Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 3

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференцируемость функции

Определение:

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если её приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

где A – некоторое число; $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx при $x \to 0$.

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференцируемость функции

Теорема:

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная $f'(x_0) = A$.

Следствие:

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение неверно.

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференциал функции

Из определения дифференцируемости функции и её производной получаем, что

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)$$

Если $f'(x_0)\neq 0,$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{o(x-x_0)}{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}\right)=1$$

Значит, при $x\to x_0$ имеем $f(x)-f(x_0)\sim f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференциал функции

Определение:

Главная линейная часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0 называется **дифференциалом** функции в этой точке и обозначается $df(x_0)$.

Таким образом, по определению

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y = x$.

Найдём её дифференциал:

$$dy = y' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x.$$

С другой стороны, имеем:

$$y = x \quad \Rightarrow \quad dy = dx.$$

То есть, приращение и дифференциал независимой переменной равны между собой:

$$dx = \Delta x.$$

Значит, можно записать:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Геометрический смысл дифференциала функции

Пусть $y = f(x)$ – некоторая функция.

Перепишем выражение для дифференциала функции в виде

$$y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$$

Это выражение представляет собой уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства дифференциала функции

Для дифференциалов двух функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливы следующие формулы:

$$d(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot df + \beta \cdot dg$$

$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$$

$$d\left({}^{f}\!/_{g} \right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$$

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференциал функции

Пример:

Найти дифференциал функции $y = \sin\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1.$

Решение:

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Приложения дифференциала функции

С помощью дифференциала можно приближённо вычислять значения функции $f(x)$ для значений x, близких к некоторому значению x_0.

Имеем:

$$y = y'(x_0)\cdot(x - x_0) + y(x_0) + o(x - x_0) =$$

$$= y(x_0) + dy(x_0) + o(x - x_0).$$

Тогда

$$y(x) \approx y(x_0) + dy(x_0)$$

или

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Приложения дифференциала функции

Пример:

Вычислить приближённо $\sqrt{120}.$

Решение:

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Дифференциал сложной функции

Пусть $f(x)$ – сложная дифференцируемая функция,
где $x = \phi(t)$ – дифференцируемая функция.

Найдём её дифференциал.

Если x – независимая переменная, то

$$dy = f'(x)dx.$$

Если независимой переменной является t, то

$$dy = y'_t \cdot dt = (y'_x \cdot x'_t) \cdot dt = y'_x \cdot (x'_t \cdot dt) = y'_x \cdot dx,$$

где $dx = x'_t \cdot dt.$

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал функции всегда равен произведению её производной на дифференциал аргумента и не зависит от того, является ли величина, по которой взята производная, независимой переменной или функцией другой переменной.

Из приведенных выше формул имеем:

$$dy = f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть производная функции в точке численно равна отношению дифференциалов функции и её аргумента независимо от того, является x независимой переменной или является функцией другой переменной.

Автор: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org