

Алгоритмы вычислительной математики

Что такое вычислительная математика?

Вычислительная математика — часть информатики, использующая математические методы.

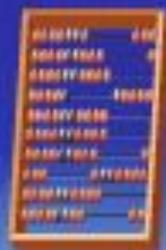
Часто этот термин трактуют более узко, под вычислительной математикой понимают раздел математики — ***прикладную математику***.

Что такое вычислительная математика?

В свою очередь, прикладная математика включает в себя **теорию численных методов** и **алгоритмов решения типовых математических задач**. С некоторыми из них мы и будем знакомиться на уроках.



абак



счёты



арифмометр



компьютер

Методы решения математических задач

Найти целые корни уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

На отрезке $[-10, 10]$.

Аналитическое решение

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

Численное решение

Находим целые корни уравнения на отрезке простым *перебором всех* целых чисел на данном отрезке

-10	132
-9	110
-8	90
-7	72
-6	56
-5	42
-4	30
-3	20
-2	12
-1	6
0	2
1	0
2	0
3	2
4	6
5	12
6	20
7	30
8	42
9	56
10	72

Найдите корень уравнения на отрезке $[0,1]$

$$8x^5 - 4x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 7x - 2 = 0$$

Методы решения математических задач

Аналитические

Достоинства —
решения точные

Недостатки — не
всегда можно
получить

Численные

Достоинства —
универсальность

Недостатки:

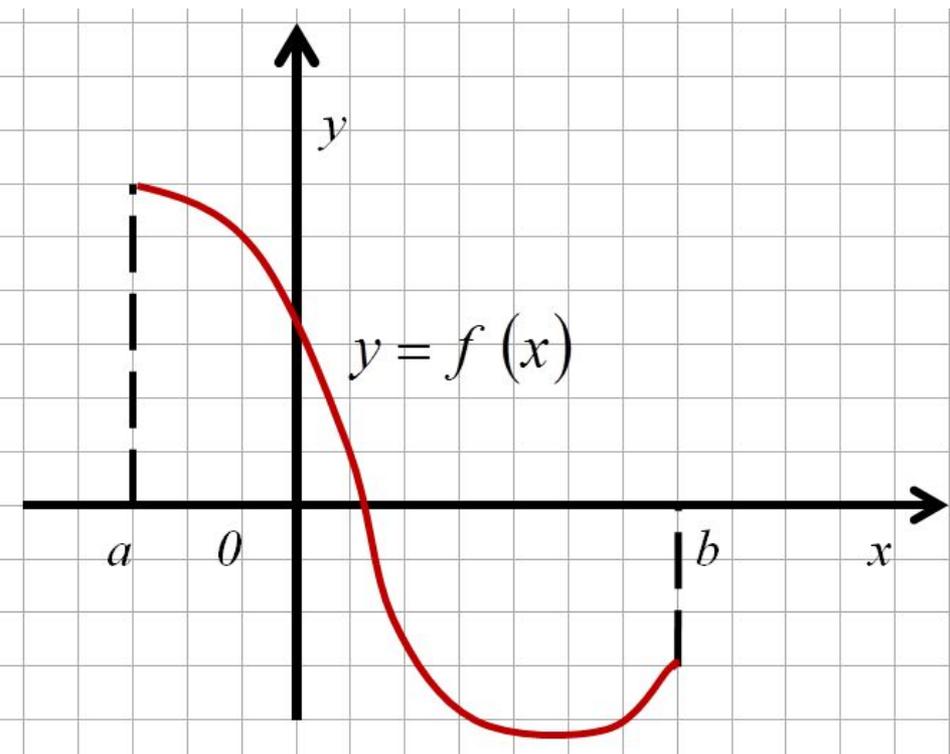
- решения находятся для конкретных исходных данных,
- решения получаются с погрешностью.

Основные задачи

- поиск корней уравнения,
- поиск значения производной в заданной точке,
- вычисление определенного интеграла,
- вычисление значений сложных функций,
- решение систем линейных уравнений,
- решение систем нелинейных уравнений,
- сортировка и поиск информации,
- шифрование и дешифрование сообщений.

