

Импульс. Закон сохранения импульса.



О НЕИЗМЕННОСТИ В МИРЕ ...

«Я принимаю, что во Вселенной ...
есть известное количество движения,
которое никогда не увеличивается,
не уменьшается, таким образом,
если одно тело приводит в движение
другое, то теряет столько своего
движения, сколько его сообщает».

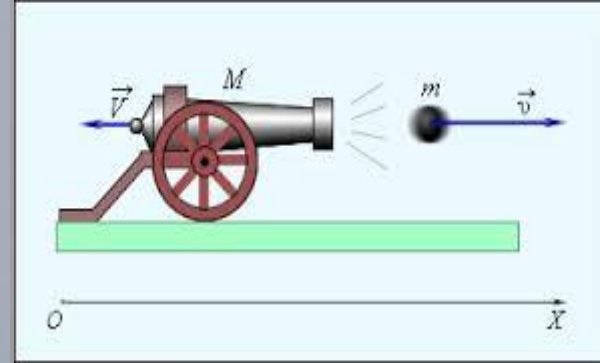


В XVII веке впервые были указаны *величины,*
сохраняющиеся в тех или иных явлениях.

Импульс. Закон сохранения импульса.

- *Импульс тела. Импульс силы.*
- *Закон сохранения импульса.*
- *Применение закона сохранения импульса – реактивное движение.*

Объясните явления...



▣ Второй закон Ньютона

▣ $\vec{F} = m\vec{a}$

▣ $\vec{a} = (\vec{v} - \vec{v}_0) / t$

▣ $\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$

▣ $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс тела

▣ $\vec{p} = \text{кг м/с}$ СИ

▣ $\vec{F}t$ - импульс силы.

▣ $m\vec{v} - m\vec{v}_0$ - изменение импульса
тела

- **Импульс силы** – мера механического взаимодействия, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени:

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad \text{В проекциях на координатные оси:}$$

$$(x): p_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \quad (y): p_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \quad (z): p_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt.$$

В случае постоянной силы: $\vec{p} = \vec{F}(t_2 - t_1).$

В проекциях на координатные оси: $p_x = X(t_2 - t_1); \quad p_y = Y(t_2 - t_1); \quad p_z = Z(t_2 - t_1);$

- **Импульс равнодействующей** – равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad \text{Умножим на } dt:$$

$$\vec{R}dt = \vec{F}_1dt + \vec{F}_2dt + \dots + \vec{F}_ndt.$$

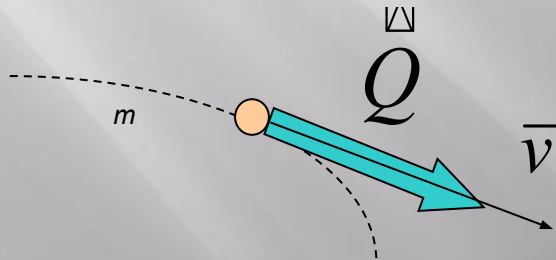
Проинтегрируем на данном промежутке времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n dt. \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n.$$

- Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, равным произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

- Количество движения системы материальных точек** – геометрическая сумма количеств движения материальных точек:



$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_n = \sum \vec{Q}_k.$$

$$\vec{Q} = \sum \vec{Q}_k = \sum m_k \vec{v}_k = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum m_k \vec{r}_k).$$

По определению центра масс:

$$M\vec{r}_C = \sum m_k \vec{r}_k.$$

Тогда: $\vec{Q} = \frac{d}{dt} (M\vec{r}_C) = M \frac{d\vec{r}_C}{dt} = M\vec{v}_C. \quad \vec{Q} = M\vec{v}_C.$

Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.

В проекциях на

координатные оси: $Q_x = Mv_{Cx}; \quad Q_y = Mv_{Cy}; \quad Q_z = Mv_{Cz}.$

Теорема об изменении количества движения системы

– Рассмотрим систему n материальных точек.

Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие

равнодействующие $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$. Запишем для каждой точки

основное уравнение динамики:

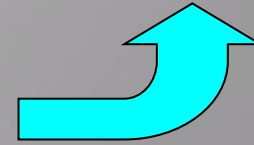
$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad \text{или} \quad m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

$$\frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{v}_k) = \bar{R}^e.$$

Из определения количества движения системы:

$$\sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}.$$



$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.$$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

$$\sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$



$$\bar{R}^e \quad \bar{R}^i = 0$$

Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на координатные оси: $\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e$; $\frac{dQ_y}{dt} = R_y^e = \sum Y_k^e$; $\frac{dQ_z}{dt} = R_z^e = \sum Z_k^e$.

Следствия из теоремы об изменении количества движения системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $\mathbf{R}^e = 0$, то вектор количества движения постоянен, $\mathbf{Q} = \text{const}$
– закон сохранения количества движения системы).
2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на ось x равна нулю, $R_x^e = 0$, то проекция количества движения системы на ось x постоянна, $Q_x = \text{const}$.
Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z .

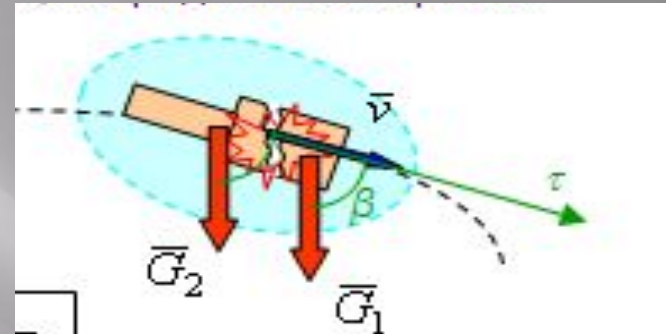
Пример: Граната массы M , летевшая со скоростью v , разорвалась на две части. Скорость одного из осколков массы m_1 возросла в направлении движения до величины v_1 . Определить скорость второго осколка.

1. Объект движения (граната):
2. Объект – свободная система, связи и их реакции отсутствуют.

3. Добавляем активные силы:

4. Записываем теорему об изменении количества движения:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e = \vec{G}_1 + \vec{G}_2.$$



Проецируем на ось τ :

$$\frac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g \cos \beta + m_2 g \cos \beta \neq 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем :

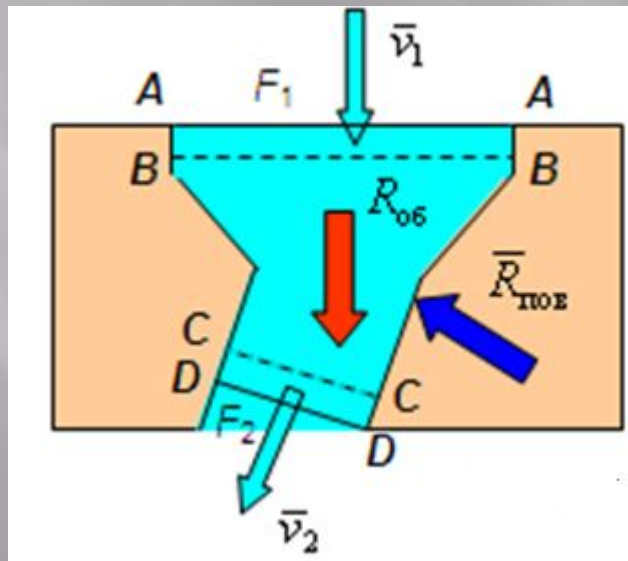
$$\int_{Q_0}^Q dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g \cos \beta + m_2 g \cos \beta) dt \approx 0.$$

Правый интеграл практически равен нулю, т.к. время взрыва $t \ll 1$.

Отсюда закон сохранения :

$$Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0 \quad \text{или} \quad Q_{\tau 0} \approx Q_\tau. \implies Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2. \implies v_2 = \frac{Mv - m_1 v_1}{m_2}.$$

- **Теорема Эйлера** – Применение теоремы об изменении количества движения системы к движению сплошной среды (воды) .



