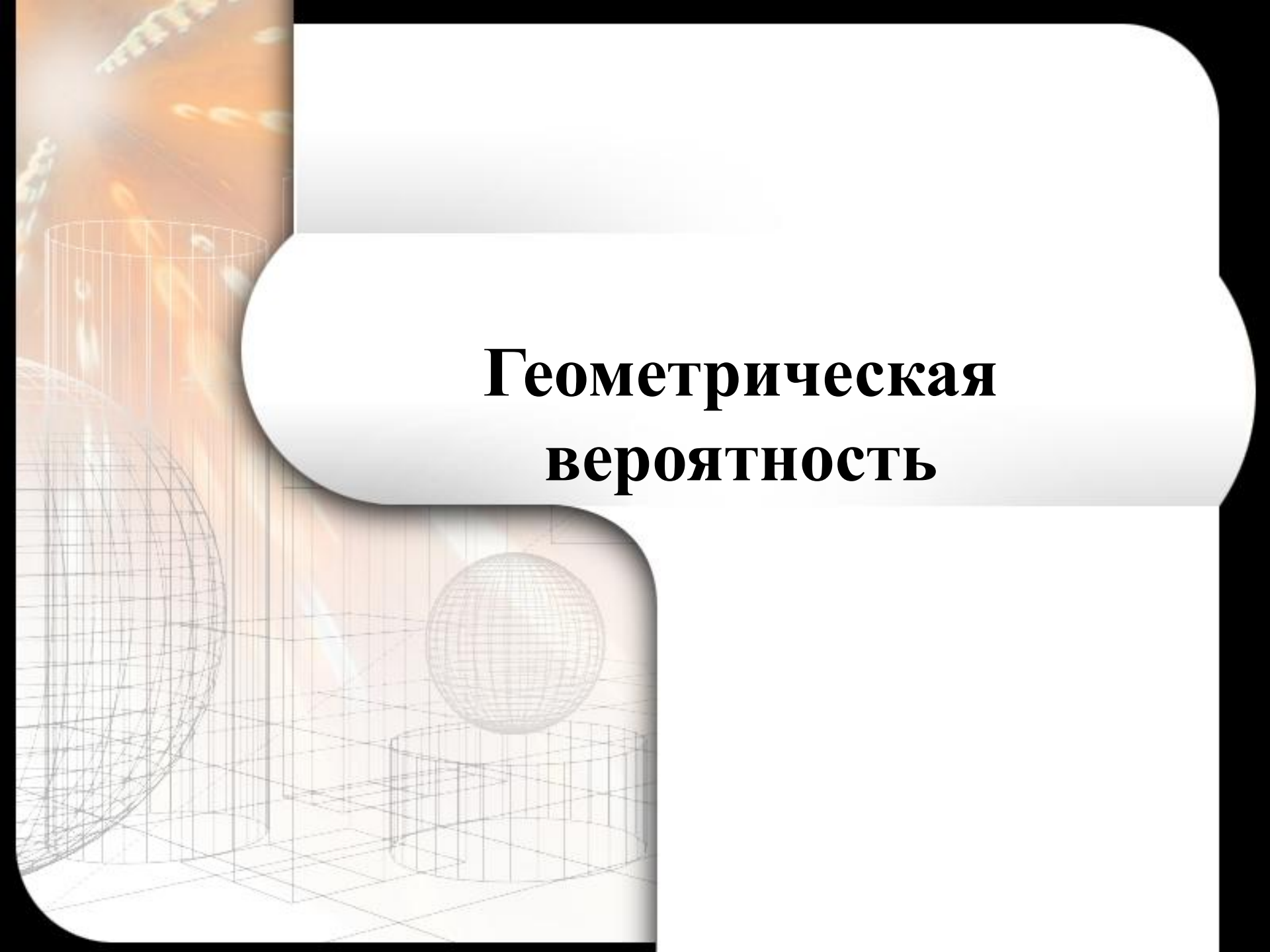




Геометрическая вероятность

Основной вопрос:

- Как связано понятие вероятности с геометрией?
- Задачи:
 1. Провести серию опытов.
 2. Сформулировать геометрическое понятие вероятности.
 3. Изучить литературу по данному вопросу.
 4. Сделать выводы. Подтвердить или опровергнуть гипотезу.
 5. Составить задачи на нахождение вероятностей.

