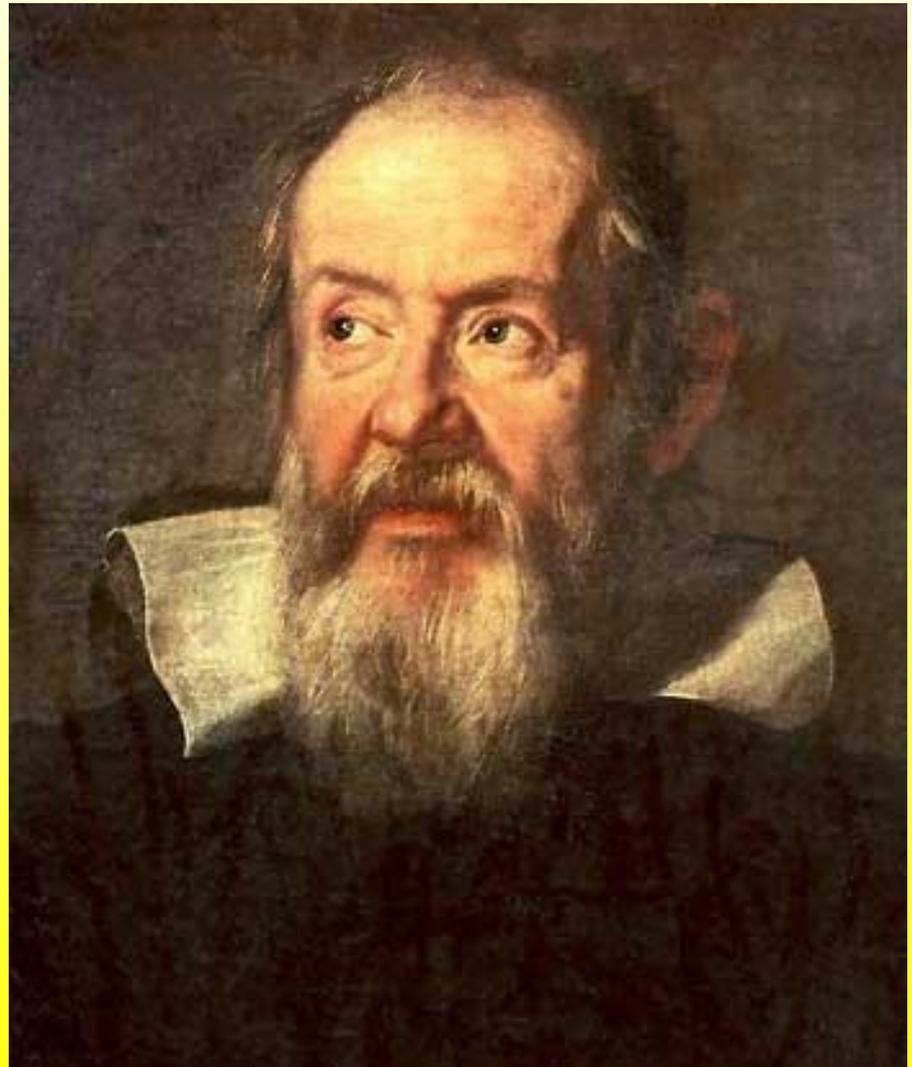
Умер *8 января 1642*  
*Арчетри (Arcetri)*  
*Италия*

**астроном, философ и физик.**

*Важнейшие работы*

**улучшение телескопа;  
астрономические  
наблюдения;**

**первый закон движения**



# Исаак Ньютон

(Isaac Newton)

*4 января 1643*

Родился *Вулсторп (Woolsthorpe)*

*Англия*

*31 марта 1727*

Умер *Лондон (London)*

*Англия*

**физик, математик, астроном,  
алхимик и философ**

***Важнейшие работы***

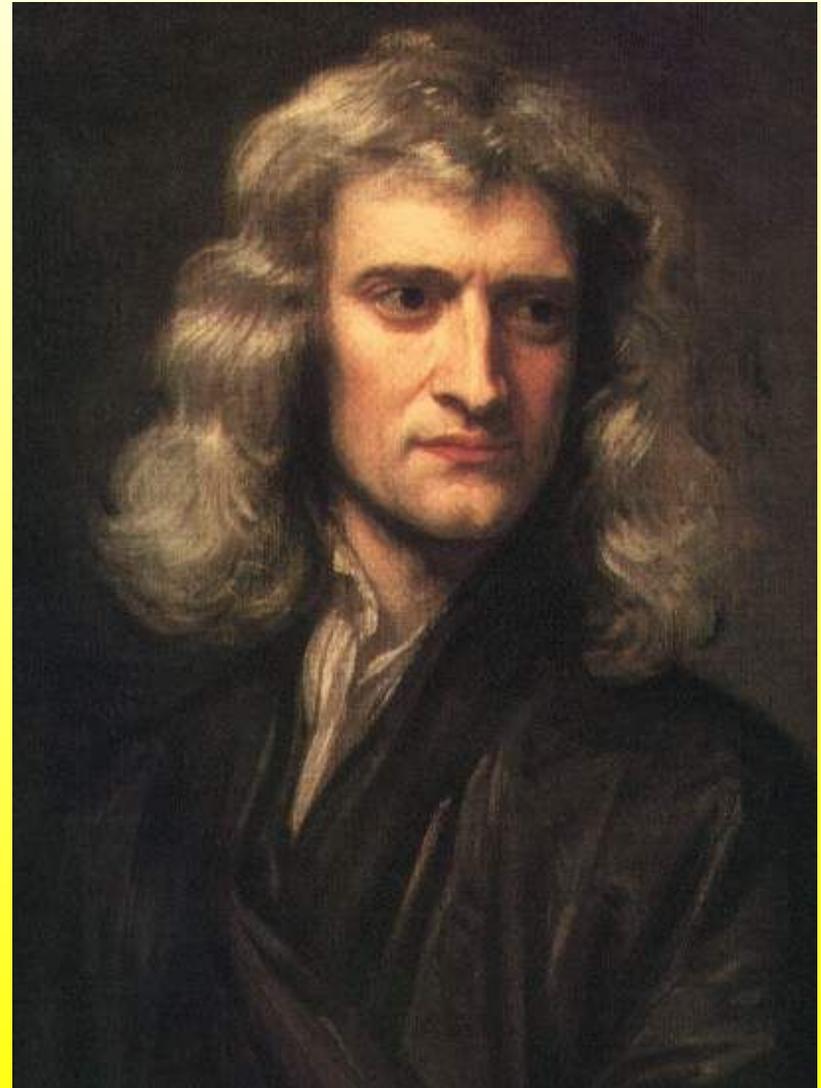
**закон всемирного тяготения**

**дифференциальное и**

**интегральное исчисления**

**изобрел зеркальный телескоп**

**развил корпускулярную теорию света**



# Альберт Эйнштейн

(Albert Einstein)

*14 марта 1879*  
Родился *Ульм (Ulm)*  
*Германия*

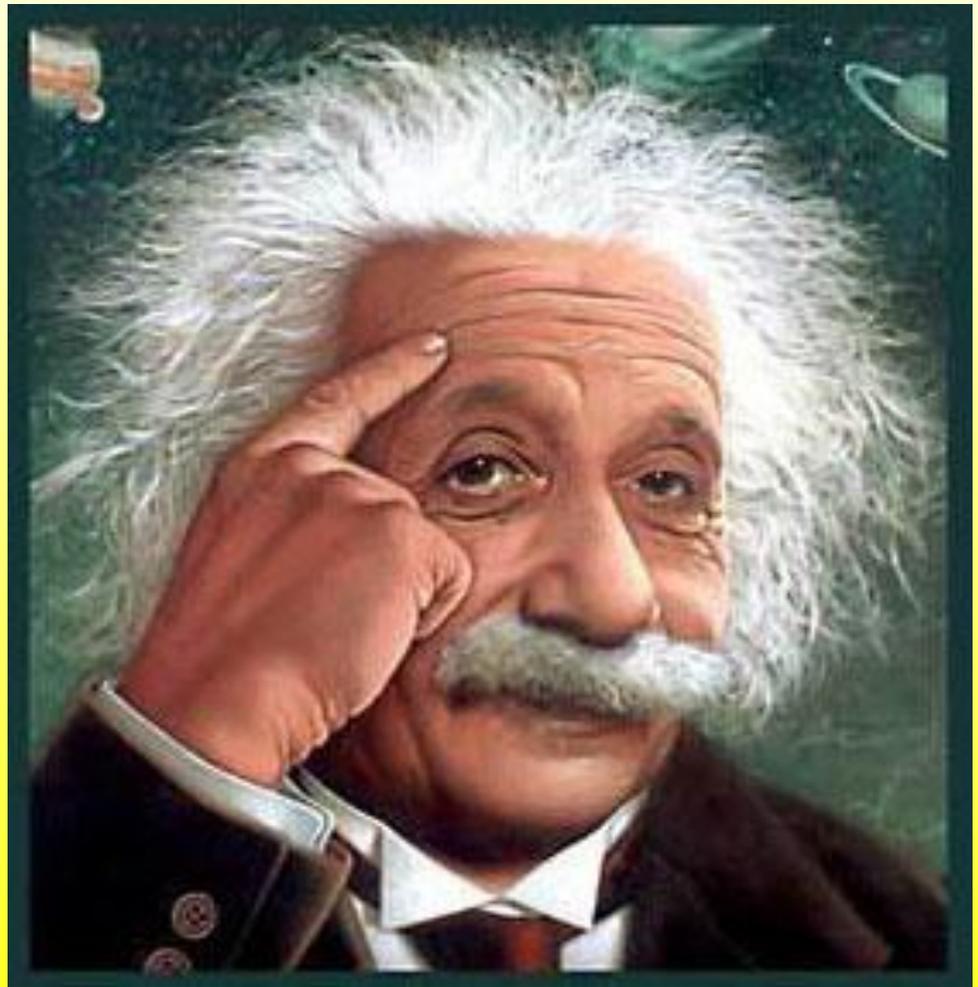
*18 апреля 1955*  
Умер *Принцетон (Princeton )*  
*США (New Jersey)*

**величайший ученый 20 века**

***Важнейшие работы:***

**теория относительности;  
квантовая и статистическая  
механика; космология**

**Нобелевская премия по  
физике 1921**



Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели*. Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела* и *материальной точки*.

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т.е. изменять свои размеры и форму.

*Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют абсолютно твердым телом (хотя абсолютно твердых тел в природе не существует).*

*Тело, размерами которого в условиях данной задачи, можно пренебречь, называется материальной точкой.*

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце – тоже материальная точка в Солнечной системе).