1. Выбираем в качестве объекта движения объем воды, находящийся в криволинейном канале турбины:
2. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями ($\mathbf{R}_{\text{пов}}$ – равнодействующая поверхностных сил)
3. Добавляем активные силы ($\mathbf{R}_{\text{об}}$ – равнодействующая объемных сил):
4. Записываем теорему об изменении количества движения системы:
$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}_{\hat{i}\hat{a}} + \bar{\mathbf{R}}_{\hat{i}\hat{i}\hat{a}}.$$

Изменение количества движения воды в интервале времени $[t_0, t_1]$:

$$\Delta \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}_1 - \bar{\mathbf{Q}}_0 = \bar{\mathbf{Q}}_{CD} - \bar{\mathbf{Q}}_{AB}.$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_0 = \bar{\mathbf{Q}}_{AB} + \bar{\mathbf{Q}}_{BC}.$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_1 = \bar{\mathbf{Q}}_{BC} + \bar{\mathbf{Q}}_{CD}.$$

Изменение количества движения воды за бесконечно малый интервал времени dt :

$$d\bar{\mathbf{Q}}_{AB} = (\rho F_1 v_1 dt) \bar{\mathbf{v}}_1;$$

$$d\bar{\mathbf{Q}}_{CD} = (\rho F_2 v_2 dt) \bar{\mathbf{v}}_2.$$

, где $d\bar{\mathbf{Q}} = d\bar{\mathbf{Q}}_{CD} - d\bar{\mathbf{Q}}_{AB}$

Принимая произведение плотности, площади поперечного сечения и скорости за секундную массу получаем:

$$M_{сек} = \rho F_1 v_1 = \rho F_2 v_2,$$

$$dQ_{AB} = (M_{сек} dt) v_1; \quad dQ = \dot{M}_{сек} (v_2 - v_1) dt.$$

$$dQ_{CD} = (M_{сек} dt) v_2.$$

Подставляя дифференциал количества движения системы в теорему об изменении получаем: $\dot{M}_{сек} (v_2 - v_1) = R_{ia} + R_{ia}$.

В проекциях на оси: $(x): M_{сек} (v_{2x} - v_{1x}) = R_x^{об} + R_x^{пов};$

$$(y): M_{сек} (v_{2y} - v_{1y}) = R_y^{об} + R_y^{пов};$$

$$(z): M_{сек} (v_{2z} - v_{1z}) = R_z^{об} + R_z^{пов}.$$

Разность проекций векторов секундных количеств движения жидкости на ось равна сумме проекций главных векторов объемных и поверхностных сил на ту же ось.

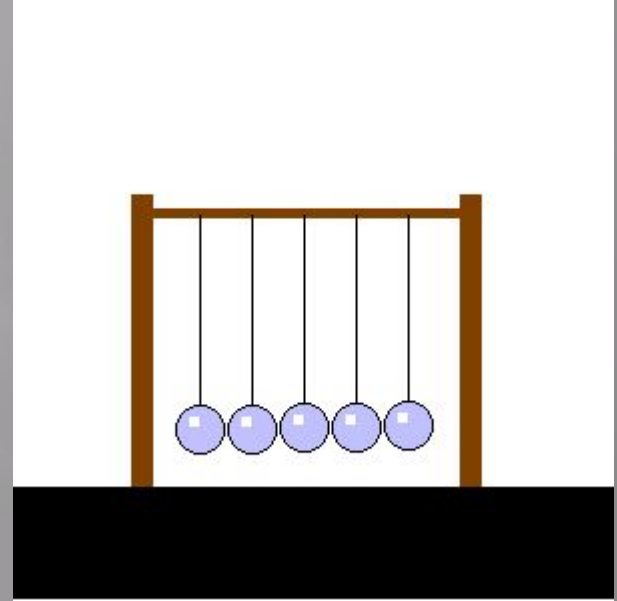
*Второй закон Ньютона в
импульсной форме:*

*Импульс силы равен
изменению импульса
тела.*



- Если два или несколько тел взаимодействуют только между собой (не подвергаются воздействию внешних сил), то эти тела образуют замкнутую систему.
- Импульс каждого из тел, входящих в замкнутую систему может меняться в результате их взаимодействия друг с другом.
- Для описания существует очень важный закон – закон сохранения импульса.