The background of the slide features a complex geometric pattern. It includes several wireframe spheres and cylinders of varying sizes, all rendered in a light gray color. These shapes are superimposed on a grid of thin, intersecting lines that create a sense of depth and perspective. The overall color palette is dominated by warm, orange-brown tones, with some lighter areas where the grid and shapes are more prominent. The shapes appear to be floating or positioned on a grid plane, creating a three-dimensional effect.

Серия опытов.

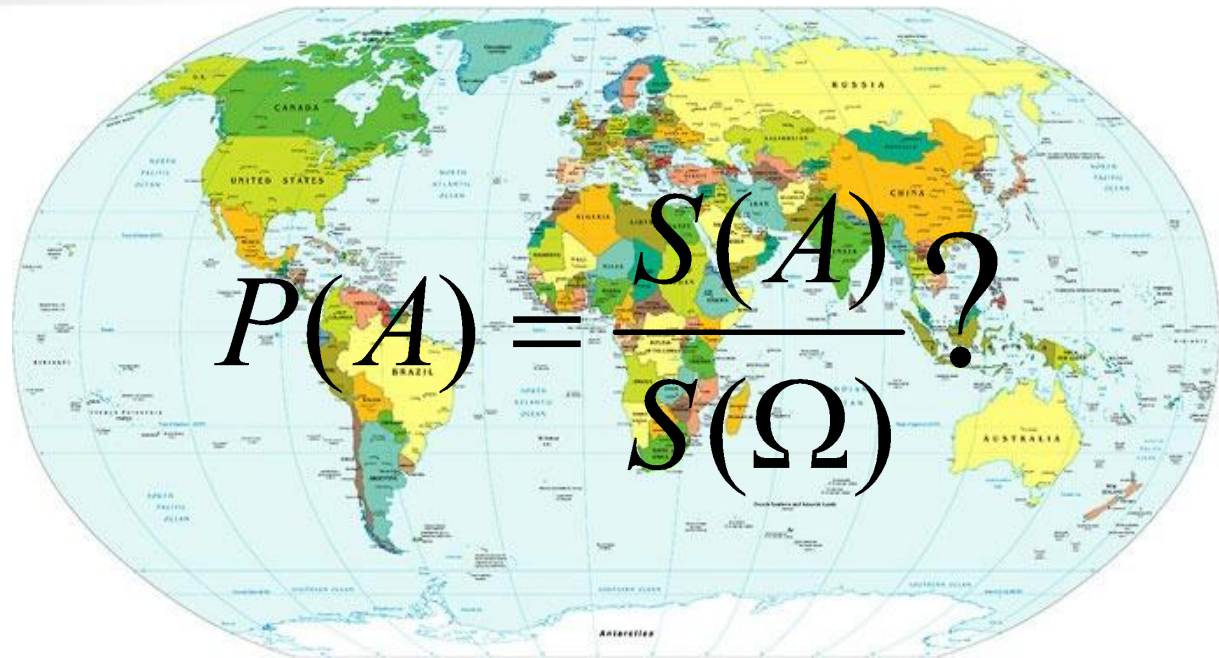
Серия опытов, приводящих к определению вероятности из геометрических соображений.

ОПЫТ 1. Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?



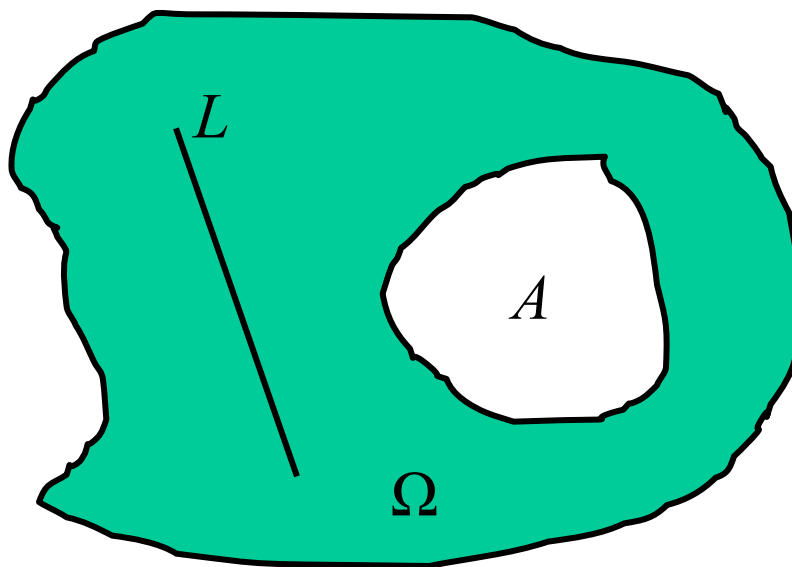
- **Число исходов бесконечно.**
- **Вероятность будет зависеть от размера карты (масштаба).**

