

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 2



Елементи інтегрального числення

- 1. Первісна и невизначений інтеграл**
- 2. Властивості невизначеного інтеграла.
Таблиця невизначених інтегралів.**
- 3. Основні прийоми знаходження
невизначеного інтеграла.**
- 3. Визначений інтеграл.**
- 4. Формула Ньютона-Лейбніца.**
- 5. Властивості визначеного інтеграла.**
- 6. Невласні інтеграли.**

ЛЕКЦІЯ 2.1

Невизначений інтеграл, його властивості і обчислення

Первісна і невизначений інтеграл

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$, якщо її похідна або диференціал задовольняє умову $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Первісна і невизначений інтеграл

Кожна неперервна функція, що інтегрується, має нескінченну безліч первісних, що відрізняються на сталу C :

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x) \quad (1)$$

Знаходження цих первісних називається *інтегруванням*.

Сукупність усіх первісних для функції називається *невизначеним інтегралом*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (2)$$

Властивості невизначеного інтегралу

Похідна невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції, а його диференціал - підінтегральному виразу. Дійсно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$



Властивості інтегралу, які витікають із визначення

Невизначений інтеграл від диференціала
непрервно диференціюємої функції
дорівнює самій цій функції

$$3. \quad \int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

так як $\varphi(x)$ є первісною для $\varphi'(x)$.



Властивості інтегралу

Сформулюємо далі наступні властивості невизначеного інтегралу:

4. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають первісні, то функція $f_1(x) + f_2(x)$ також має первісну, при цьому:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx ;$$

$$5. \int Kf(x) dx = K \int f(x) dx ;$$

$$6. \int f'(x) dx = f(x) + C ;$$

$$7. \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C .$$



Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

Таблиця невизначених інтегралів

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$$

Методи інтегрування

1. Метод безпосереднього інтегрування

- **Приклад.** Обчислити $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$
- **Рішення.** Так як під знаком інтегралу знаходиться сума чотирьох доданків, то розкладемо інтеграл на суму чотирьох інтегралів:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx &= \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$



2. Метод заміни змінної (спосіб підстановки).

Застосовується наступна формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (4)$$

де $x = \varphi(t)$ - диференційована функція ,

а t - нова змінна.



Приклади

- **Приклад 1 .** Обчислити :

$$\int \cos 2x dx = \left. \begin{array}{l} 2x = t \\ d(2x) = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Приклади

Приклад 2. Обчислити : $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Рішення. Преобразімо $x^2 + 4x + 5$,

виділяючи повний квадрат по формулі $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тоді отримаємо :

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + 5 =$$

$$= \left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 \right) + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} x + 2 = t \\ x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctgt} + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C.$$



Приклади

Приклад 3 . Обчислити :

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1 + t}{1 + t^2} 2t dt =$$
$$= 2 \int \frac{t dt}{1 + t^2} + 2 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \left| \begin{array}{l} 1 + t^2 = z, \\ 2t dt = dz, t dt = \frac{1}{2} dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z} + 2 \int \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} dt =$$

$$\ln|z| + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \ln(t^2 + 1) + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$
$$= \ln(t^2 + 1) + 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = \ln(x + 1) + 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

3. Метод інтегрування частинами

Цей метод засновано на формулі $\int u dv = uv - \int v du$ (3)

Методом інтегрування частинами беруть такі інтеграли:

а) $\int x^n \sin x dx$, де $n = 1, 2 \dots k$;

б) $\int x^n e^x dx$, де $n = 1, 2 \dots k$;

в) $\int x^n \arctg x dx$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm k$;

г) $\int x^n \ln x dx$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm k$.

При обчисленні інтегралів а) и б) вводять

позначення: $x^n = u$, тоді $du = nx^{n-1} dx$, а, наприклад $\sin x dx = dv$, тоді $v = -\cos x$.

При обчисленні інтегралів в), г) позначають за u функцію $\arctg x$, $\ln x$, а за dv беруть $x^n dx$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\int x \cos x dx$.

Рішення.

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

Приклади

Приклад 2. Обчислити

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C.$$