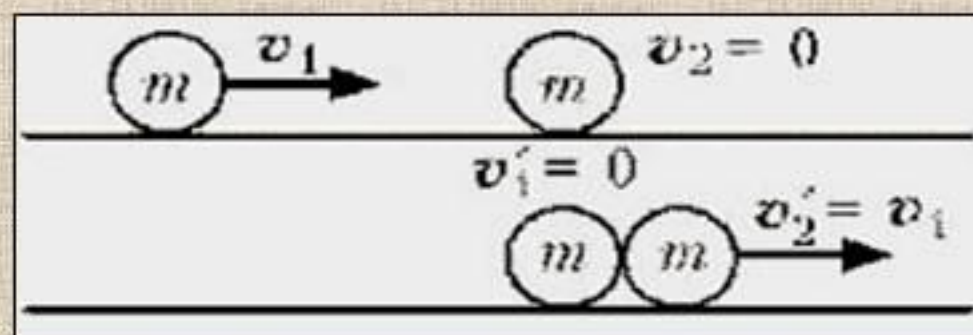
*Закон сохранения им-
пульса:
Векторная сумма
импульсов
замкнутой
системы тел не
изменяется.*



Упругий удар

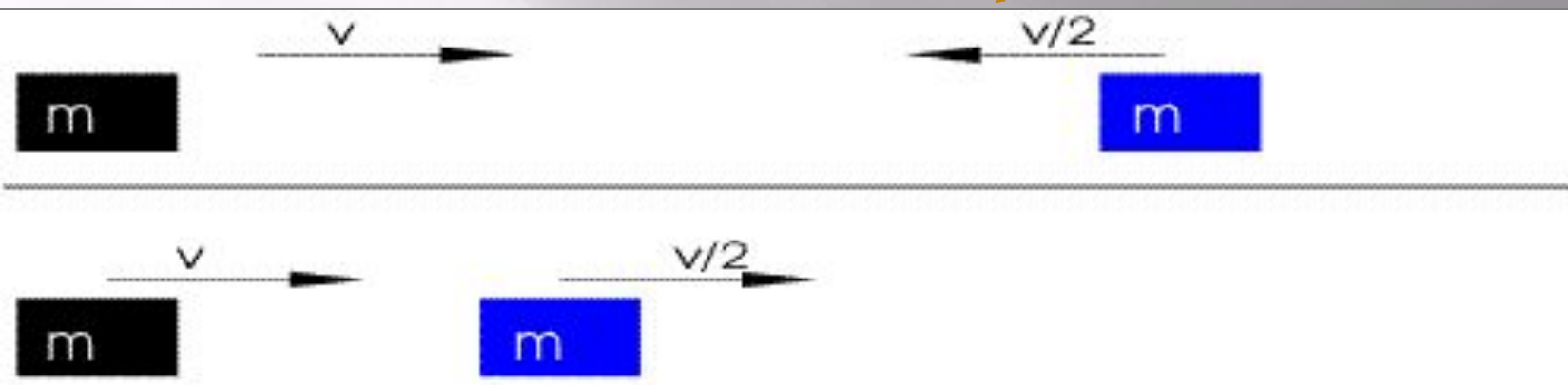
Абсолютно упругий удар – столкновения тел, в результате которого их внутренние энергии остаются неизменными. При абсолютно упругом ударе сохраняется не только импульс, но и механическая энергия системы тел.

Примеры: столкновение бильярдных шаров, атомных ядер и элементарных частиц. **На рисунке показан абсолютно упругий центральный удар:**


$$mv_1 = mv_1' + mv_2',$$
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2}.$$

В результате центрального упругого удара двух шаров одинаковой массы, они обмениваются скоростями: первый шар останавливается, второй приходит в движение со скоростью, равной скорости первого шара.