## 2.2. Система отсчета, тело отсчета

Всякое движение относительно, поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют **телом отсчета**.*

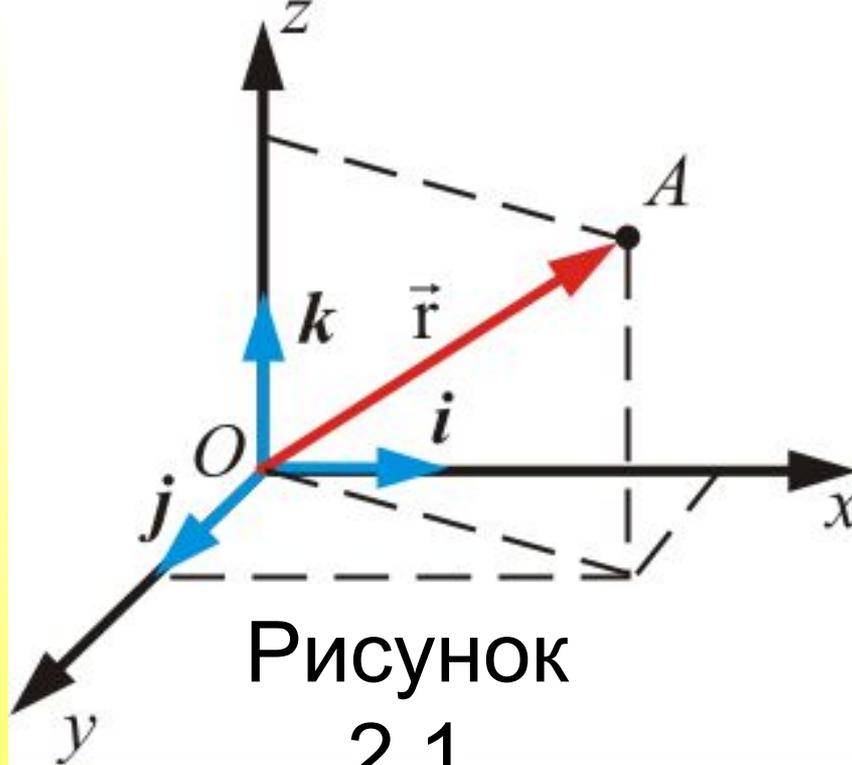
Практически, для описания движения приходится связывать с телом отсчета *систему координат* (декартова, сферическая, и т.д.).

**Система отсчета** – совокупность системы координат и часов, связанных с телом по отношению к которому изучается движение.

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени и наоборот).

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является, **декартова или прямоугольная система координат**, которой мы в основном и будем пользоваться.

В декартовой системе координат, **положение точки  $A$**  в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами  $x, y, z$  или **радиус-вектором  $\vec{r}$**  проведенным из начала координат в данную точку (рисунок 2.1).



При движении материальной точки её координаты с течением времени изменяются.

В общем случае её движение определяется скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2.2.1)$$

# Уравнения движения

Рассмотрим движение материальной точки относительно некоторой СО **К**

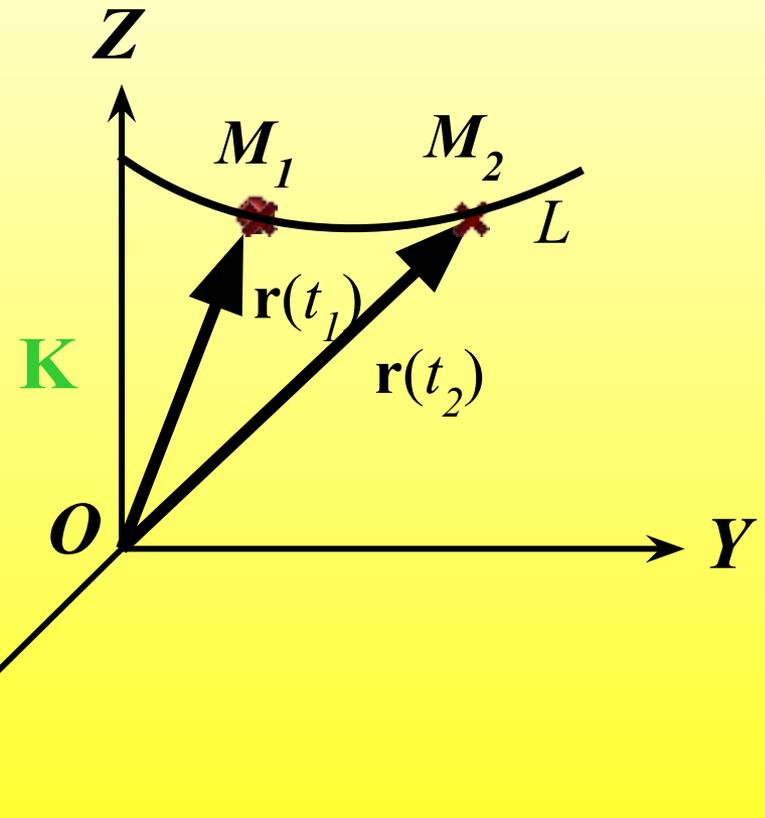
Пусть за некоторый промежуток времени материальная точка переместилась из точки пространства **M<sub>1</sub>** в точку **M<sub>2</sub>**

Соединим начало координат с точками **M<sub>1</sub>** и **M<sub>2</sub>**

- это радиус-векторы **r(t<sub>1</sub>)** и **r(t<sub>2</sub>)**

**Уравнения движения**, описывающие положение материальной точки), можно записать в **векторном виде** или в **координатной форме**

$$\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{r}}(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. \quad X$$



Эти уравнения эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = xi + yj + zk, \quad (2.2.2)$$

где  $x, y, z$  – проекции радиус-вектора  $\vec{r}$  на оси координат, а  $i, j, k$  – **единичные векторы (орты)**, направленные по соответствующим осям.

Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки.**

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **числом степеней свободы**.

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Если она движется на плоскости – две степени свободы. Если вдоль линии – одна степень свободы.

## 2.3. Кинематика материальной точки

### 2.3.1. Путь, перемещение

Положение точки  $A$  в пространстве можно задать с помощью радиус-вектора  $\vec{r}_1$  проведенного из точки отсчета  $O$  или начала координат

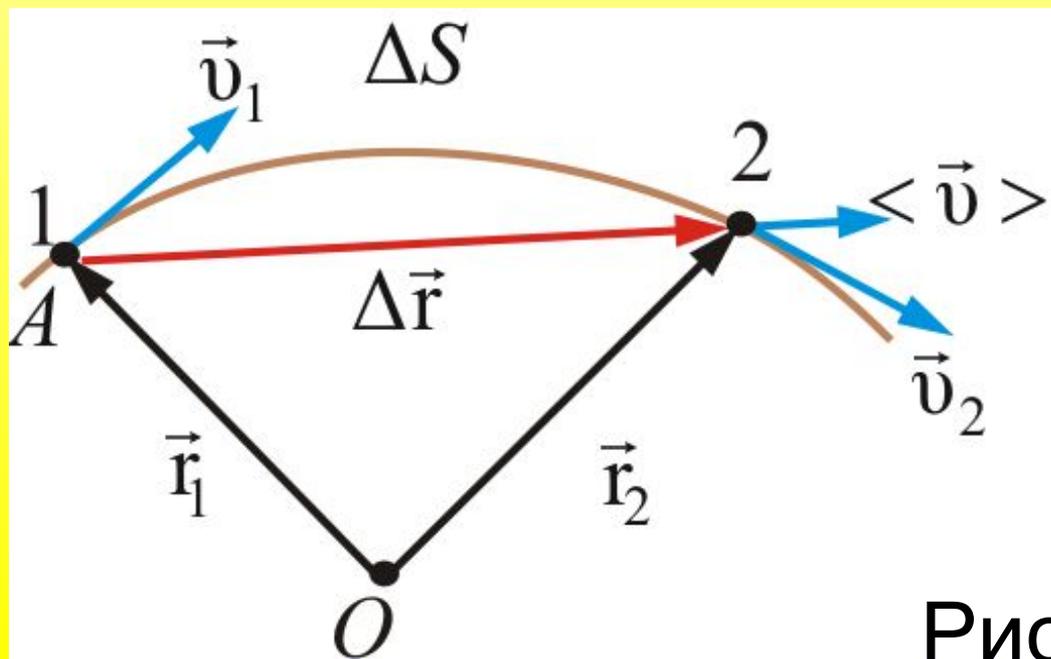
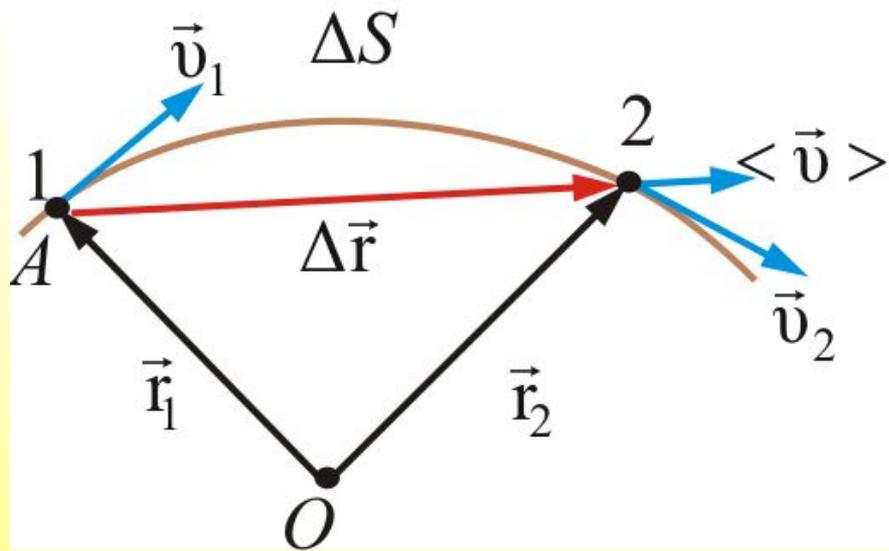


Рисунок 2.4



При движении точки  $A$  из точки 1 в точку 2 её радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т.е.  $\vec{r}$  зависит от времени  $t$ .

Геометрическое место точек концов  $\vec{r}$  называется **траекторией точки**.

Длина траектории есть путь  $\Delta S$ . Если точка движется по прямой, то приращение радиуса равно пути  $\Delta S$ .

Пусть за время  $\Delta t$  точка  $A$  переместилась из точки 1 в точку 2.

**Вектор перемещения**  $\Delta \vec{r}$  **есть**  
**приращение**  $\vec{r}_1$  **за время**  $\Delta t$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}; \quad (2.3.1)$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}; \quad (2.3.2)$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.3.3)$$

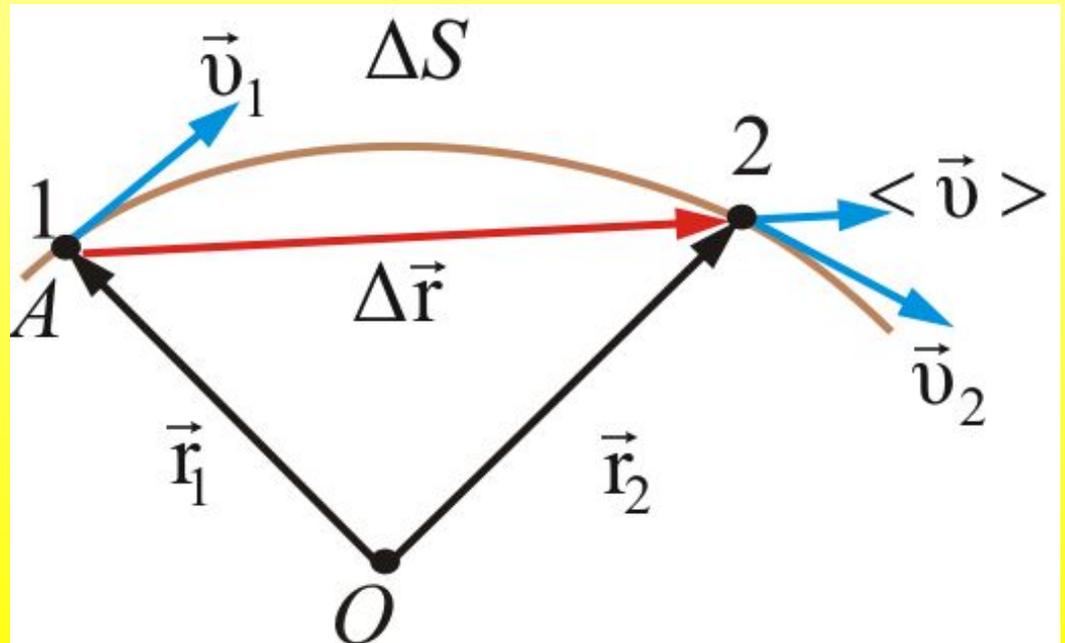
## 2.3.2. Скорость

### Средний вектор скорости

определяется как отношение вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  ко времени  $\Delta t$ , за которое это перемещение произошло

