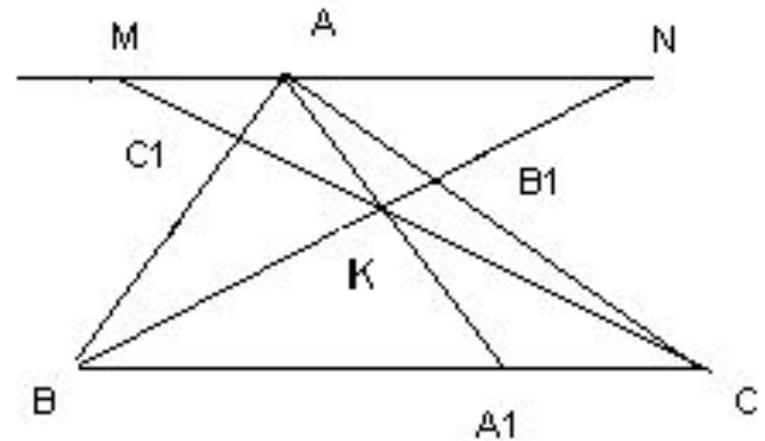


# Теоремы Чебы и Менелая

# Теорема Чебы для треугольника

- Если прямые  $AA_r$ ,  $BB_r$ ,  $CC_1$ , проходящие через вершины треугольника  $ABC$ , параллельны или проходят через одну точку, пересекают его стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  или их продолжения в точках  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_1$ , соответственно, то справедливо равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

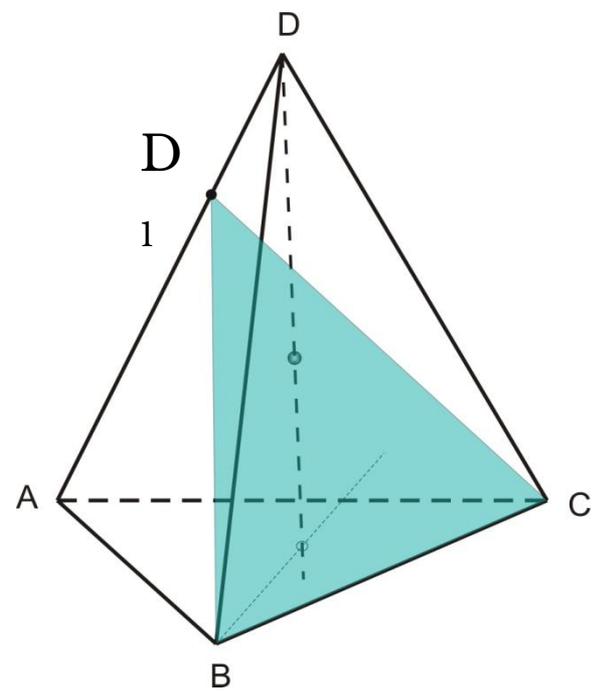
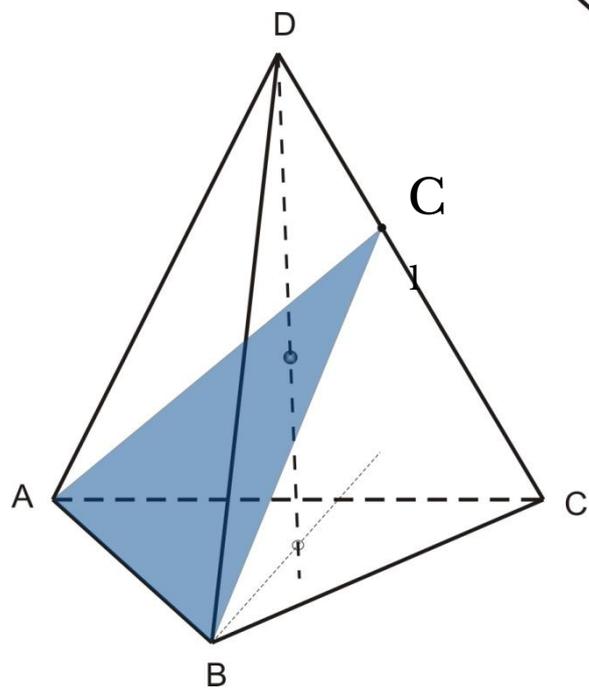
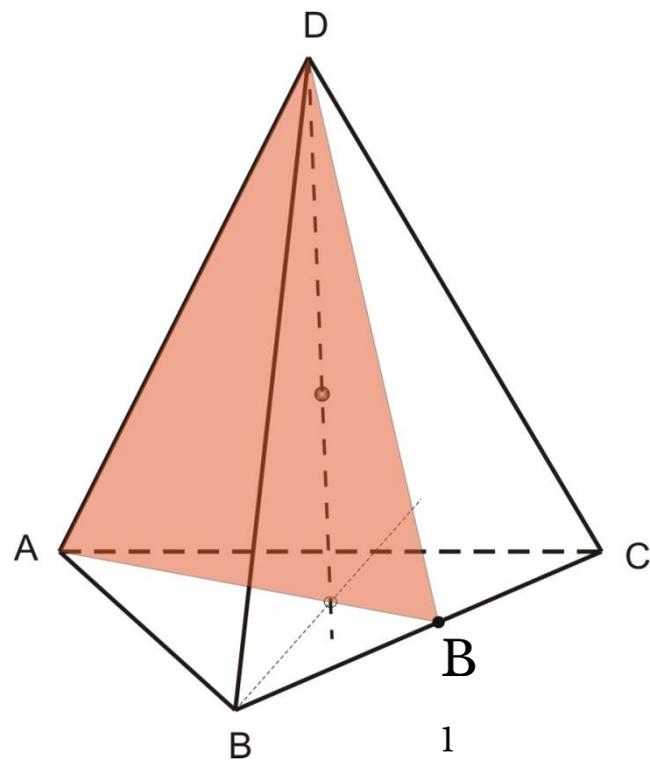
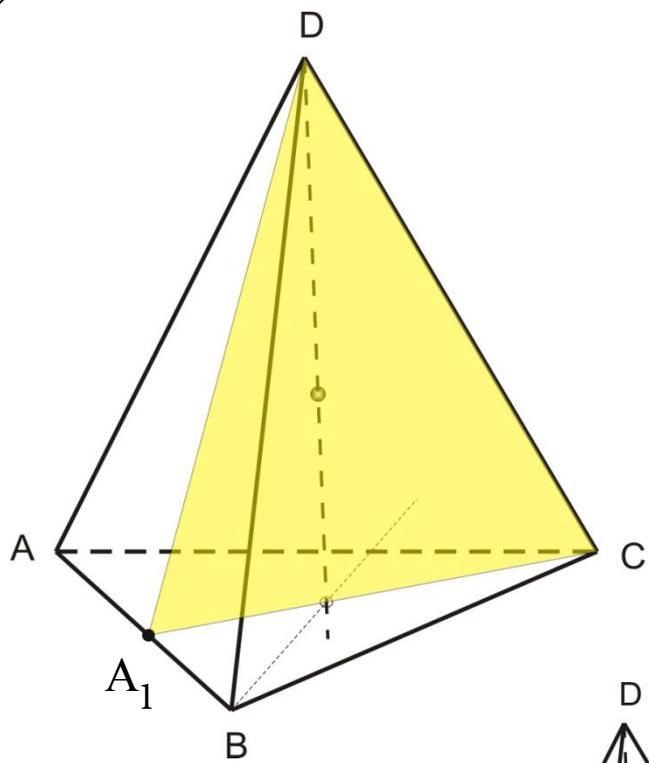