Абсолютно упругий удар – модель соударения при которой полная кинетическая энергия системы сохраняется



1. одинаковые тела обмениваются проекциями скорости на линию, соединяющую их центры.



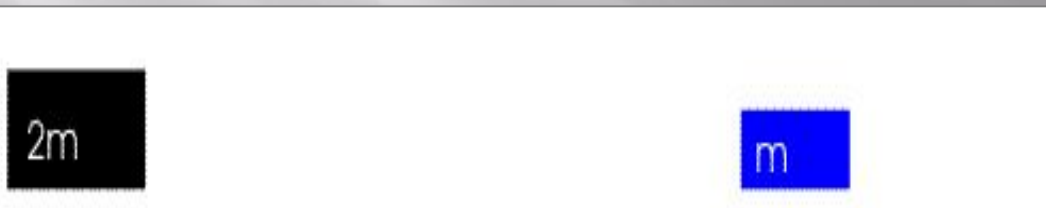
Для математического описания
простейших абсолютно упругих ударов,
используется:

закон сохранения импульса

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$



абсолютно упругий
удар

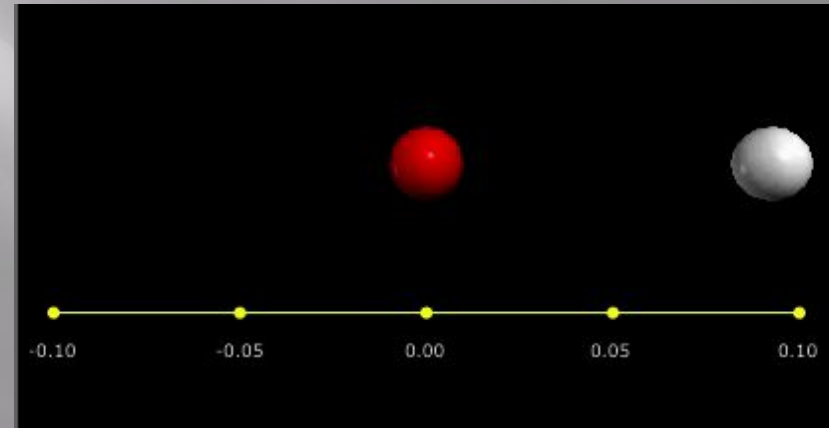
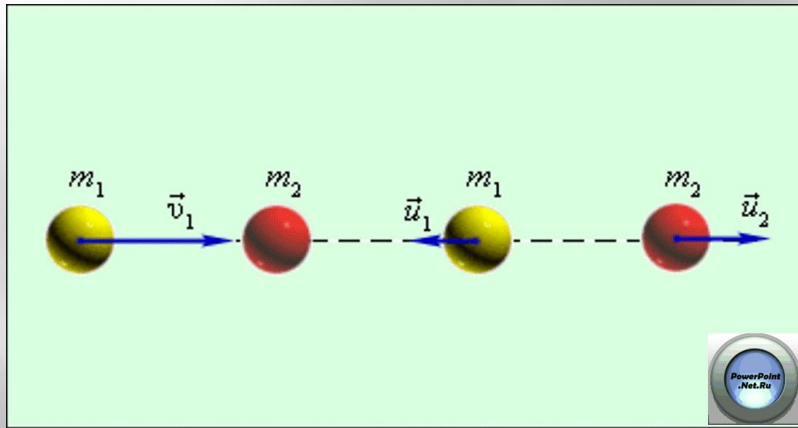
тел равных масс
абсолютно упругий