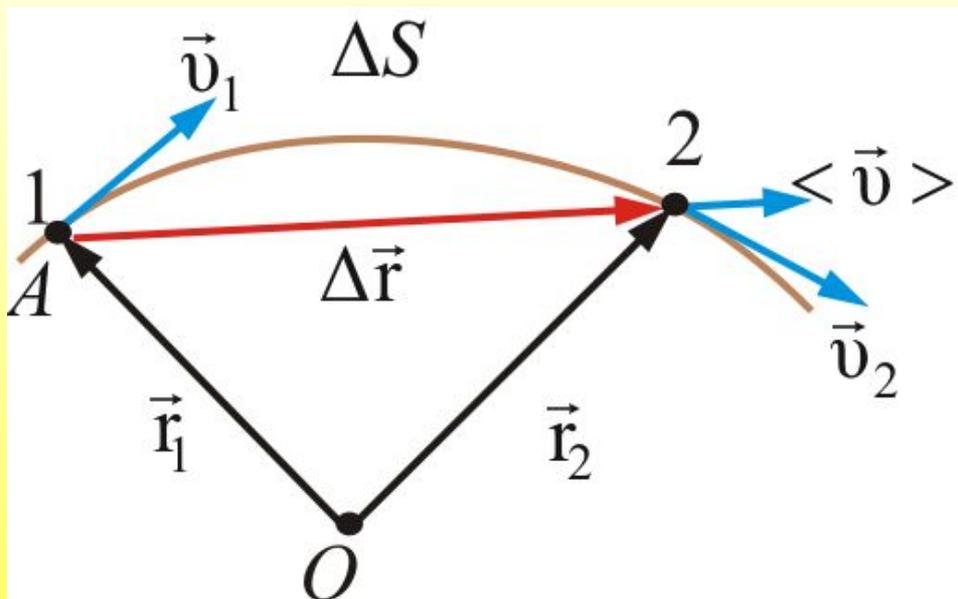
$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{v} \rangle$$

Вектор  $\Delta \vec{r}$  совпадает с направлением вектора  $\langle \vec{v} \rangle$



## **Мгновенная скорость** в точке 1:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



**Мгновенная скорость**  $\vec{v}$ -вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от  $\vec{r}$  по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки A.

**Модуль вектора скорости**  $v \equiv |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ .

При  $\Delta t \rightarrow 0$  т.е. на бесконечно малом участке траектории  $\Delta S = \Delta r$  (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – **путь**:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \quad \text{или} \quad v = \frac{dS}{dt}.$$

Так вычислять скорость проще, т.к.  $S$  – скаляр

# Обратное действие – интегрирование

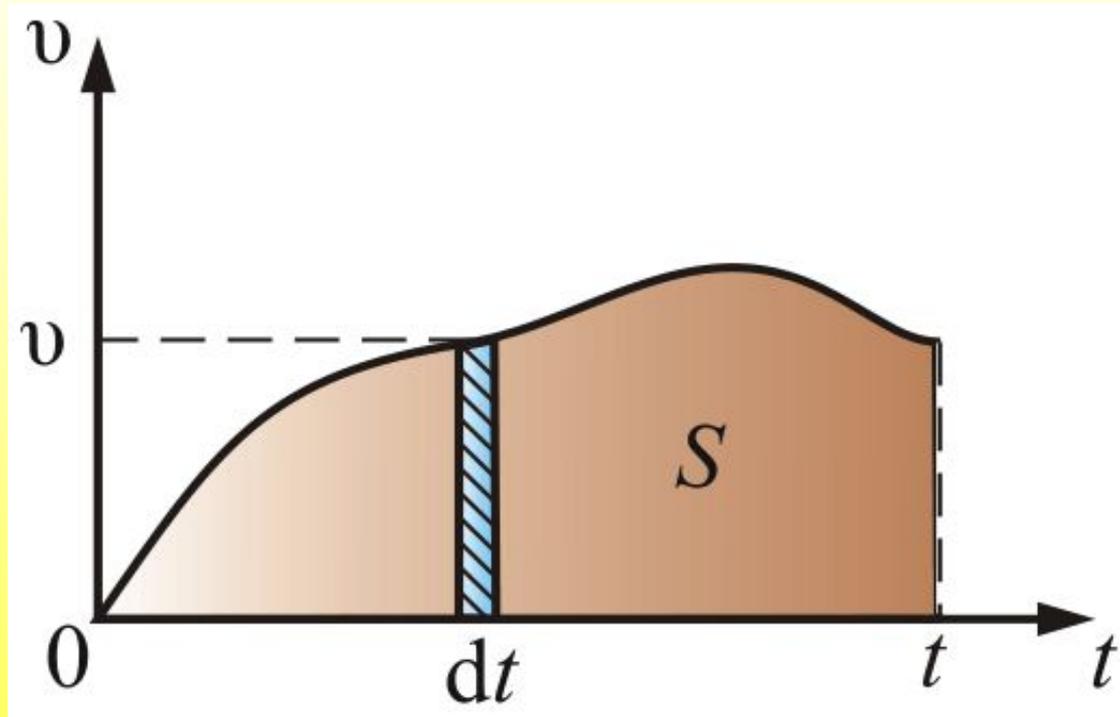
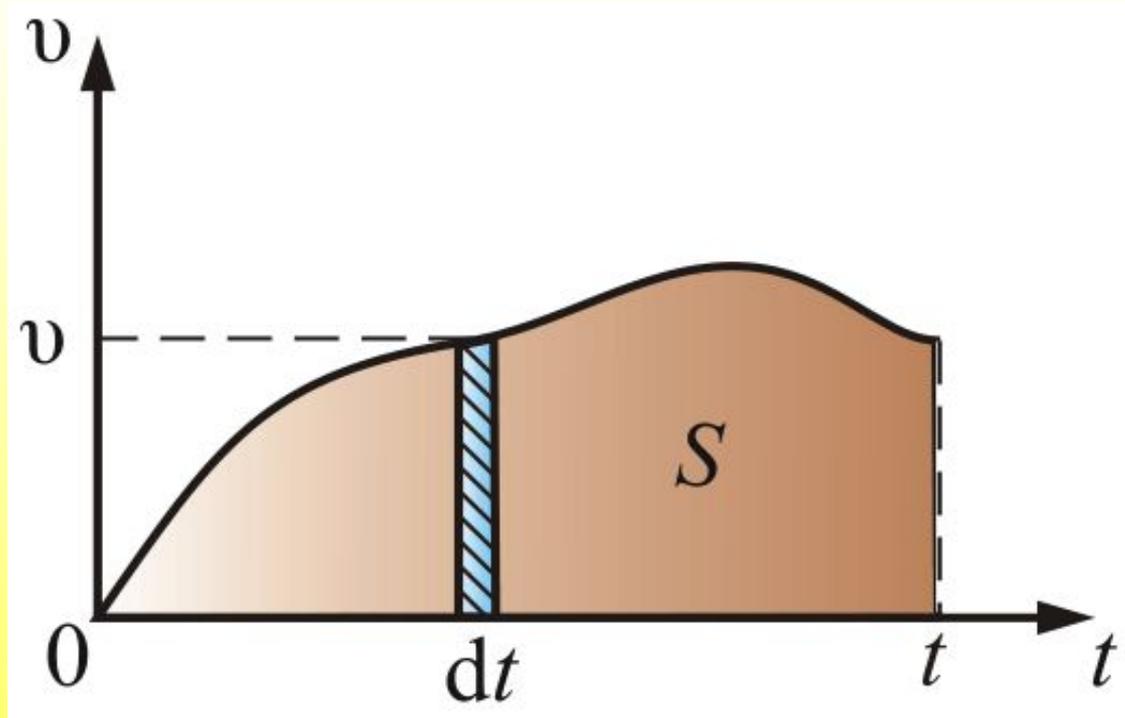


Рисунок 2.5

$dS = v dt$  – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь  $S$  за время  $t$ , надо сложить площади всех прямоугольников.



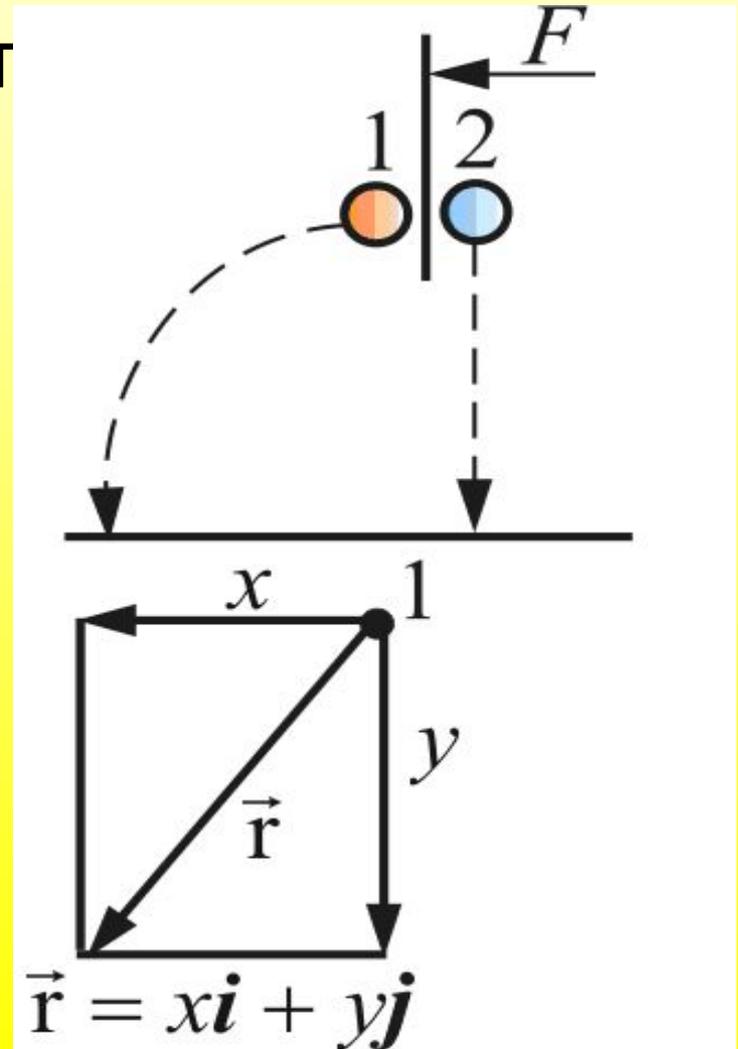
$$S = \int_0^t v dt. \quad (2.3.5)$$

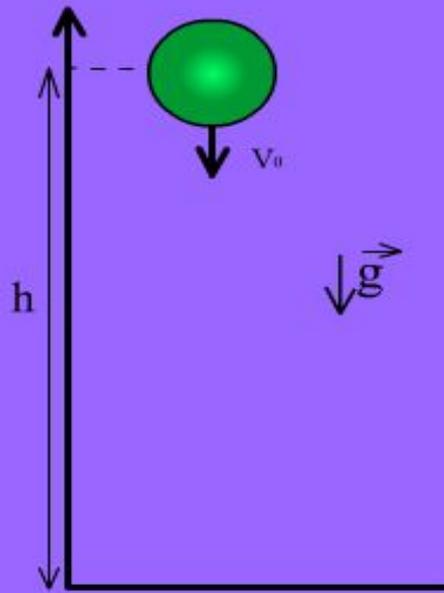
Геометрический смысл этого интеграла в том, что **площадь под кривой  $v(t)$  есть путь тела за время  $t$ .**