# Обобщение теоремы Чебы

- Пусть точка  $M$  внутри тетраэдра  $ABCD$ , точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  – точки пересечения плоскостей  $CMD, AMD, AMB, CMB$  с ребрами  $AB, BC, CD, DA$  соответственно.
 
$$\frac{AA_1}{A_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$$

Тогда

- Справедливо и обратное : если для точек  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , лежащих на соответствующих ребрах,
 
$$\frac{AA_1}{A_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$$
 выполнено соотношение, то плоскости  $CA_1D, CD_1B, AC_1B, AB_1D$  проходят через одну точку.



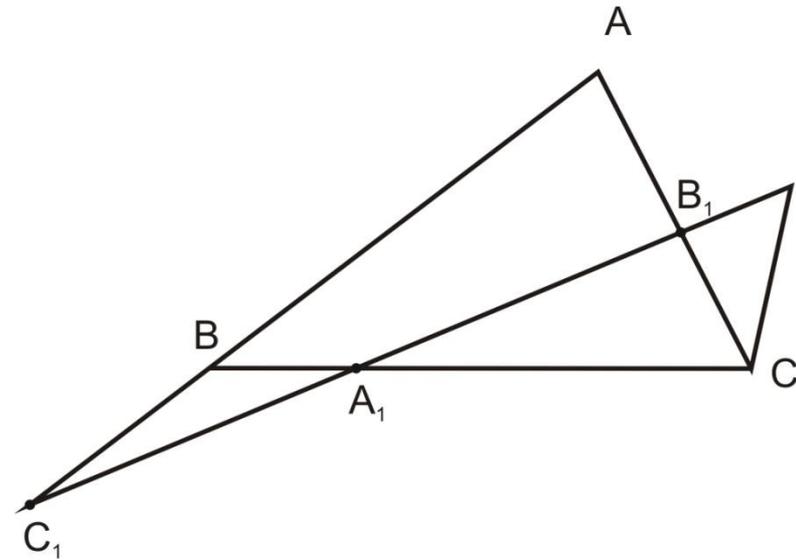
# Обобщение теоремы Чебы

- *Справедливо и обратное:*
- *если для точек  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , лежащих на соответствующих ребра, выполнено соотношение,  $\frac{AA_1}{A_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$  то плоскости  $CA_1D, CD_1B, AC_1B, AB_1D$  проходят через одну точку.*

# Теорема Менелая для треугольника

- Если треугольник  $ABC$  пересечен прямой, не параллельной стороне  $AB$  и пересекающей две его стороны  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $B_1$  и  $A_1$ , а прямую  $AB$  - в точке  $C_1$ , то

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



# Обратная теорема

- Точки  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_1$  принадлежат прямым  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , соответственно, т.е. лежат на сторонах треугольника  $ABC$ , или их продолжениях  $ABC$ , при этом, тогда точки  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой.

# Обобщение теоремы Менелая

- Если плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  тетраэдра  $ABCD$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , то  $\frac{AA_1}{A_1C} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$
- Обратно, если для четырех точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , лежащих соответственно на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  тетраэдра  $ABCD$  выполнено равенство ,  $\frac{AA_1}{A_1C} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$  то эти четыре точки лежат в одной плоскости.