тел не равных масс

Импульсы складываются векторно, а энергии

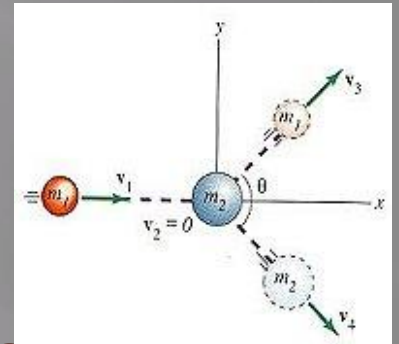
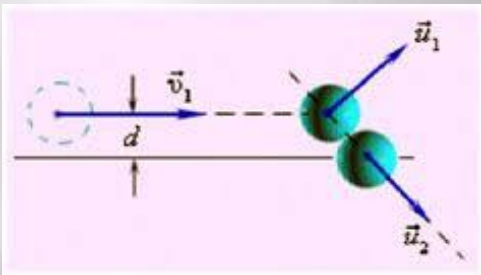
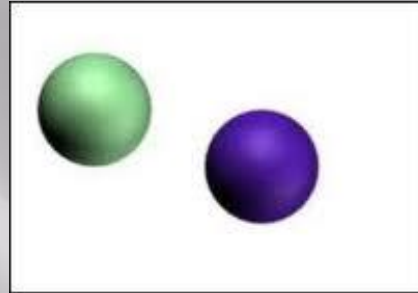
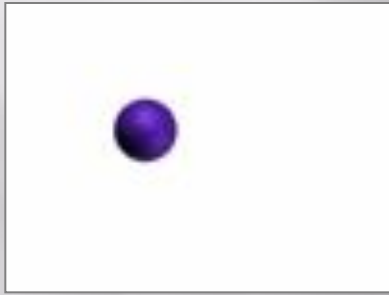
Центральный абсолютно упругий удар

Когда оба шара имеют одинаковые массы ($m_1 = m_2$), первый шар после соударения останавливается ($v_1 = 0$), а второй движется со скоростью $v_2 = v_1$, т. е. шары обмениваются скоростями (импульсами)



Центральным ударом шаров называют соударение, при котором скорости шаров до и после удара направлены по линии центров.

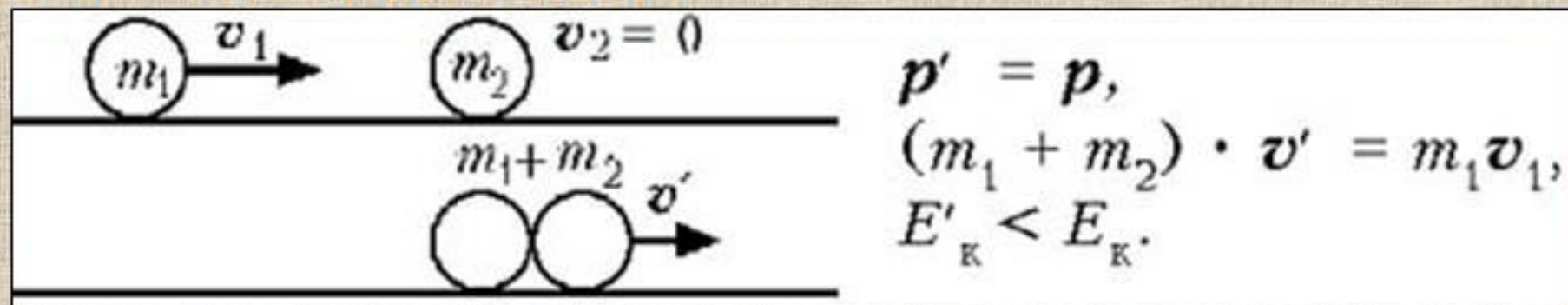
После нецентрального упругого соударения шары разлетаются под некоторым углом друг к другу



■ Если **массы шаров одинаковы**, то векторы скоростей шаров после нецентрального упругого соударения всегда направлены **перпендикулярно** друг к другу

