



# Решение логических задач

Задача. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

*Решение.* Введем обозначения для следующих высказываний:

$D$  = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

$S$  = «студент-задолжник отчисляется»;

$P$  = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

$T$  = «студент является задолжником не более одного месяца».

Первое утверждение задачи

$$\Phi_1 = D \Rightarrow ((T \vee P) \Rightarrow \neg S)$$

---

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$$

По условию задачи требуется определить, выполняется ли логическое следование

$$\Phi_1 \models \Phi_2$$

---

$$\Psi = \left( D \Rightarrow ((T \vee P) \Rightarrow \neg S) \right) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$

$$= \left( \neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S) \right) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$

$$= \left( \neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P) \right) \wedge D \wedge T \wedge S =$$

$$= \left( (\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P) \right) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы  $\Psi$

$$S = \{ \neg D \vee \neg S \vee \neg T, \neg D \vee \neg S \vee \neg P, D, T, S \}$$

и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества  $S$ .

---

# Алгебра логических значений

---

---

Определение. *Алгеброй* называется непустое множество  $A$  с фиксированным набором операций  $f_1, f_2, \dots, f_k$  имеющих соответствующие определенные арности  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . При этом множество  $A$  называется *базисным множеством* алгебры и набор символов операций  $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  соответствующей арности  $n_1, n_2, \dots, n_k$  называется *алгебраическим типом* (или *сигнатурой*) алгебры.

Такая алгебра сокращенно обозначается  $(A; f_1, f_2, \dots, f_k)$ , или  $(A; \Omega)$ , или просто буквой  $A$  и называется *алгеброй типа  $\Omega$* , или сокращенно  *$\Omega$ -алгеброй*.

---

Пример алгебры дает множество  $\{0,1\}$  истинностных значений высказываний с  $n$ -арными операциями  $F_\Phi$ , которые являются функциями истинностных значений формул логики высказываний  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ , образованных с помощью  $n$  пропозициональных переменных  $X_1, \dots, X_n$ .

Формула  $\Phi = \neg X$  определяет унарную операцию  $F_\Phi = F_{\neg X}(x)$ , которая обозначается символом  $x'$  и называется *отрицанием* или *дополнением* переменной  $x$ .

Формулы  $\Phi = X \vee Y$ ,  $\Psi = X \wedge Y$  определяют бинарные операции  $F_\Phi = F_{X \vee Y}(x, y)$ ,  $F_\Psi = F_{X \wedge Y}(x, y)$ , которые обозначаются соответственно символами  $x \vee y$ ,  $x \wedge y$  и называются *дизъюнкцией* и *конъюнкцией* переменных  $x, y$ .

Операция  $x \vee y$  иногда называется также *объединением* или *суммой* переменных  $x, y$  и обозначается соответственно через  $x \cup y$  или  $x + y$ .

Операция  $x \wedge y$  иногда называется также *пересечением* или *произведением* переменных  $x, y$  и обозначается соответственно через  $x \cap y$  или  $x \cdot y$ .

---

Алгебра  $B = (\{0,1\}, \vee, \wedge, ')$  впервые была введена в 19-ом веке английским математиком Дж.Булем с целью применения в логике математических методов.

Поэтому эта алгебра называется *алгеброй Буля* или *алгеброй логических значений*.

---

Теорема. Алгебра Буля  $B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ')$  удовлетворяет свойствам:

1)  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ,  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$  – ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции;

2)  $a \vee b = b \vee a$ ,  $a \wedge b = b \wedge a$  – коммутативность дизъюнкции и конъюнкции;

3)  $a \vee a = a$ ,  $a \wedge a = a$  – идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции;

4)  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ,  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  – дистрибутивность соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

---

5)  $(a')' = a$  – идемпотентность дополнения;

6)  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ ,  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$  – законы де Моргана;

7)  $a \vee (a \wedge b) = a$ ,  $a \wedge (a \vee b) = a$  – законы поглощения;

8)  $a \vee a' = 1$ ,  $a \wedge a' = 0$  – характеристическое свойство дополнения,

9)  $a \vee 1 = 1$ ,  $a \wedge 1 = a$  – характеристическое свойство наибольшего элемента 1,

10)  $a \vee 0 = a$ ,  $a \wedge 0 = 0$  – характеристическое свойство наименьшего элемента 0.