# Принцип независимости движения. (Принцип суперпозиции)

Рассмотрим простой опыт

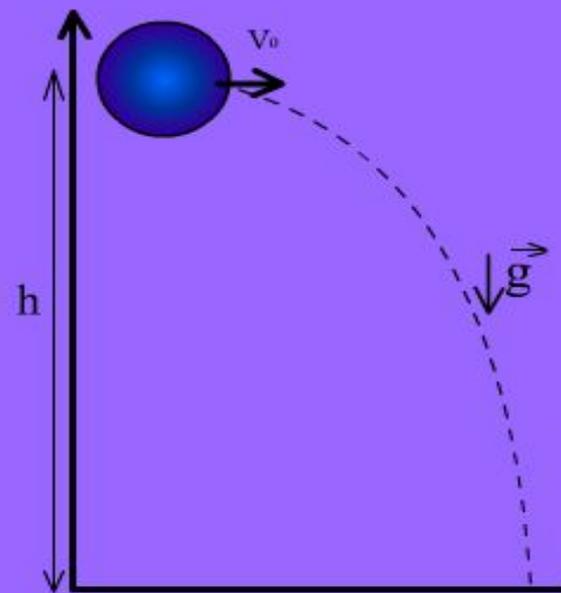
Этот опыт доказывает  
**принцип  
независимости  
движения  
(действия сил).**





$$y = h_{0y} + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$$

$$h_{0y} = 0; v_{0y} = 0; g_y = g; y = h$$



$$y = h_{0y} + v_0 t \sin \alpha + \frac{g_y t^2}{2}$$

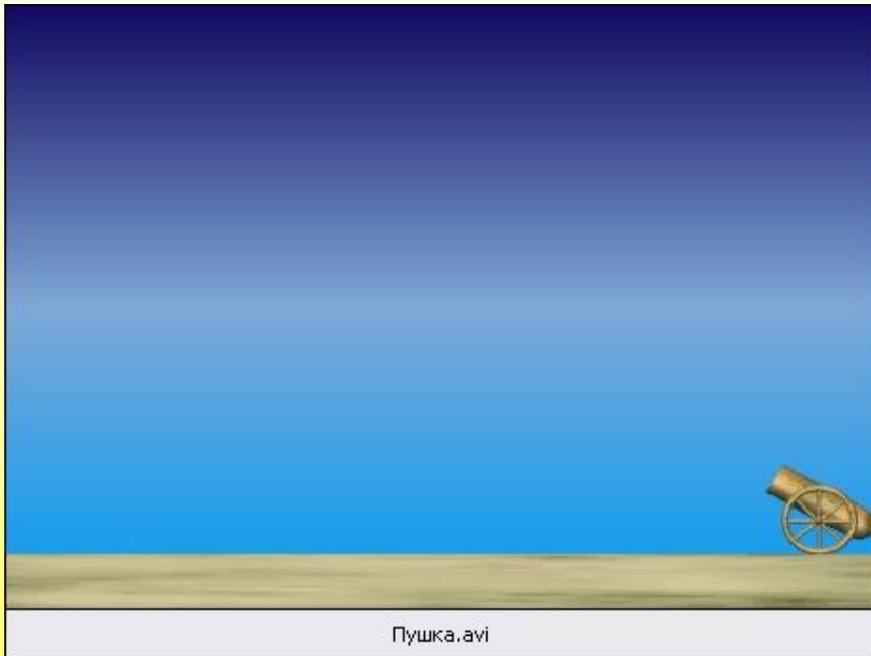
$$h_{0y} = 0; y = h; g_y = g; \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$$

**Назад**

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

**время падения в обоих случаях зависит лишь от высоты**

# Движение тел в поле тяжести Земли



Если пушка расположена в точке с координатами  $(0, 0, 0)$ , то снаряд будет двигаться по траектории, которая описывается следующими уравнениями:

$$X = (v \cos \phi) t$$

$$Y = (v \sin \phi) t - gt^2/2,$$

где  $v$  - скорость снаряда вдоль ствола пушки,  $\phi$  - угол между стволом пушки и горизонтом (ось  $X$ ),  $t$  - время,

$g$  - ускорение свободного падения в поле тяжести Земли.

Подставляя  $t$  из первого уравнения во второе, находим уравнение траектории движения снаряда:

$$Y = X \operatorname{tg} \phi - (g/2v^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) X^2$$

Из этого уравнения находим максимальную дальность стрельбы  $X_{\max}$  (при этом  $Y=0$ ) и максимальную высоту полёта  $Y_{\max}$  (первая производная  $Y$  по координате  $X$  равна нулю):

$$X_{\max} = v^2 \sin(2\phi)/g$$

$$Y_{\max} = v^2 \sin^2 \phi / 2g$$

Из первого уравнения видно, что максимальная дальность полёта снаряда достигается при стрельбе под углом  $\phi$ , равном  $45^\circ$ .

30°



45°

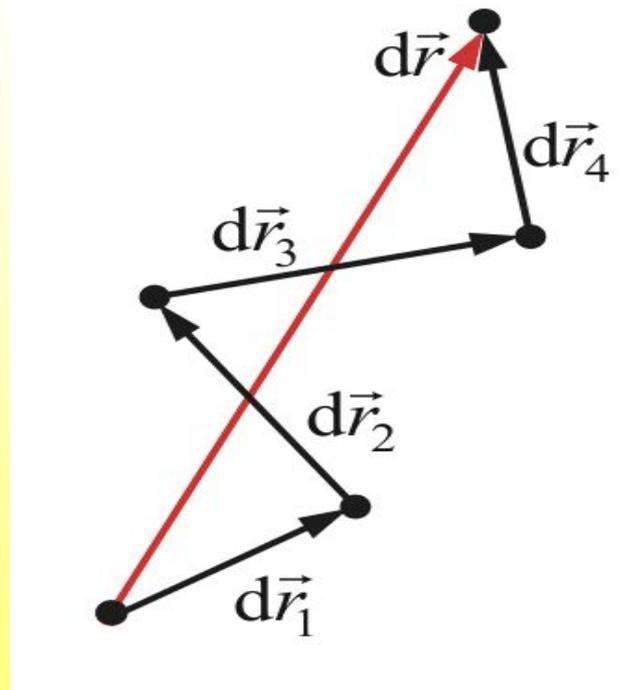


60°





# Принцип независимости движения (действия сил)



Если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее результирующее перемещение  $d\vec{r}$  равно векторной сумме перемещений, обусловленных каждым из этих движений в отдельности:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^n d\vec{r}_i,$$

Так как

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Тогда

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_i + \vec{v}_n$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i.$$

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

В дальнейшем мы подробнее рассмотрим принцип независимости действия сил.

В физике существует **общий принцип**, который называется **принцип суперпозиций (принцип наложения)** – допущение, согласно которому **результатирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.**

Принцип суперпозиции играет большую роль во многих разделах физики и техники.

## 2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета.

Положение точки  $A$  (рисунок 2.8) задается радиус-вектором  $\vec{r}$ . Спроецируем вектор  $\vec{r}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

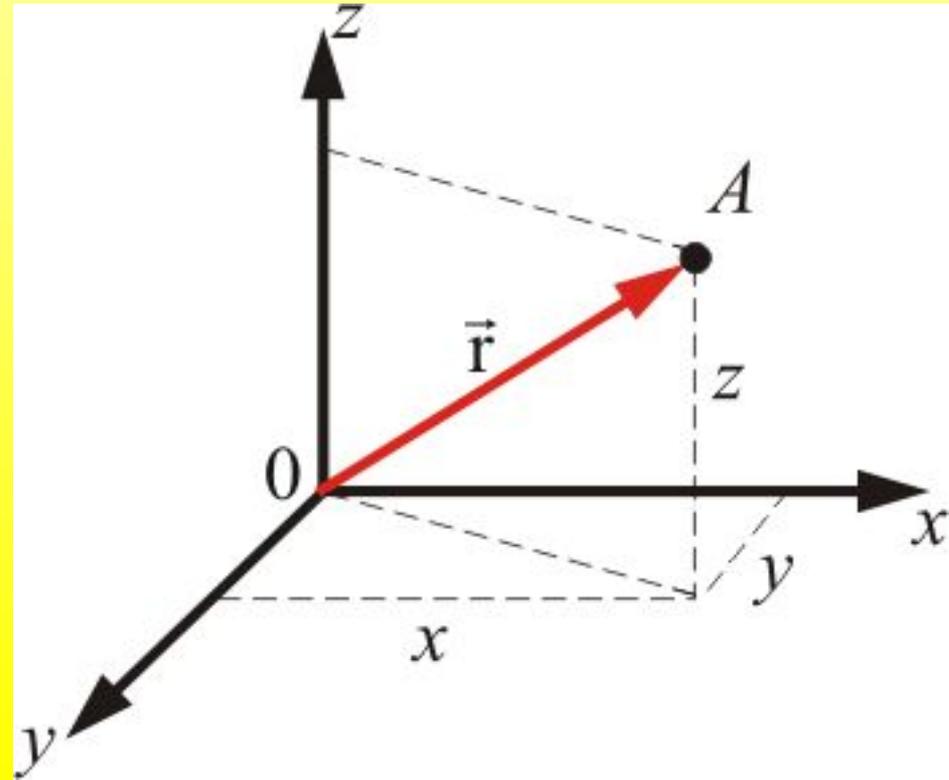


Рисунок 2.8

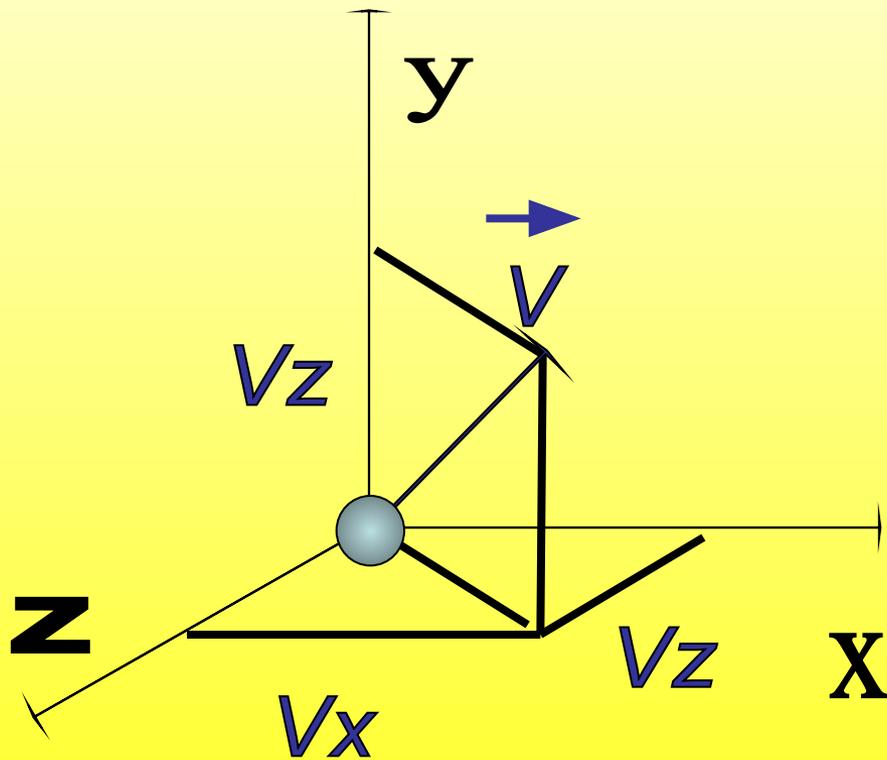
Понятно, что  $x$ ,  $y$ ,  $z$  зависят от времени  $t$ , т.е.  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки) можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекция вектора скорости  $\vec{v}$  на ось  $x$

равна: 
$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Здесь  $dx$  – проекция вектора перемещения  $d\vec{r}$  на ось  $x$ .