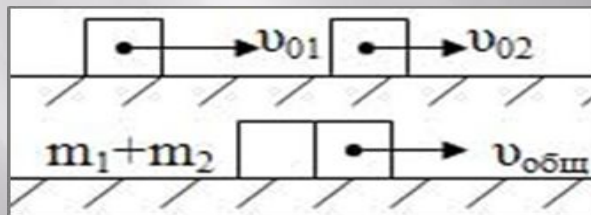
Неупругий удар

Абсолютно неупругий удар: так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно целое. При неупругом ударе часть механической энергии взаимодействующих тел переходит во внутреннюю, импульс системы тел сохраняется. **Примеры неупругого взаимодействия:** столкновение слипающихся пластилиновых шаров, автосцепка вагонов и т.д. **На рисунке показан абсолютно неупругий удар:**



После неупругого соударения два шара движутся как одно целое со скоростью, меньшей скорости первого шара до соударения.

Абсолютно неупругий удар – удар, в результате которого компоненты скоростей тел становятся равными



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

При абсолютно неупругом ударе, выполняется закон сохранения импульса, но не выполняется закон сохранения механической энергии (часть кинетической энергии соударяемых тел, в результате неупругих деформаций переходит в тепло)

Ракетное движение

Ракетное движение



это движение,

возникает при

от тела некоторой его
части с определенной
скоростью.

Особенностью этого движения
является то, что тело может

Реактивное движение, например, выполняет ракета.



Продукты сгорания при вылете получают относительно ракеты некоторую скорость. Согласно закону сохранения импульса, сама ракета получает такой же импульс, как и газ, но направленный в другую сторону. Закон сохранения импульса нужен для расчета скорости ракеты.

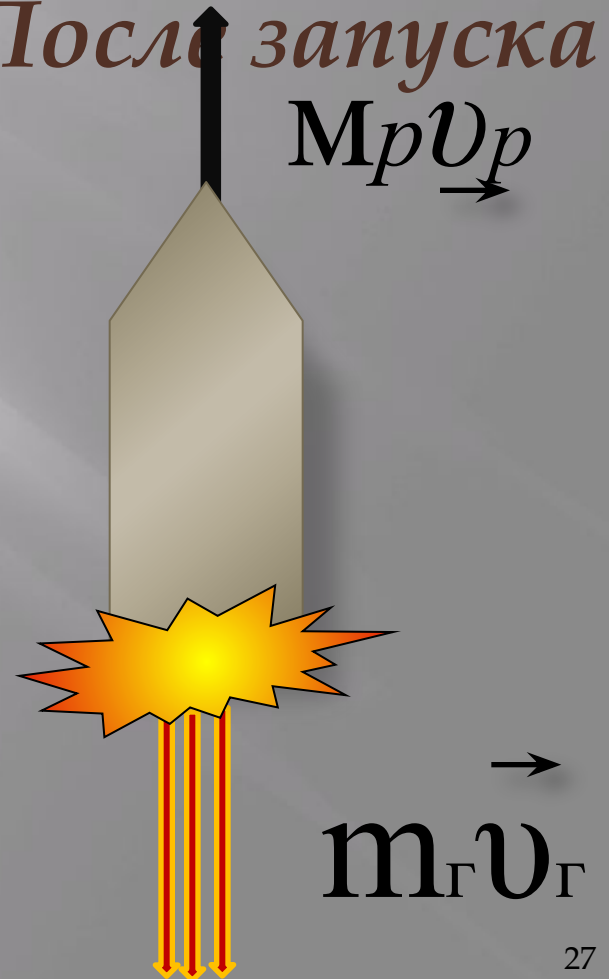
ЗАДАЧА:

ракеты
С какой
скоростью
будет двигаться
ракета, если
средняя
скорость
выхлопных газов
1 км/с, а масса
горючего
составляет 80%
от всей массы
ракеты?

До запуска

$$M_p v_p = 0, \quad m_g v_g = 0$$

После запуска



Реактивное движение в живой природе:

Реактивное движение присуще медузам, кальмарам, осьминогам и другим живым организмам.