Решение уравнений

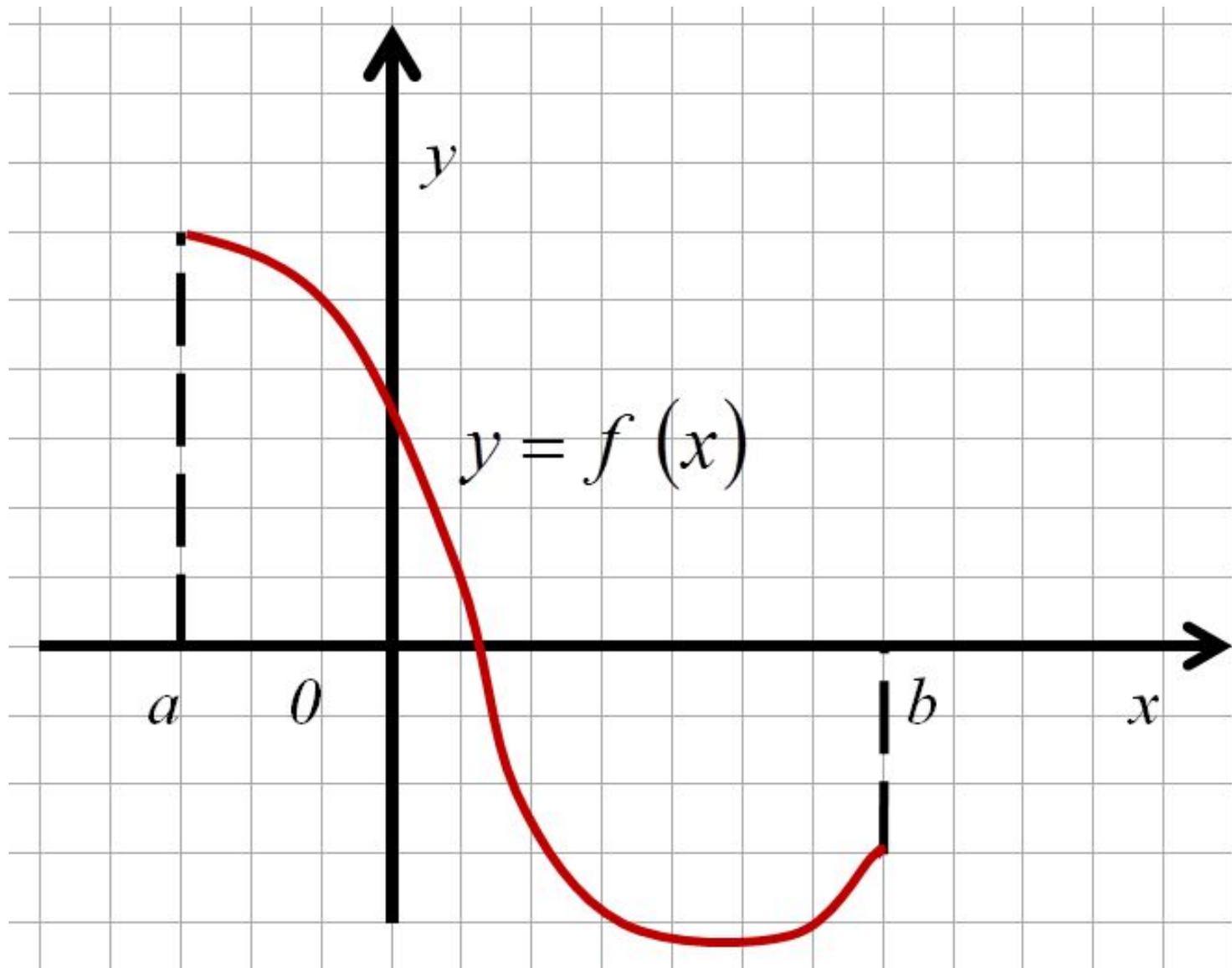
Существование корня на отрезке



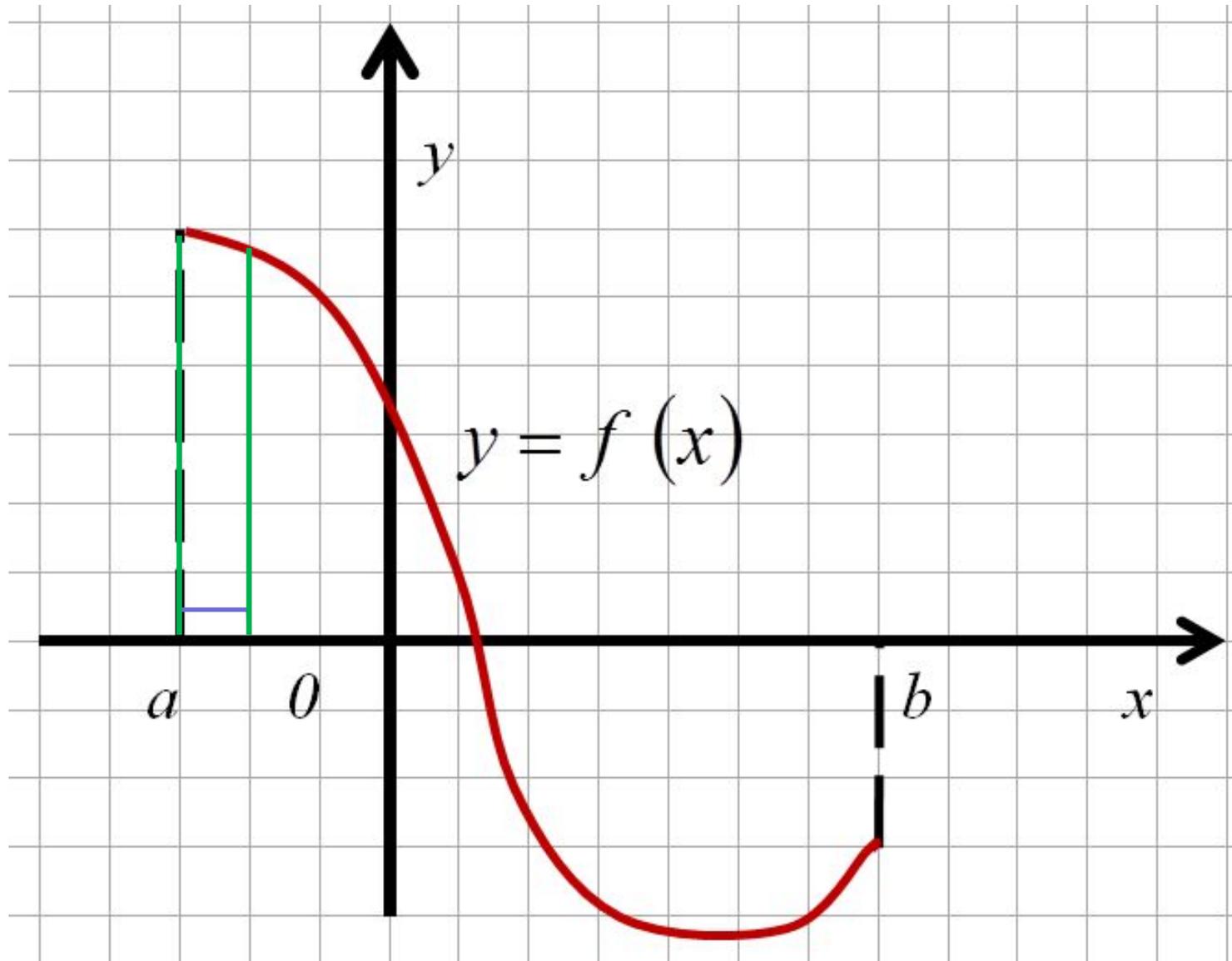
Утверждение.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разного знака, то $\exists c \in [a, b]: f(c) = 0$.