ОПЫТ 1. Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?



ГИПОТЕЗА: Очевидно, для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей карты занимает Россия. Точнее, какую часть всей площади карты составляет Россия. Отношение этих площадей и даст искомую вероятность.

Общий случай: в некоторой ограниченной области Ω случайно выбирается точка. Какова вероятность, что точка попадет в область A ? На прямую L ?



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(L) = 0; P(L) = \frac{0}{S(\Omega)} = 0$$

Геометрическое определение вероятности

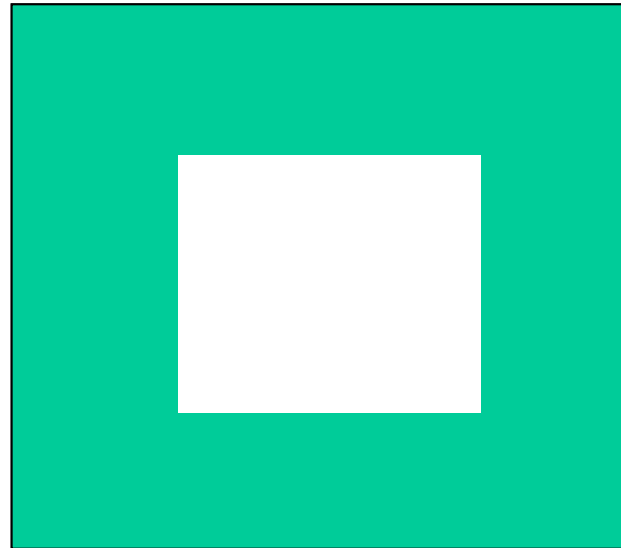
- Если предположить, что попадание в любую точку области Ω равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в заданное множество A будет равна отношению площадей:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

- Если A имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в A равна нулю.
- Можно определить геометрическую вероятность в пространстве и на прямой:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}; P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

ОПЫТ 2. В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

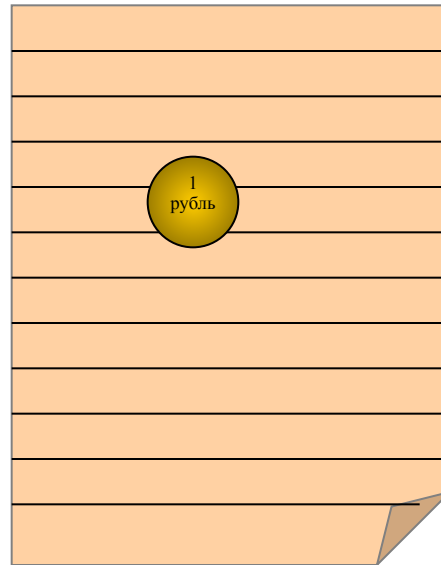


Закрасим в квадрате множество точек, удаленных от ближайшей стороны меньше, чем на 1 см.

Площадь закрашенной части квадрата
 $16\text{см}^2 - 4\text{см}^2 = 12\text{см}^2$.

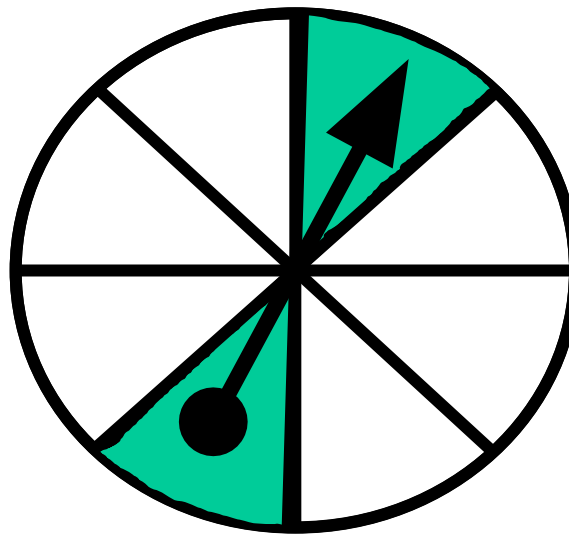
Значит, $P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75$

Опыт 3. На тетрадный лист в линейку наудачу бросается монета. Какова вероятность того, что монета пересекла две линии?