Аналогично: 
$$v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$



Так как  $\vec{v}$  вектор, то

$$\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}, \quad (2.3.6)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  единичные векторы – орты.

Модуль вектора скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

## 2.3.4. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуются ускорением:*

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \quad (2.3.7)$$

***Ускорение величина векторная.***

При криволинейном движении  $\vec{v}$  изменяется и по времени и по направлению. В какую сторону? С какой скоростью? Из выражения (2.3.7) на эти вопросы не ответишь.

Введем *единичный вектор*  $\vec{\tau}$  (рисунок 2.9), связанный с точкой 1 и направленный по касательной к траектории движения точки 1 (векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{\tau}$  в точке 1 совпадают). Тогда можно записать:

$$\vec{v} = v\vec{\tau},$$

Где  $v = |\vec{v}|$  – модуль вектора скорости.

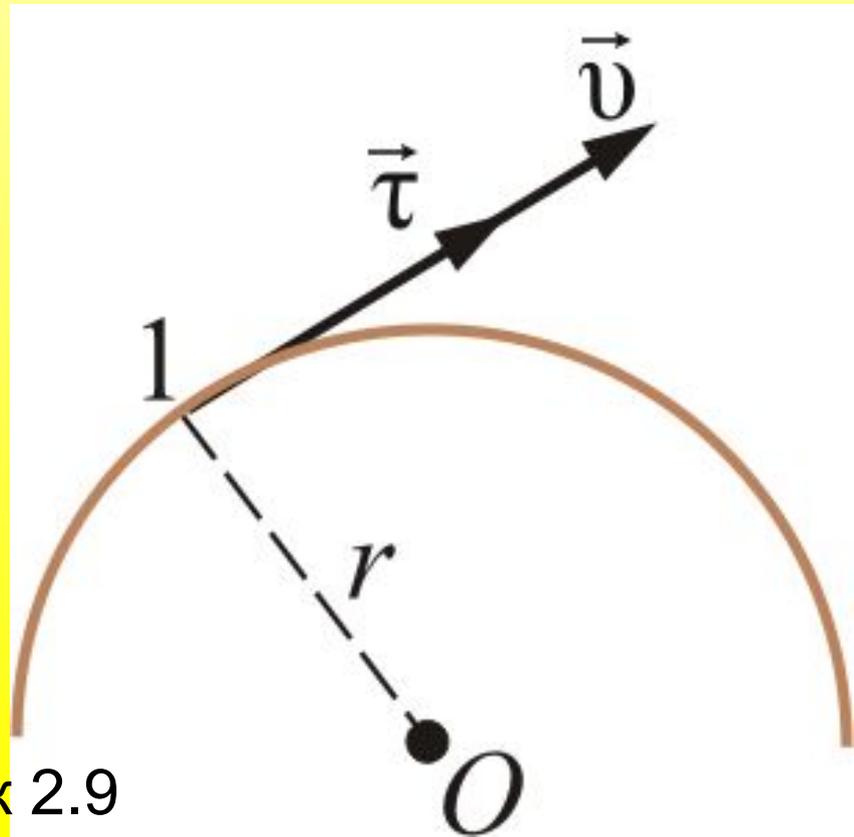


Рисунок 2.9

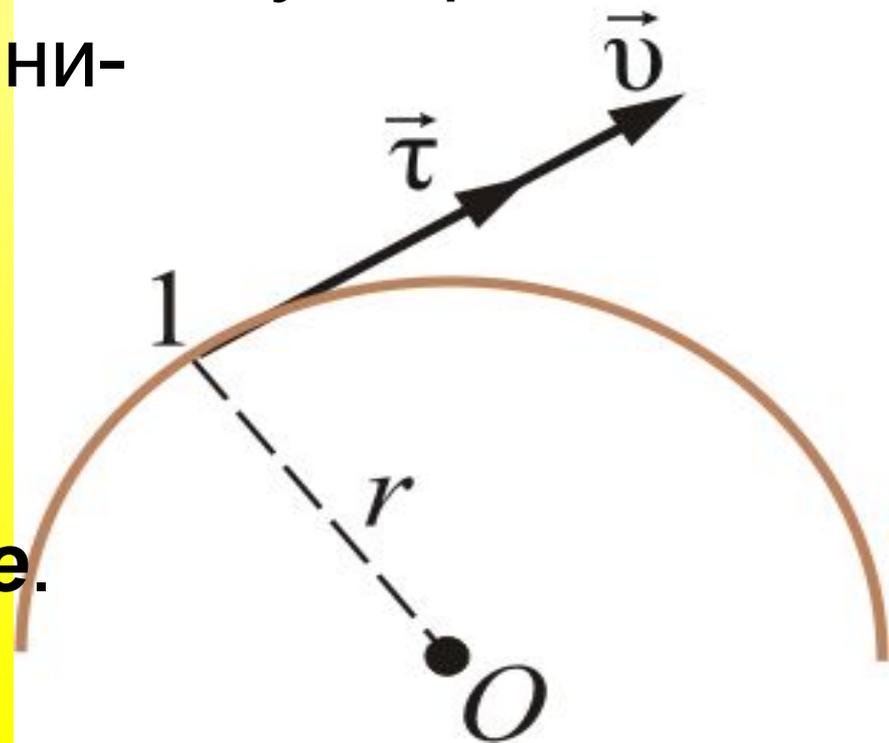
Найдем общее ускорение:

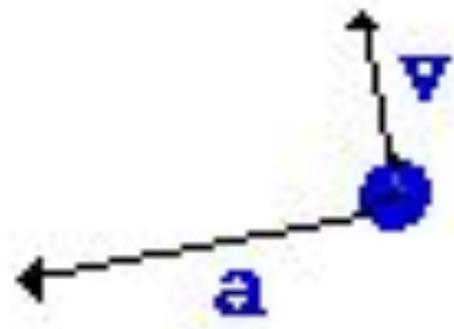
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_{\tau} \vec{\tau} + a_n \vec{n}. \quad (2.3.8)$$

Получили два слагаемых ускорения:

$a_{\tau}$  – **тангенциальное** ускорение, совпадающее с направлением  $\vec{v}$  в данной точке.

$a_n$  – **нормальное** ускорение или **центростремительное**.

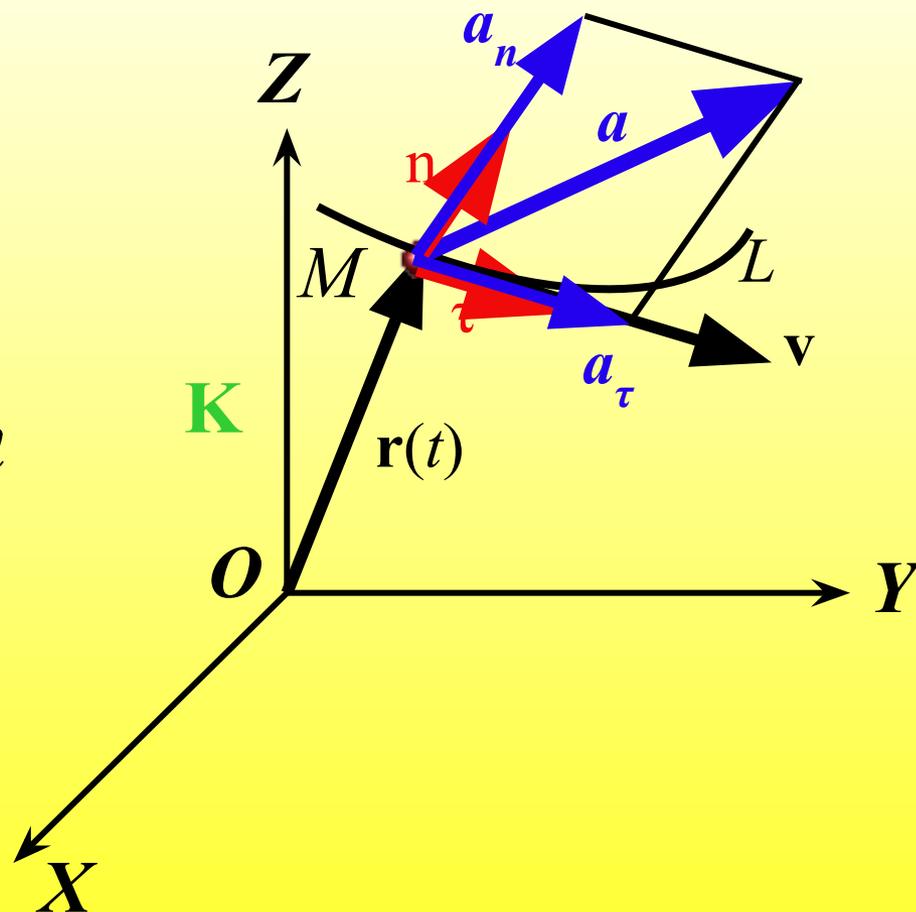




При произвольном движении

точки имеем:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad \text{или по модулю}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$\vec{a}_\tau$  показывает изменение вектора скорости по величине:

- если  $\frac{dv}{dt} > 0$  то  $\vec{a}_\tau$  направлено в ту же сторону, что и вектор  $\vec{v}$  т.е. **ускоренное движение**;

- если  $\frac{dv}{dt} < 0$  то  $\vec{a}_\tau$  направлено в противоположную сторону  $\vec{v}$  т.е. **замедленное движение**;

- при  $\frac{dv}{dt} = 0$  то  $\vec{a}_\tau = 0$ ,  $\vec{v} = \text{const}$  – движение с

**постоянной по модулю скоростью.**

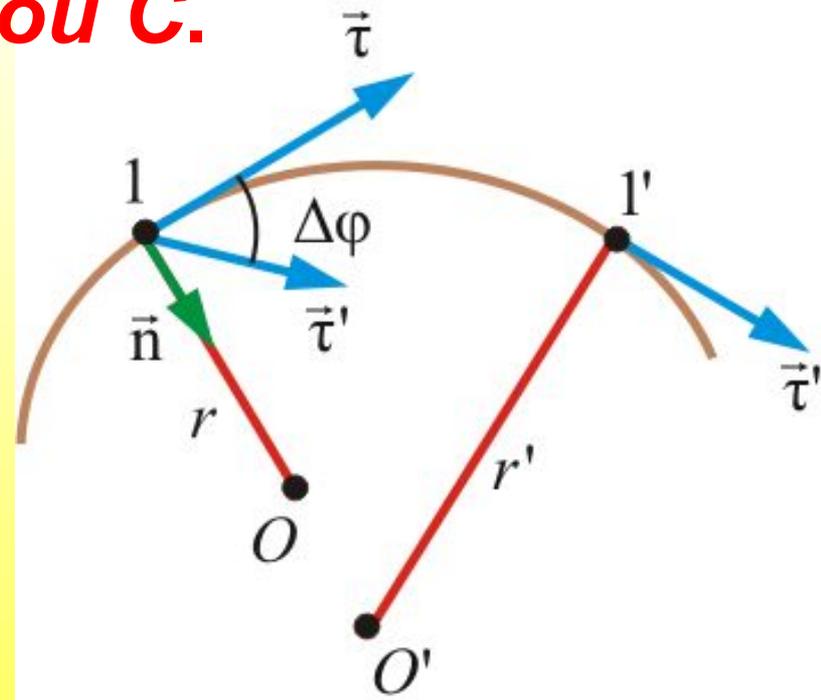
Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (2.3.8), т.е. *нормальное ускорение*:

$$a_n = v \frac{d\tau}{dt}.$$

Быстрота изменения направления касательной ( $d\tau/dt$ ) к траектории определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий.