---

---

# Булевы многочлены и булевы функции

---

Для описания алгебраических свойств булевых алгебр используются формулы, которые называются *булевыми многочленами* и которые образованы из булевых переменных  $x, y, \dots$  (принимающих значения 0,1) и символов булевых операций  $+, \cdot, '$  по следующим правилам:

- 1) все булевы переменные  $x, y, \dots$  и символы 0,1 – булевы многочлены;
- 2) если  $p$  и  $q$  – булевы многочлены, то таковыми являются выражения

$$(p) + (q), (p) \cdot (q), (p)'$$

---

Если  $p$  образован с помощью  $x_1, \dots, x_n$ , то он обозначается  $p(x_1, \dots, x_n)$ .

Множество всех булевых многочленов от  $n$  переменных обозначим  $P_n$ .

Если в  $p(x_1, \dots, x_n)$  вместо переменных  $x_1, \dots, x_n$  подставить произвольные значения  $a_1, \dots, a_n$  из множества  $B$ , то в результате вычислений получится некоторый элемент  $\bar{p}(a_1, \dots, a_n)$  алгебры  $B$ .

Каждый булев многочлен  $p(x_1, \dots, x_n)$  определяет отображение  $\bar{p}: B^n \rightarrow B$ , которое называется *булевой полиномиальной функцией*, определяемой булевым многочленом  $p(x_1, \dots, x_n)$ .

---

Определение. Булевы многочлены  $p, q \in P_n$  называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же булеву полиномиальную функцию, т.е.  $\overline{p} = \overline{q}$ .

Символическая запись:  $p \sim q$  или просто  $p = q$ .

Бинарное отношение  $\sim$  является эквивалентностью на множестве  $P_n$ .

Классы эквивалентности  $[p] = \{q \in P_n : p \sim q\}$ , образуют фактор-множество  $P_n / \sim = \{[p] : p \in P_n\}$ .

Полные системы представителей этого фактор-множества называются системами *нормальных форм* булевых многочленов.

Для булевой переменной  $x$  и  $\alpha \in \{0, 1\}$  положим:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ x', & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Выражение  $x^\alpha$  называется *литерой*.

Литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер называется *конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*).

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все булевы переменные рассматриваемой формулы.

---

Дизъюнкт или конъюнкция (совершенных)  
дизъюнктов называется (совершенной)  
*конъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно  
КНФ и СКНФ, соответственно.

Конъюнкт или дизъюнкция (совершенных)  
конъюнктов называется (совершенной)  
*дизъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно  
ДНФ и СДНФ, соответственно.

---

Теорема. Любая булева функция  $f: B^n \rightarrow B$  является булевой полиномиальной функцией следующих булевых многочленов:

$$p_f = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

И

$$q_f = \prod_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + x_1^{\alpha_1'} + \dots + x_n^{\alpha_n'}) .$$

Следствие 1. Если булева функция  $f: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$  не равна тождественно нулю, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной дизъюнктивной нормальной формы

$$P_f = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{B}^n, \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

которая называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно **СДНФ**) функции  $f$ .

Следствие 2. Если булева функция  $f: B^n \rightarrow B$  не равна тождественно единице, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной конъюнктивной нормальной формы

$$q_f = \prod_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n, \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0}} (x_1^{\alpha'_1} + \dots + x_n^{\alpha'_n}),$$

которая называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) функции  $f$ .

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ функции  $f: B^n \rightarrow B$ :

1. Составить таблицу значений функции  $f$  и добавить к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях  $x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$  значение функции  $f$  равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записать конъюнкт  $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  и в столбце «Совершенные дизъюнкты» сделать прочерк (при этом  $x^1 = x$  и  $x^0 = x'$ ).



4. Дизъюнкция полученных совершенных  
конъюнктов

$$x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots$$

является СДНФ функции  $f$ , конъюнкция  
полученных совершенных дизъюнктов

$$(x_1^{m'_1} + \dots + x_n^{m'_n}) \cdot \dots$$

является СКНФ функции  $f$ .

---

# Системы булевых функций

---

Операция отрицания  $'$  является одной из четырех булевых функций от одной переменной, которые перечисляются в следующей таблице:

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Операции дизъюнкция  $+$  и конъюнкция  $\cdot$  являются примерами двух из шестнадцати булевых функций от двух переменных, которые перечисляются в следующей таблице:

$x$	$y$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$\cdot$	$\rightarrow'$	$x$	$\leftarrow'$	$y$	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$y'$	$\leftarrow$	$x'$	$\rightarrow$	$ $	1

Функция  $f_{15}(x, y) = f_2(x, y)'$  - *штрих Шеффера*, обозначается  $x | y$ .

Функция  $f_9(x, y) = f_8(x, y)'$  - *стрелка Пирса*, обозначается  $x \downarrow y$ .