- Число исходов зависит от размеров монеты, расстояния между линиями.

ОПЫТ 4. В центре вертушки закреплена стрелка, которая раскручивается и останавливается в случайном положении. С какой вероятностью стрелка вертушки остановится на зеленом секторе?

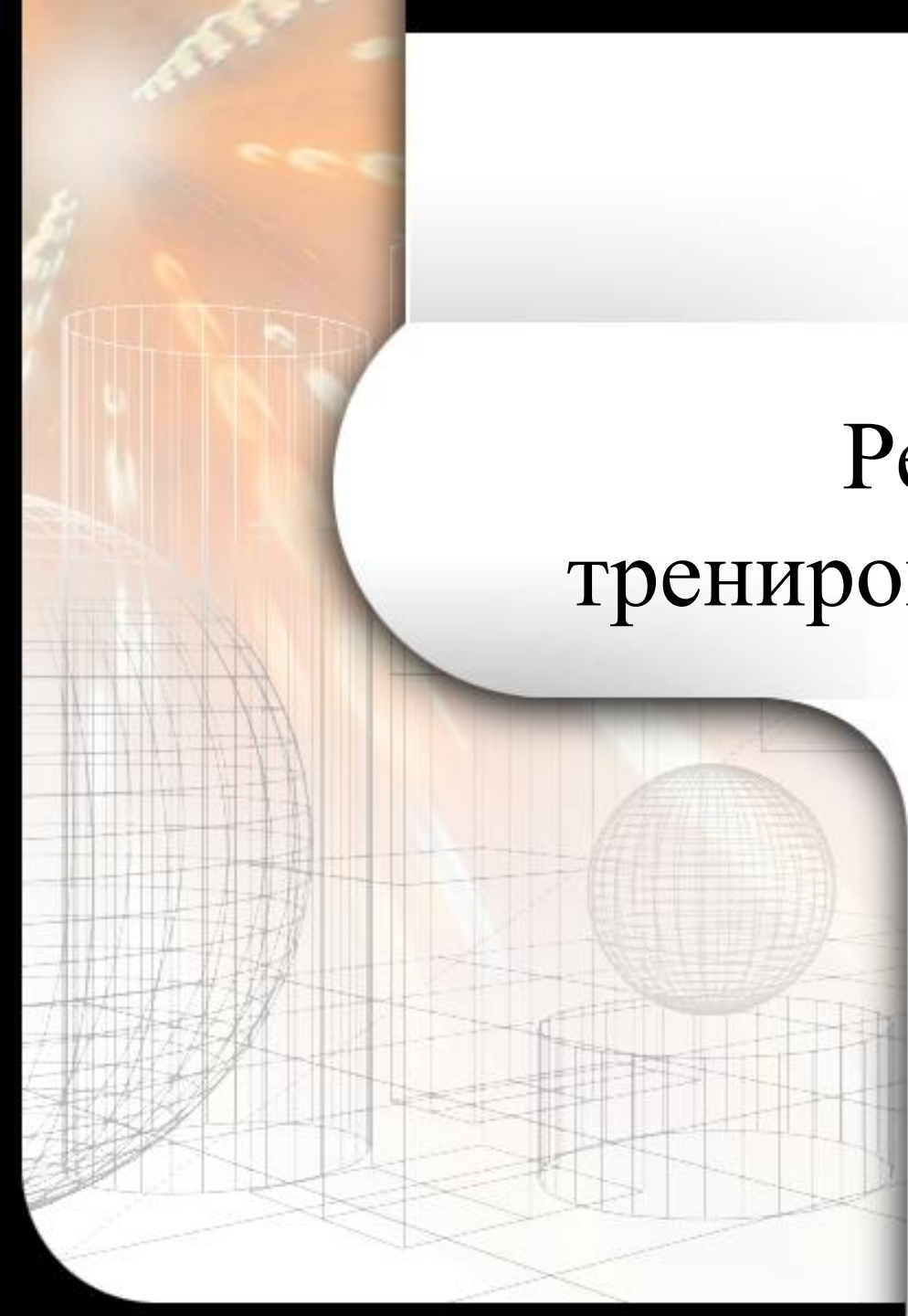


Для решения этой задачи можно вычислить площадь зеленных секторов и разделить ее на площадь всего круга:

$$S(A) = \frac{\pi R^2}{4}; S(\Omega) = \pi R^2; P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Вывод.

- Изучив литературу, мы пришли к выводу, что наше предположение верно, т. е. дали верное геометрическое определение вероятности.

The background of the slide features a complex geometric design. It includes several wireframe spheres and cylinders of varying sizes, all rendered in a light gray or white color. These shapes are positioned on a grid that recedes into the distance, creating a three-dimensional perspective. The overall color palette is dominated by warm, orange-brown tones, with some lighter areas where the wireframe structures are more prominent. The text is presented in a clean, black, serif font, centered within a white, rounded rectangular area that overlaps the background.

Решение тренировочных задач.

Задачи 1 – 3.

Задача №1. Дано: $AB=12\text{см}$, $AM=2\text{см}$, $MC=4\text{см}$. На отрезке AB случайным образом отмечается точка X . Какова вероятность того, что точка X попадет на отрезок: 1) AM ; 2) AC ; 3) MC ; 4) MB ; 5) AB ?



Решение.

1) $A = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } AM\}$, $AM=2\text{см}$, $AB=12\text{см}$,

$$P(A) = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

2) $B = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } AC\}$, $AC=2\text{см}+4\text{см}=6\text{см}$,

$$P(B) = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

3) $C = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } MC\}$, $MC=4\text{см}$, $AB=12\text{см}$,

$$P(C) = \frac{MC}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4) $D = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } MB\}$, $MB=12\text{см}-2\text{см}=10\text{см}$,

$$P(D) = \frac{MB}{AB} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

5) $E = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } AB\}$,

$$P(E) = \frac{AB}{AB} = 1$$

Задача №2. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20см. Какова вероятность того, что попавший в окно мяч, пролетит через решетку, не задев ее, если радиус мяча равен: а) 10см, б) 5см?

Решение.

а) $S_{\text{мяча}} = \pi R^2 = 100\pi (\text{см}^2)$

$$S_{\text{кв}} = a^2 = 20^2 = 400 (\text{см}^2)$$

$$P(A) = \frac{S_{\text{мяча}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{100\pi}{400} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79$$

б) $S_{\text{мяча}} = 5^2 \pi = 25\pi (\text{см}^2)$

$$S_{\text{кв}} = 400 (\text{см}^2)$$

$$P(A) = \frac{25\pi}{400} = \frac{\pi}{16} \approx 0,20$$

Задача №3. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20см. В решетку 100 раз бросили наугад один и тот же мяч. В 50 случаях он пролетел через решетку не задев ее. Оцените приближенно радиус мяча.

Решение.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{S_{\text{мяча}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\pi R^2}{400}$$

$$\frac{\pi R^2}{400} = \frac{1}{2}$$

$$R^2 = \frac{400}{2 \cdot \pi} = \frac{200}{\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{200}{\pi}} = \frac{10\sqrt{2}}{\pi} \approx 4,5(\text{см})$$

The background of the slide features a complex geometric design. On the left side, there are two wireframe spheres. The larger one is in the foreground, and a smaller one is positioned behind it. These spheres are composed of a grid of thin, light-colored lines. The background is a warm, orange-brown color with several bright, glowing streaks of light that appear to be moving or radiating from the left. The overall effect is one of dynamic energy and mathematical precision.

Итог.

Вопросы. Задача.

Вопросы:

1. Что такое геометрическая вероятность? Каковы формулы геометрической вероятности (на плоскости, на прямой, в пространстве)?
2. Можно ли вычислить геометрические вероятности для опыта, исходы которого не являются равновероятными?

Задача.

Внутри квадрата со стороной 10см выделен круг радиусом 2см. Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?