Степень искривленности плоской кривой характеризуется **кривизной  $C$** .

**Радиус кривизны  $r$**   
– радиус такой окружности, которая сливается с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке  $dS$ .

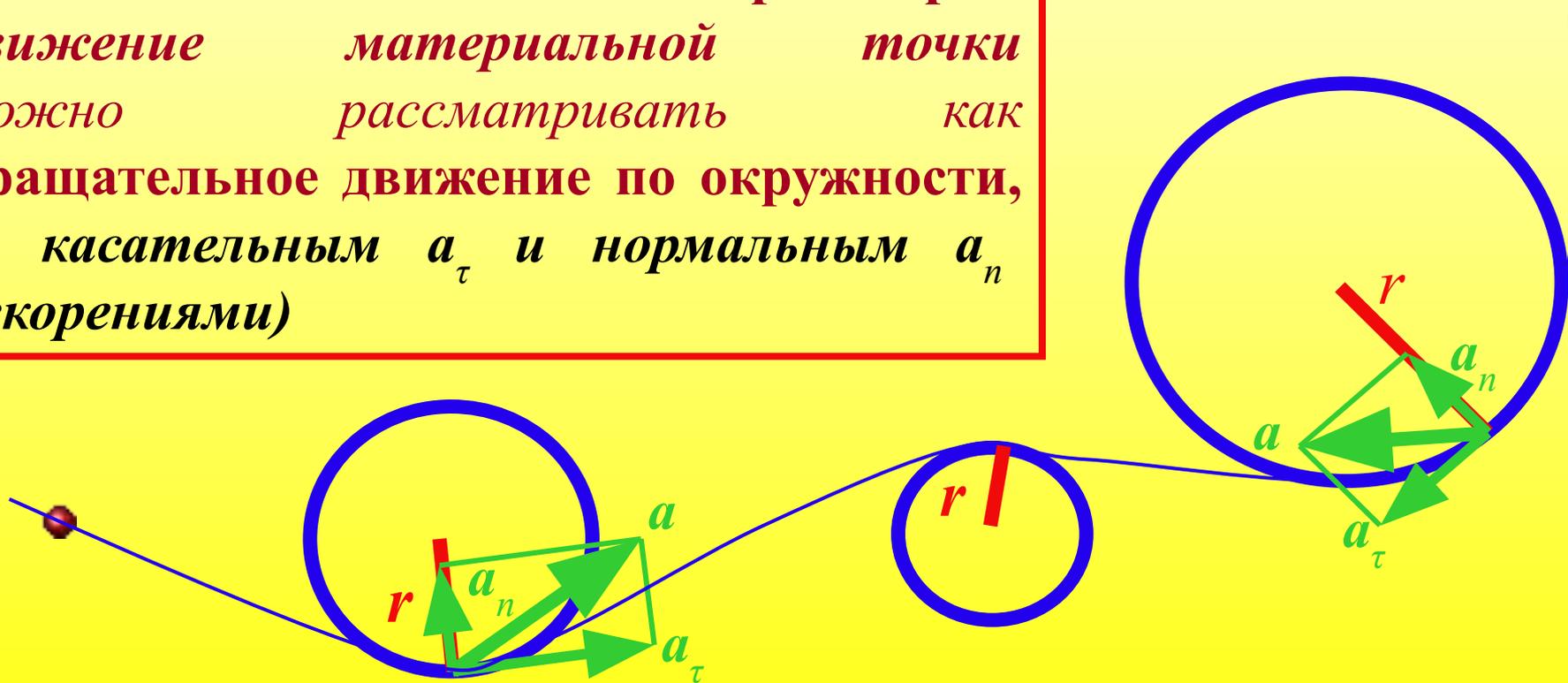


$$r = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}.$$

# Ускорение при произвольном движении

При произвольном движении материальной точки величина  $r$  будет равна радиусу некоторой моментальной (т.е. соответствующей данному моменту времени) окружности

В любой точке траектории движение материальной точки можно рассматривать как вращательное движение по окружности, (с касательным  $a_\tau$  и нормальным  $a_n$  ускорениями)



Саму величину  $r$  называют радиусом кривизны траектории в данной точке

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

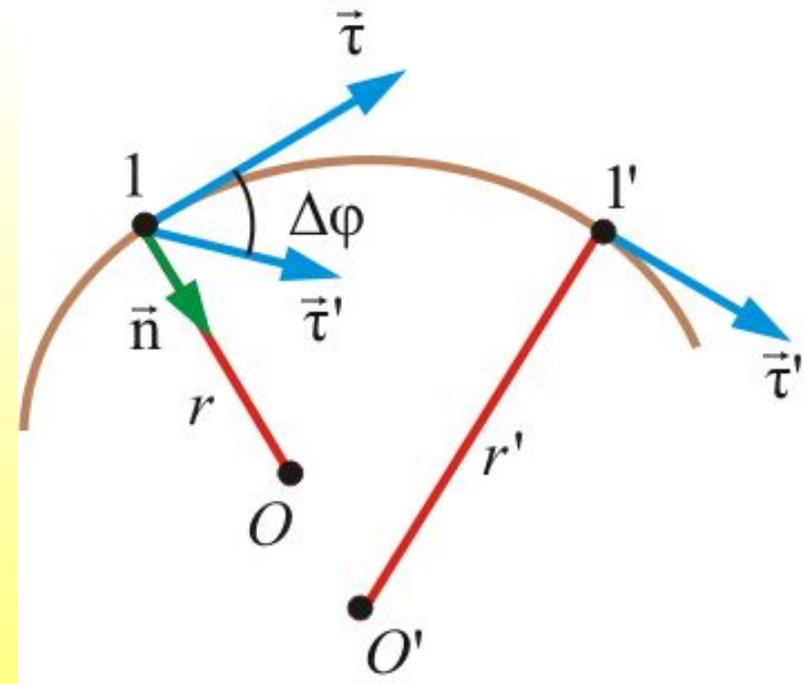


Рисунок 2.10

Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на **единичный вектор  $\vec{n}$** , показывающий направление изменения угла.

$\vec{n}$  – единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной ( $\vec{\tau}$ ) в данной точке, т. е. по радиусу кривизны к центру кривизны.

$$d\varphi = \frac{dS}{r} \quad dS = v dt$$

$$d\varphi = \frac{v dt}{r} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{r} \vec{n}$$

$$v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

отсюда

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{n},$$

– **нормальное ускорение**  
или **центростремительное**  
т.к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно  $\vec{\tau}$

**Нормальное ускорение показывает быстроту изменения направления вектора скорости**

*Модуль нормального ускорения:*

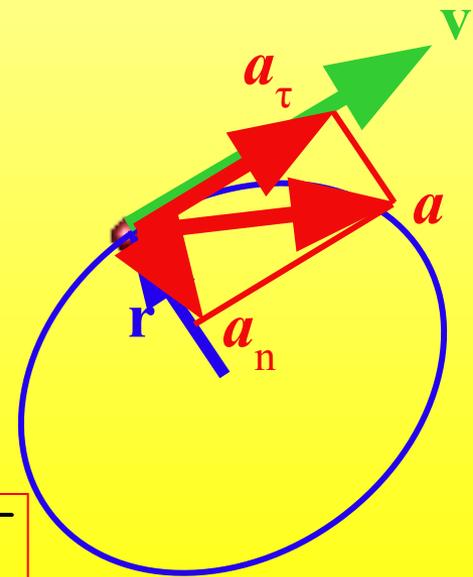
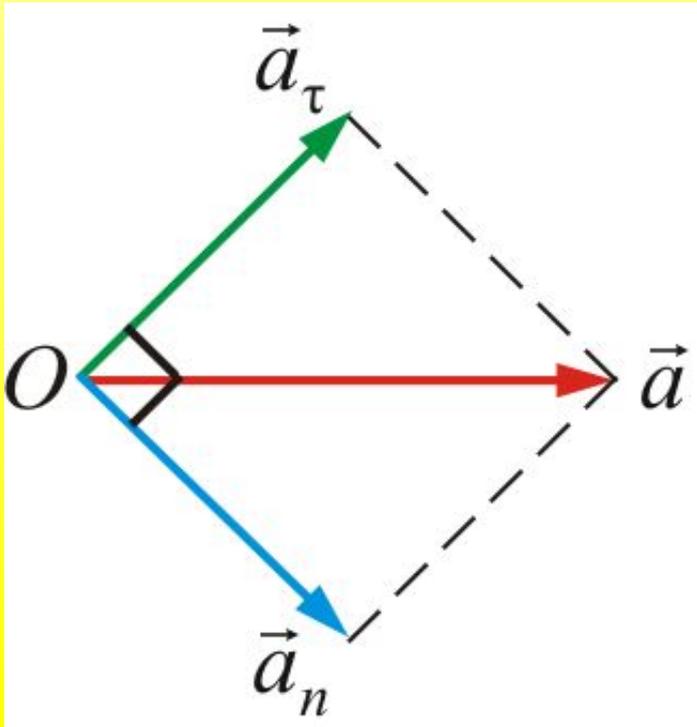
$$\left| \vec{a}_n \right| = a_n = \frac{v^2}{r}.$$

*Центростремительным* называют ускорение – когда движение происходит по окружности.

А когда движение происходит по произвольной кривой – говорят, *нормальное ускорение*, перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Возвращаясь к выражению (2.3.8), можно записать что, **суммарный вектор ускорения** при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{r} \vec{n}.$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Как видно из этого рисунка, **модуль общего ускорения равен:**

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

$a_{\tau} = 0$ ;  $a_n = 0$  – равномерное прямолинейное движение;

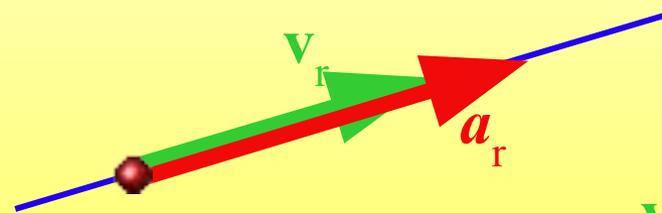
$a_{\tau} = \text{const}$ ;  $a_n = 0$  – равноускоренное прямолинейное движение;

$a_{\tau} = 0$ ;  $a_n = \text{const}$  – равномерное движение по окружности.