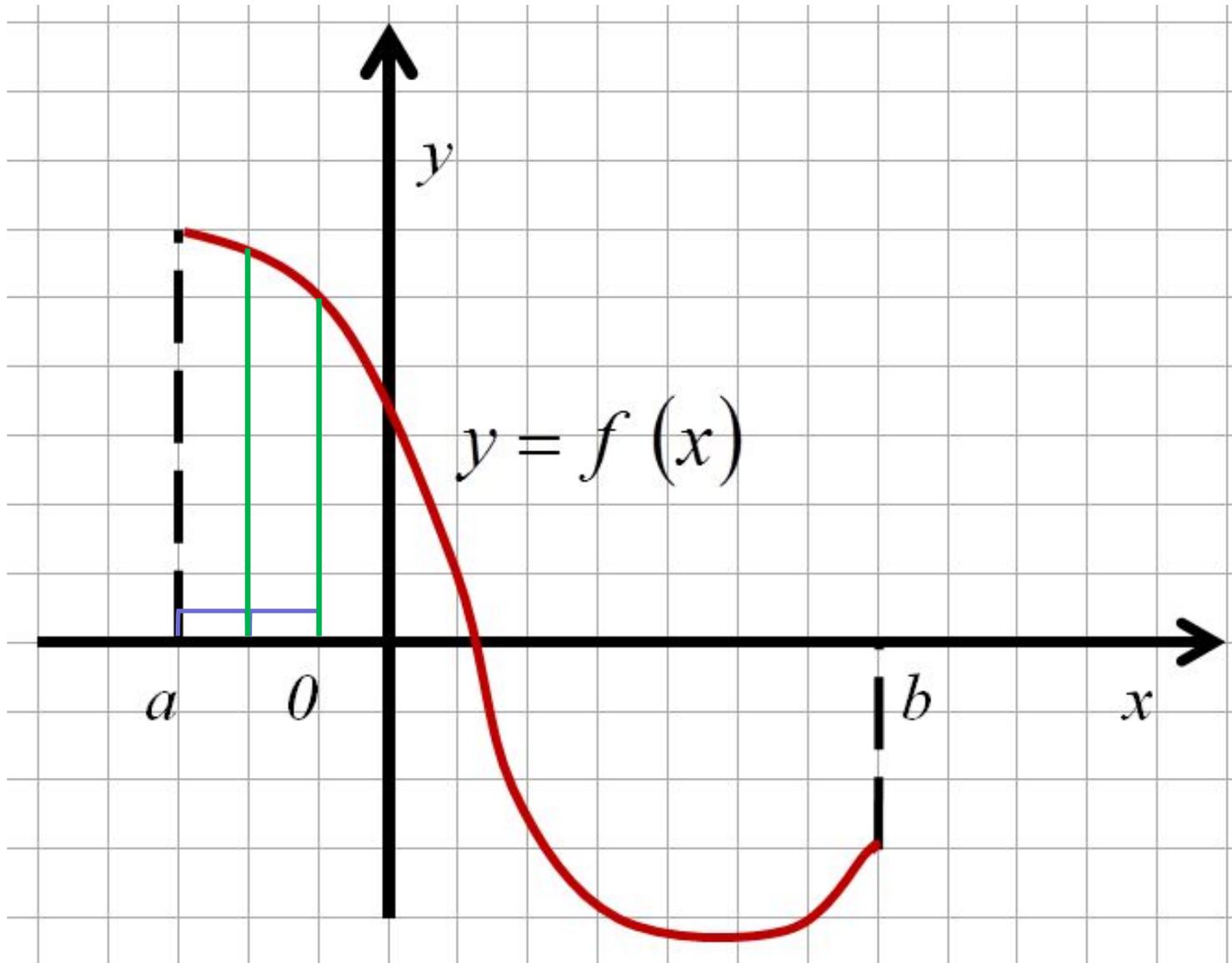
Перебор с заданным шагом



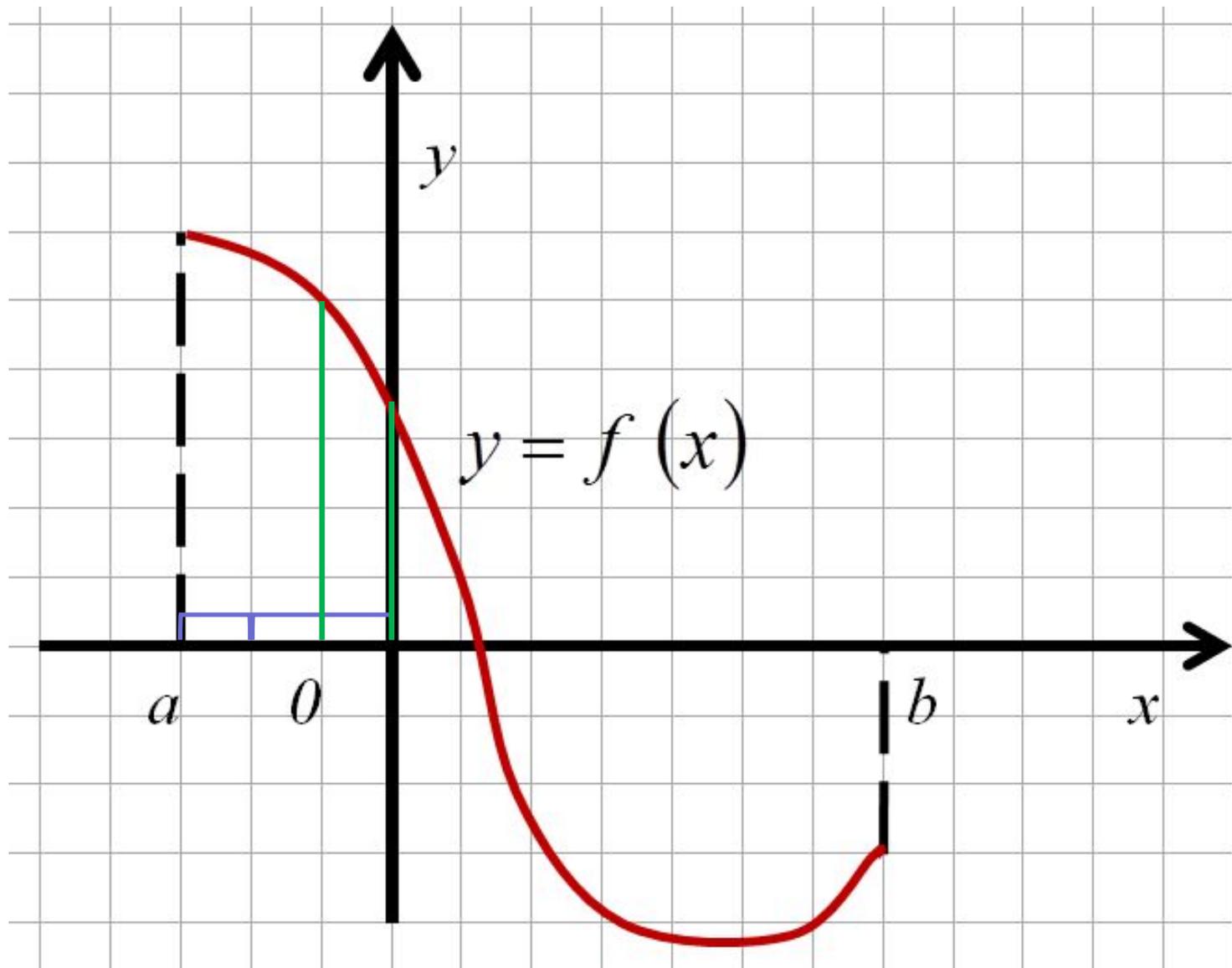
Перебор с заданным шагом



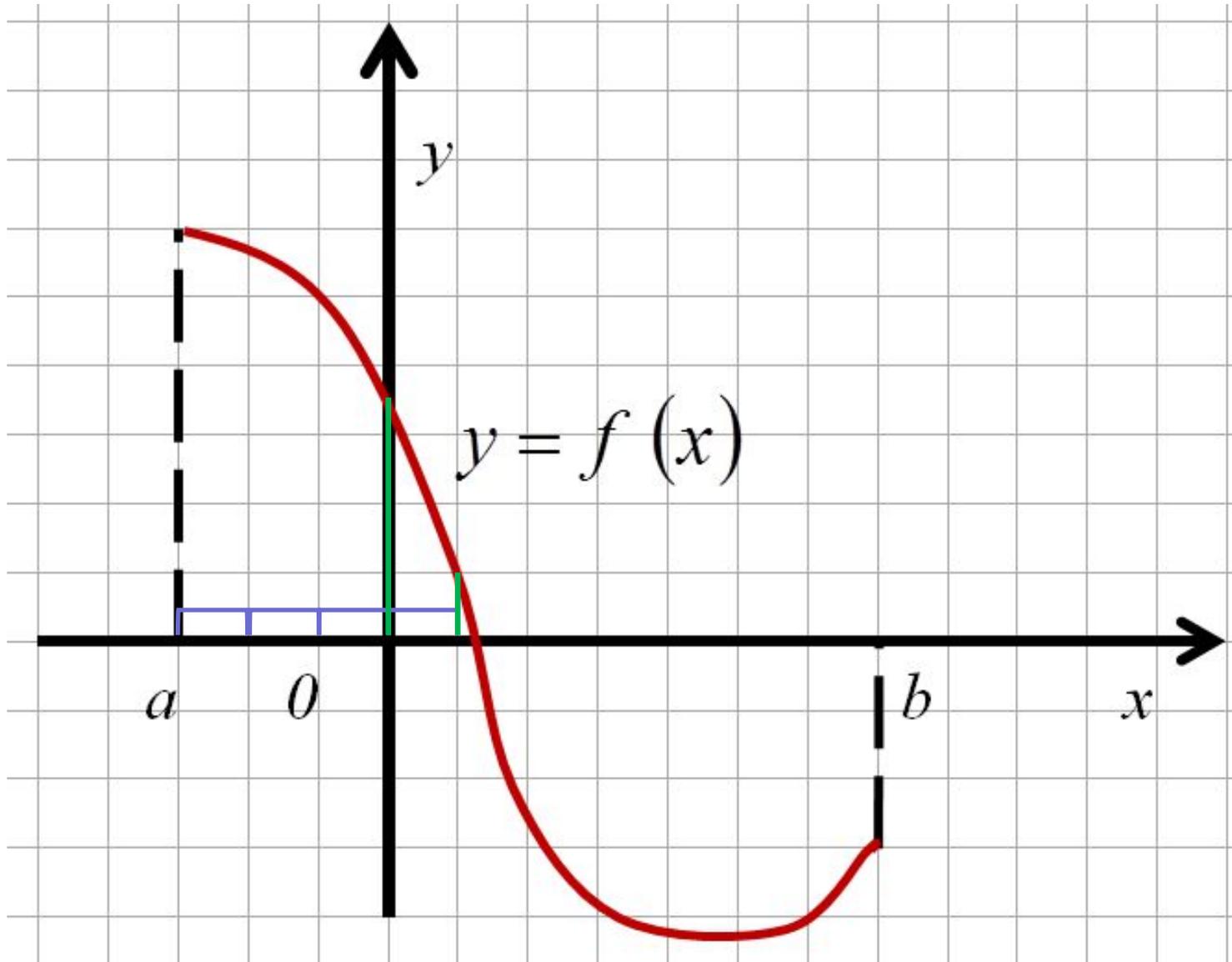