Реактивное движение можно обнаружить и в мире растений. В южных странах и на нашем побережье Черного моря произрастает растение под названием «бешеный огурец». При созревании семян внутри плода создается высокое давление в результате чего плод отделяется от подложки, а семена с большой силой выбрасываются наружу. Сами огурцы при этом отлетают в противоположном направлении. Стреляет «бешеный огурец» более чем на 12 метров.



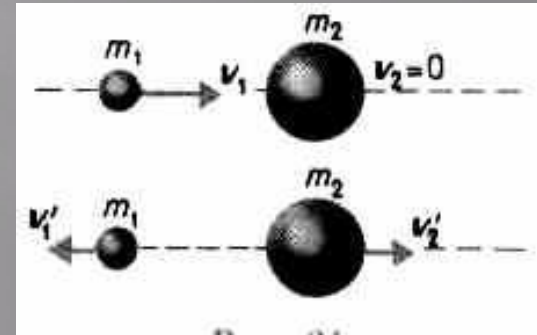
*В технике реактивно
движение встречается
на речном
транспорте
(катер с
водометным
двигателем),
в авиации,
космонавтике
военном деле.*



Легкий шар движущийся со скоростью 10 м/с, налетает на покоящийся тяжелый шар и между шарами происходит абсолютно упругий удар. После удара шары разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми скоростями. Во сколько раз различаются массы шаров

Решение:

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ m_1 v_1 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Rightarrow m_1 (v_1 + v_1') = m_2 v_2 \Rightarrow v_1 - v_1' = v_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2^2 \\ \begin{cases} m_1 (v_1 + v_1') = m_2 v_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{(v_1 + v_1')}{v_2} = 3 \\ v_1' = v_2 = \frac{v_1}{2} \end{cases} \end{cases}$$



Брусок массой 600 г, движущийся со скоростью 2 м/с,

сталкивается с неподвижным бруском массой 200 г.

Определите изменение кинетической энергии первого

Решение:
бруска после столкновения. Удар считать центральным и абсолютно упругим.

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_1 (v_1 - v_1') = m_2 v_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \Rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_1 + v_1' = v_2' \end{cases}$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{(m_1 + m_2)} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow \Delta E_{k1} = \frac{m_1}{2} (v_1'^2 - v_1^2) = -0,9 \text{ Дж}$$

Два шарика массы которых соответственно 200 г и 600 г, висят, соприкасаясь, на одинаковых вертикальных

нитях длиной 80 см. Первый шар отклонили на угол 90°

и отпустили. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас

после их абсолютно упругого центрального удара.

Решение:

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 gl \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} = 4 \frac{M}{c} \\ m v_1 = 3m v_2' - m v_1' \Rightarrow m(v_1 + v_1') = 3m v_2' \Rightarrow v_2' = v_1 - v_1' \\ \frac{m v_1^2}{2} = \frac{m v_1'^2}{2} + \frac{3m v_2'^2}{2} \Rightarrow m(v_1^2 - v_1'^2) = 3m v_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_1 + v_1') = 3m v_2' \\ v_2' = v_1 - v_1' \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_1' = 3(v_1 - v_1') \Rightarrow v_1' = \frac{v_1}{2} = 2 \frac{M}{c} \Rightarrow \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{3m v_2'^2}{m v_1'^2} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$$

Шарик массой 100 г, летящий горизонтально со скоростью 5 м/с, абсолютно упруго ударяется о неподвижный шар массой 400 г, висящий на нити длиной 40 см. Удар центральный. На какой угол отклонится шар, подвешенный на нити после удара

Решение:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l} \\ h = \frac{v_2'^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{v_2'^2}{2g}$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_2 v_2' - m_1 v_1' \Rightarrow m_1 (v_1 + v_1') = m_2 v_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \Rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2 \end{cases} \Rightarrow v_2 = v_1 - v_1' \Rightarrow v_1' = v_1 - v_2'$$

$$\begin{cases} v_1' = v_1 - v_2' \\ m_1 (v_1 + v_1') = m_2 v_2' \end{cases} \Rightarrow v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2 \frac{m}{c} \Rightarrow \cos \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