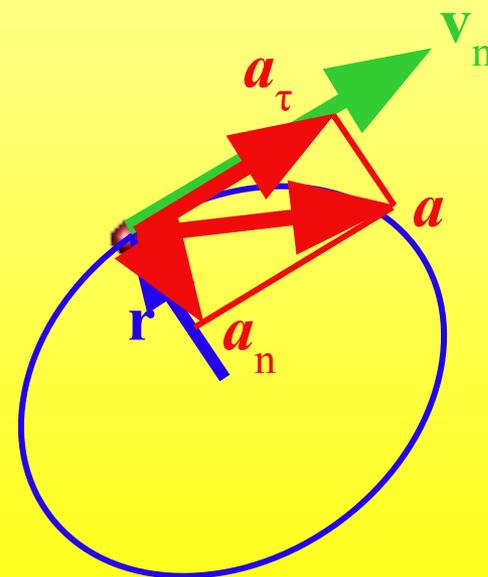
# Типы ускорений

*Чтобы более наглядно представить свойства введенных составляющих полного ускорения, рассмотрим примеры движений частицы, при которых эти составляющие возникают*

*Частица движется прямолинейно*



*Частица движется по дуге окружности*



*Вспомним несколько полезных формул:*

При равномерном движении  $S = \int_0^t v dt = vt$

При движении с постоянным ускорением

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

$$v = v_0 \pm at$$

# Обратная задача кинематики

заключается в том, что по известному значению ускорения  $a(t)$  найти скорость точки и восстановить траекторию движения  $r(t)$ .

По определению 
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt},$$

отсюда

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

или, так как  $v(t) = \frac{dr}{dt},$

Следовательно

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

## 2.4. Кинематика твердого тела

Различают **пять видов движения** твердого тела:

- поступательное;
- вращательное вокруг неподвижной оси;
- плоское;
- вокруг неподвижной точки;
- свободное.

**Поступательное** движение **и**

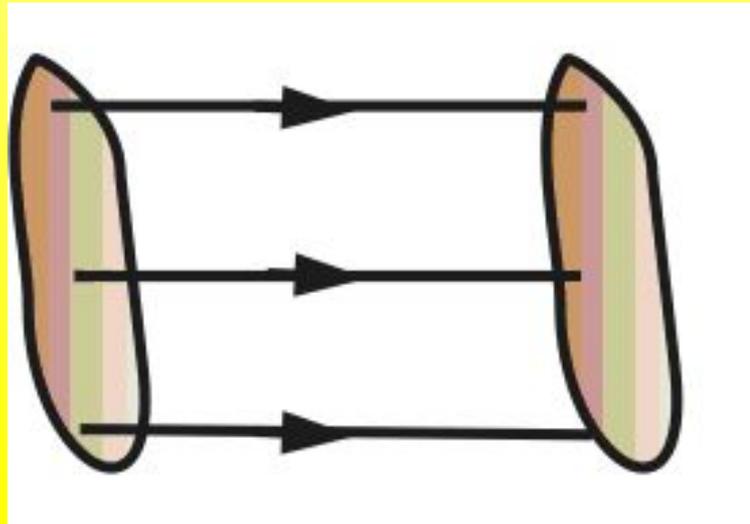
**вращательное** движение **вокруг оси** –

**основные виды движения твердого тела.**

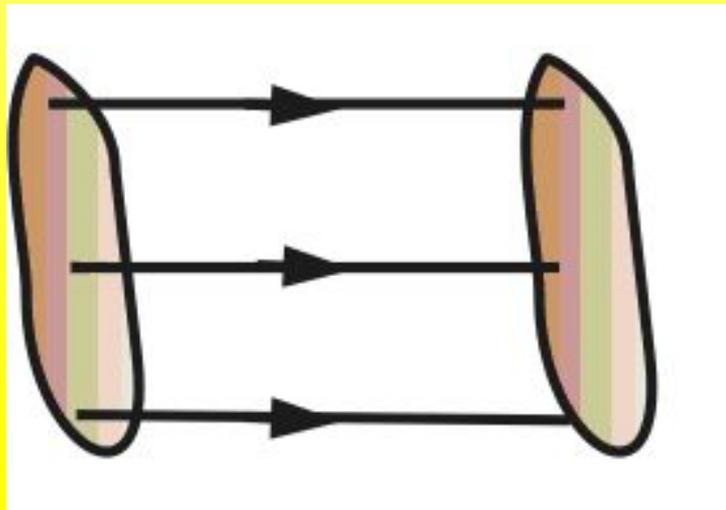
Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному из этих основных видов или к их совокупности.

## 2.4.1. Поступательное движение твёрдого тела

**Поступательное движение** – это такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению и при этом, все точки твёрдого тела совершают **равные перемещения**.



Скорости и ускорения *всех точек* твердого тела в данный момент времени  $t$  одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки, т.е. к задаче кинематики материальной точки, подробно рассмотренной в п. 2.3.



При **вращательном движении** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой  $OO'$ , называемой **осью вращения** (рисунок 2.3).

Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

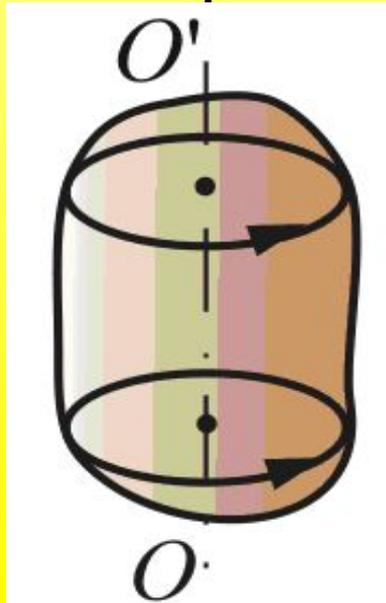


Рисунок 2.3

## 2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки  $O$  и  $O'$  остаются неподвижными, называется **вращательным движением вокруг неподвижной оси**, а неподвижную прямую  $OO'$  называют **осью вращения**.

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $OO'$

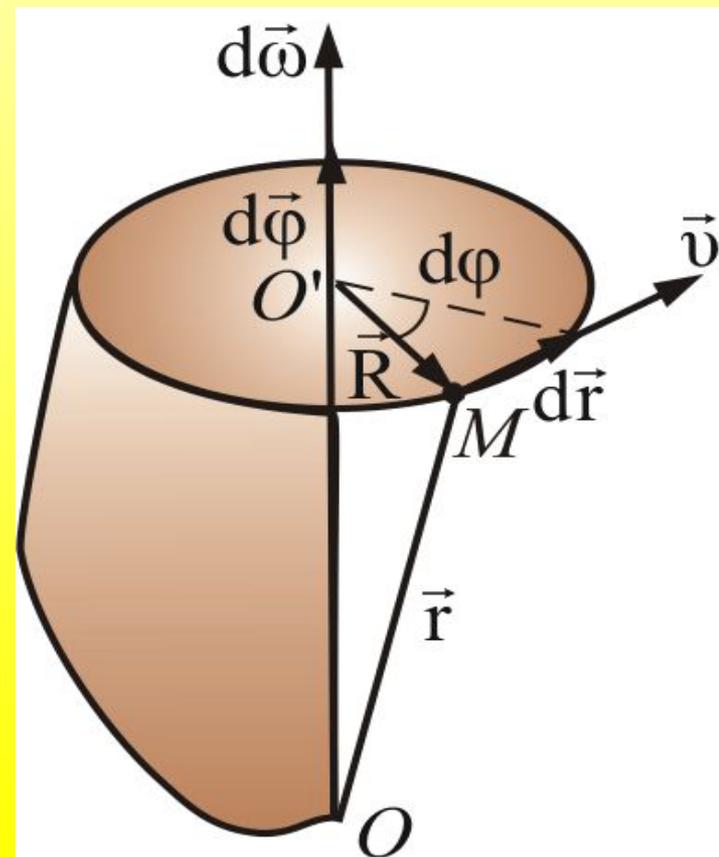


Рисунок 2.12

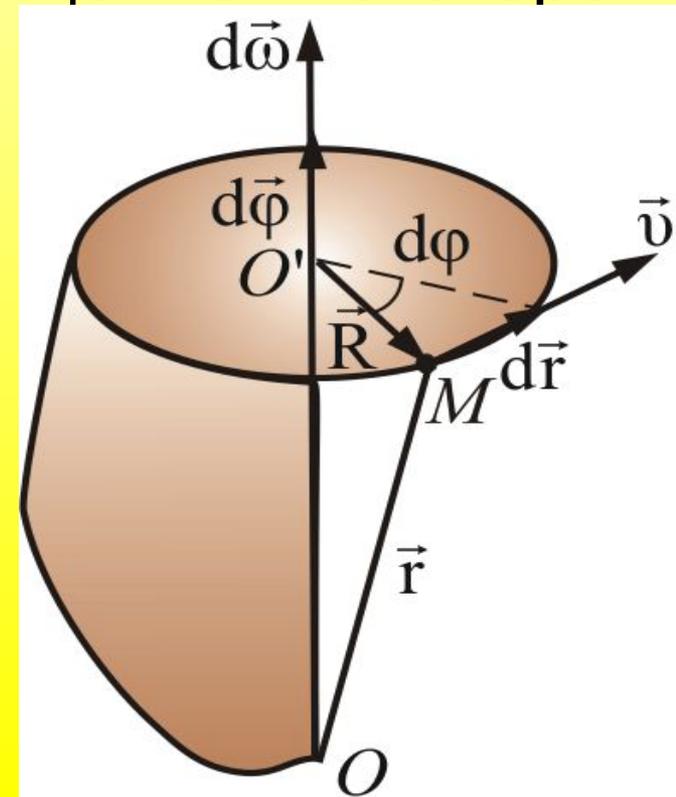
Проследим за некоторой точкой  $M$  этого твердого тела. За время  $dt$  точка  $M$  совершает элементарное перемещение

При том же самом угле поворота  $d\varphi$  другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояния, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой

точки твердого тела, ни первая производная  $\frac{dr}{dt}$

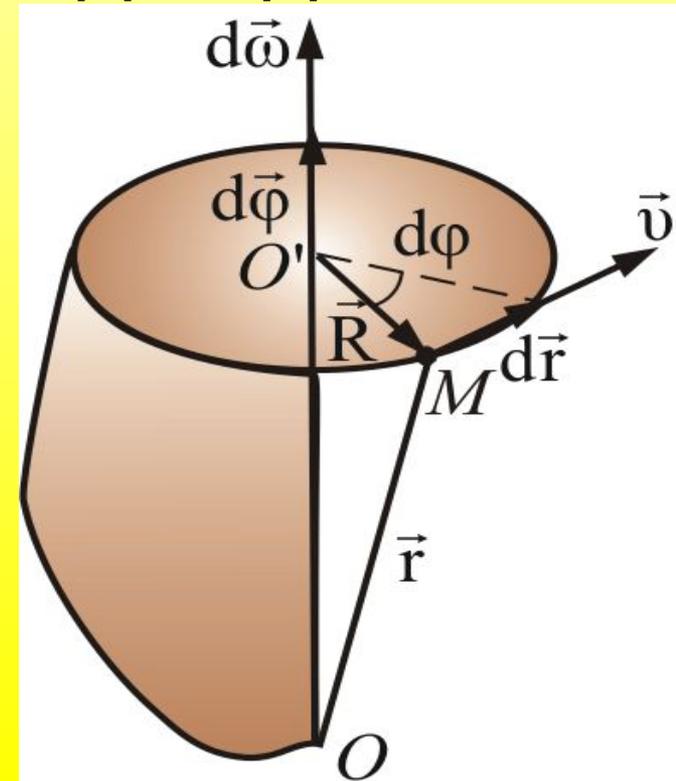
ни вторая производная  $\frac{d^2 r}{dt^2}$

не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.



Угол поворота  $d\varphi$  характеризует перемещение всего тела за время  $dt$  (**угловой путь**)

Удобно ввести  $d\vec{\varphi}$  – **вектор** элементарного поворота тела, численно равный  $d\varphi$  и направленный вдоль оси вращения  $OO'$  так, чтобы глядя вдоль вектора  $d\vec{\varphi}$  мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора  $d\vec{\varphi}$  и направление вращения связаны **правилом буравчика**).