Перебор с заданным шагом



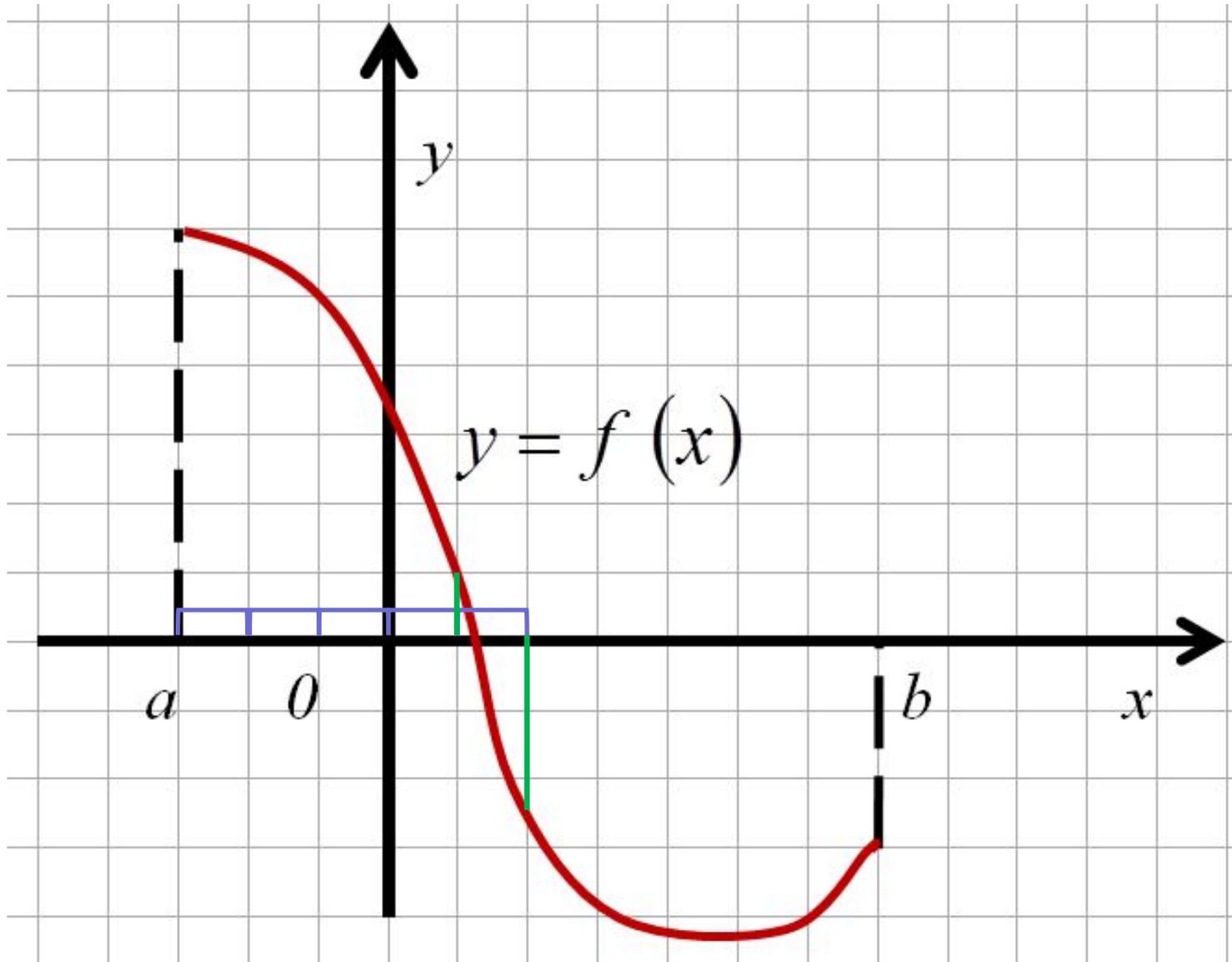
Перебор с заданным шагом



Перебор с заданным шагом



Перебор с заданным шагом

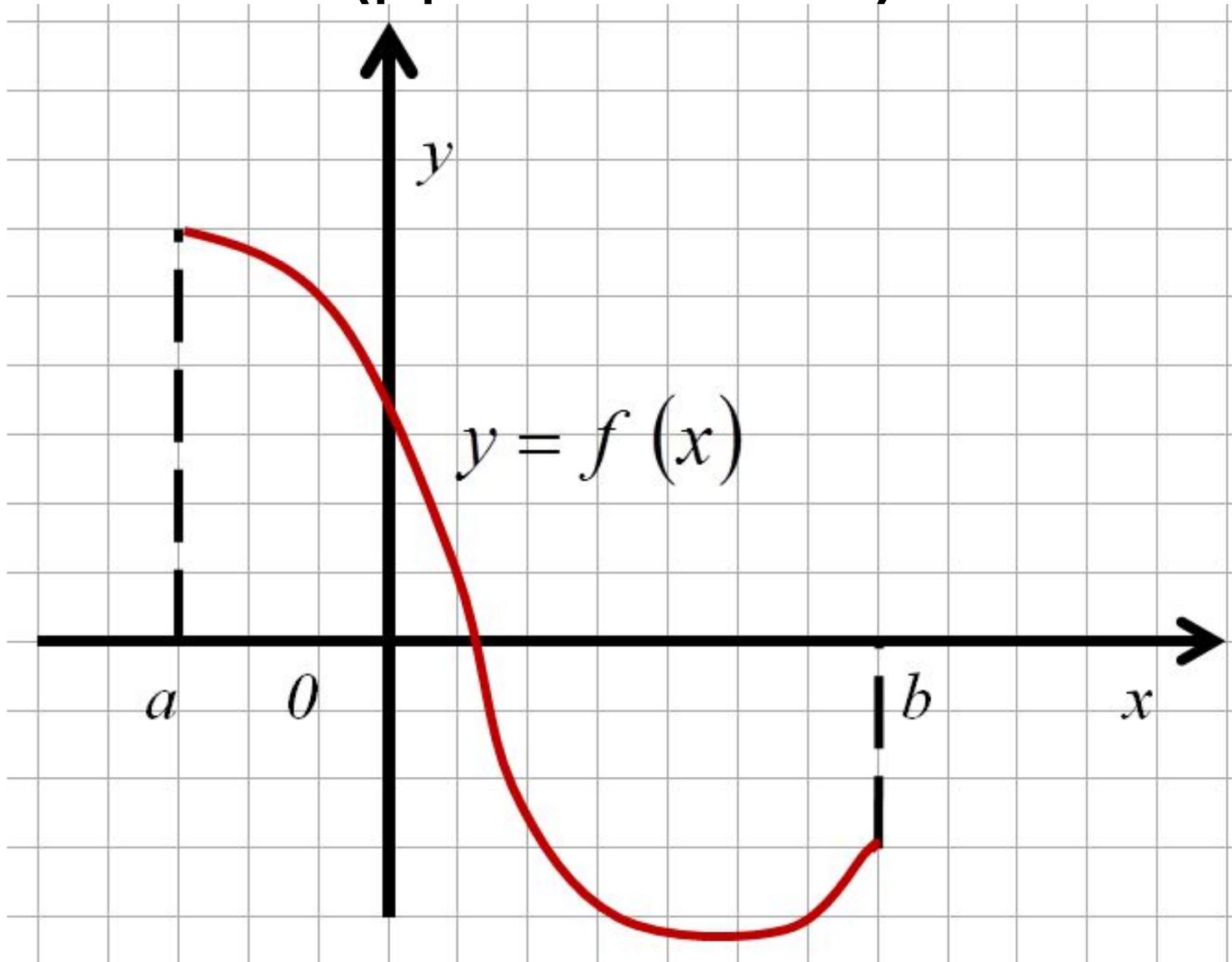