Элементарные повороты удовлетворяют  
обычному правилу сложения векторов:

$$d\overset{\vee}{\varphi} = d\overset{\vee}{\varphi}_1 + d\overset{\vee}{\varphi}_2.$$

**Угловой скоростью**  $\overset{\vee}{\omega}$  называется вектор  
численно равный первой производной от угла  
поворота по времени и направленный вдоль  
оси вращения в направлении  $d\overset{\vee}{\varphi}$  ( $\overset{\vee}{\omega}$  и  $d\overset{\vee}{\varphi}$   
всегда направлены в одну сторону).

$$\overset{\boxtimes}{\omega} = \frac{d\overset{\vee}{\varphi}}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.4.1)$$

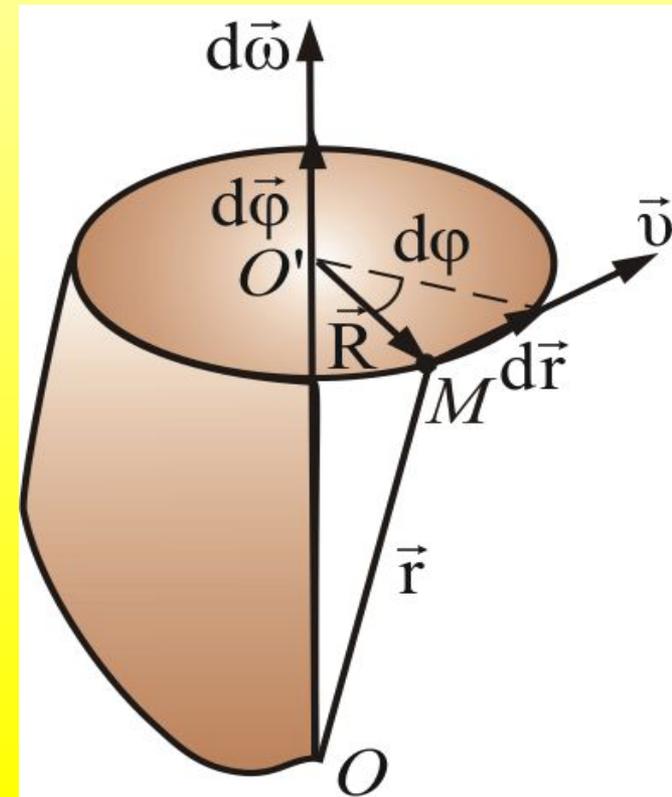
# Связь линейной и угловой скорости

Пусть  $\vec{v}$  – линейная скорость точки  $M$ .

За промежуток времени  $dt$  точка  $M$  проходит путь  $dr = v dt$ . В то же время  $dr = R d\varphi$  (центральный угол). Тогда,

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{R d\varphi}{dt} = \omega R$$

(2.4.2)

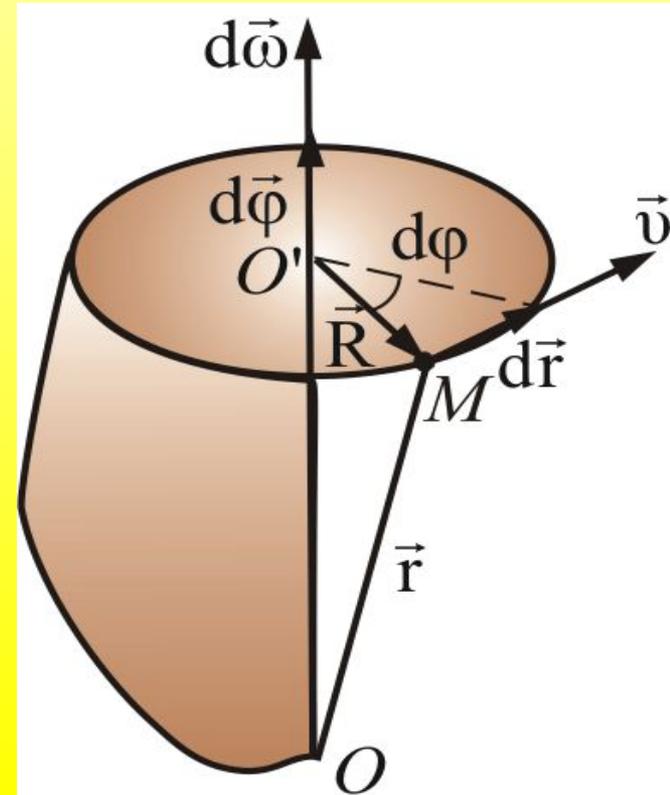


$$\mathbf{v} = \omega R$$

В векторной форме

$$\vec{\mathbf{v}} = [\vec{\omega}, \vec{\mathbf{R}}]$$

Вектор  $\vec{\mathbf{v}}$  ортогонален к векторам  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\mathbf{R}}$  и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение  $[\vec{\omega}, \vec{\mathbf{R}}]$



**Период  $T$**  – промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот (т.е. поворот на угол  $\varphi = 2\pi$ )

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

**Частота  $\nu$**  – число оборотов тела за 1 сек.

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

**Угловая скорость**  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$

Введем **вектор *углового ускорения***

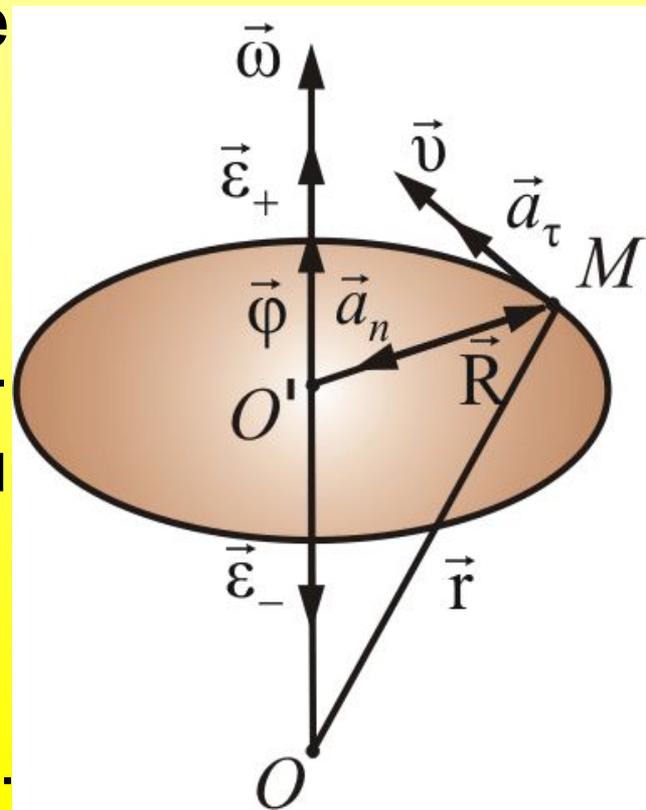
для характеристики *неравномерного вращения тела:*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (2.4.3)$$

Вектор  $\vec{\varepsilon}_+$  направлен в ту же сторону, что и  $\vec{\omega}$  при ускоренном вращении  $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$

а  $\vec{\varepsilon}_-$  направлен в противоположную сторону при замедленном вращении  $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$

(рисунок 2.13).



Выразим **нормальное** и **тангенциальное** ускорения точки ***M*** через **угловую скорость** и **угловое ускорение**:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$a_{\tau} = R\varepsilon;$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

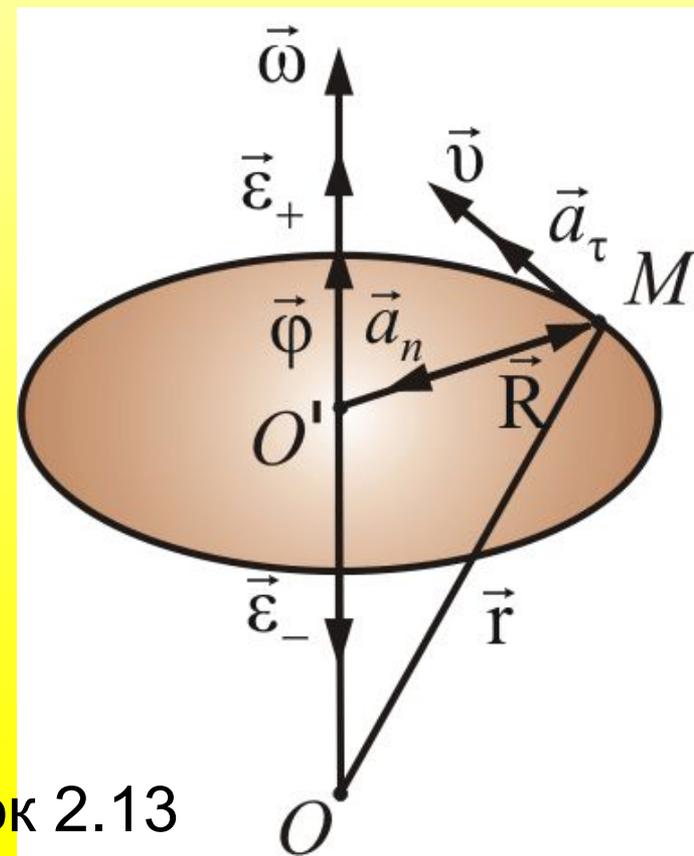


Рисунок 2.13

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- **равномерное вращение**  $\varepsilon = 0$ ;  $\omega = \text{const}$ ;

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega t;$$

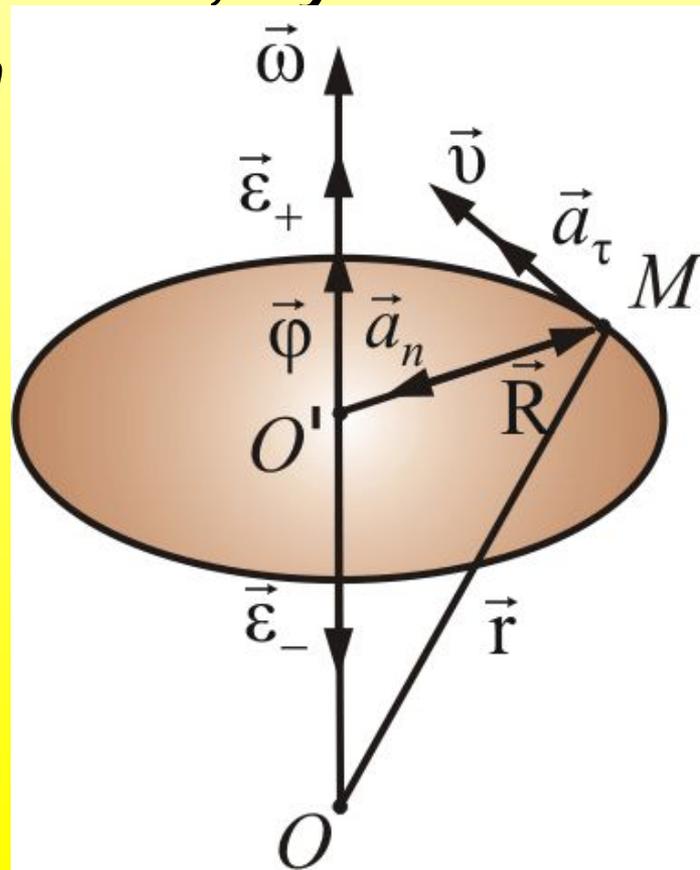
- **равнопеременное вращение**  $\varepsilon = \text{const}$ ;

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

**Обратите внимание.**

**Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота направлены вдоль оси вращения).**



## Поступательное движение

$$v = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = v_0 \pm at$$

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t v dt$$

## Вращательное движение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt$$