Уточнение корня на отрезке перебором с заданным шагом

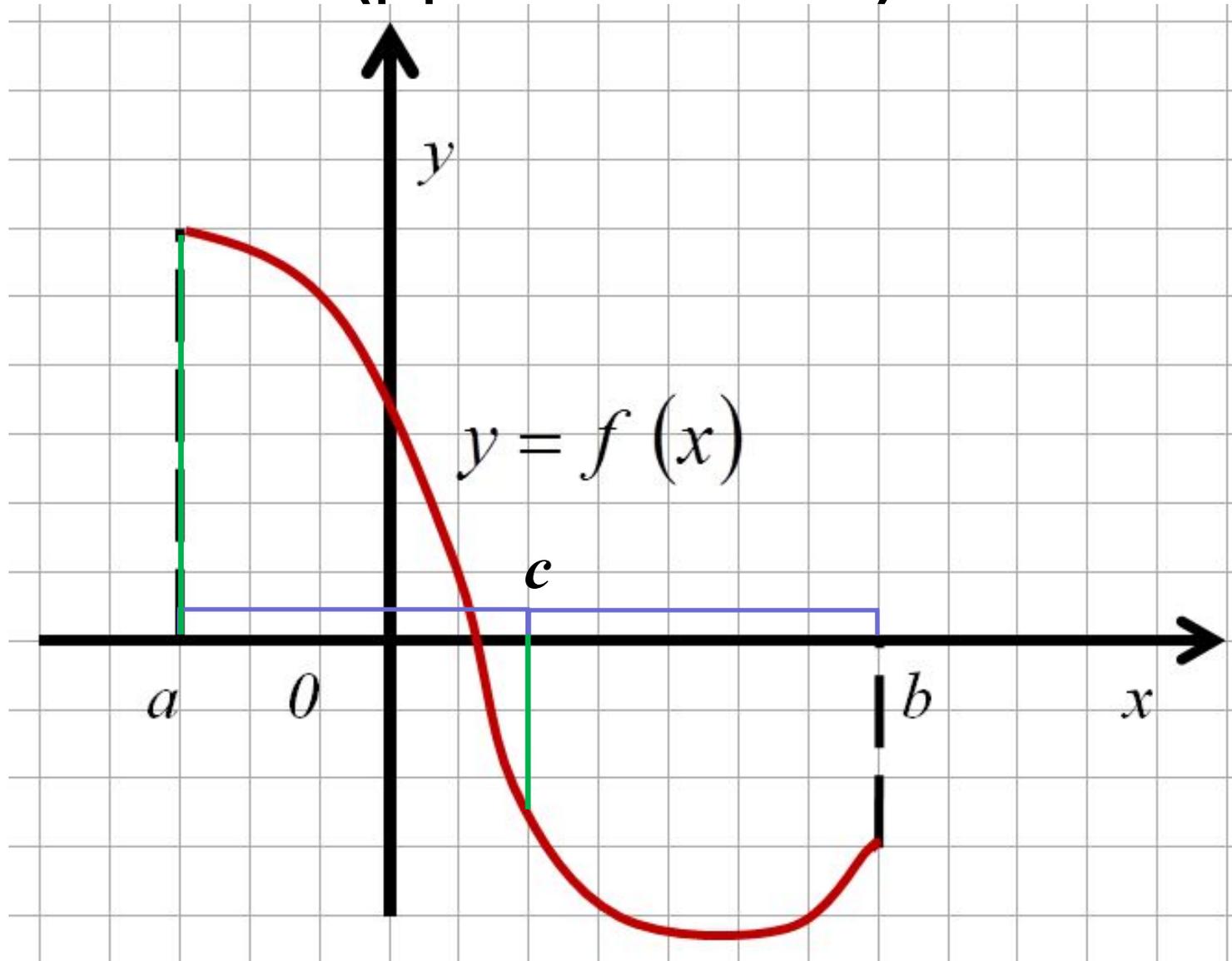
Покрываем отрезок $[a, b]$ отрезками длиной ε ($[a, a+\varepsilon]$, $[a+\varepsilon, a+2\varepsilon]$, $[a+2\varepsilon, a+3\varepsilon]$, ...) пока на концах этих отрезков значения функции одного знака.

Находим отрезок длины ε , на концах которого значения функции разного знака. Любая внутренняя точка этого отрезка отличается от корня уравнения $f(x) = 0$ на число, меньшее ε , и может являться приближенным решением с заданной степенью точности.

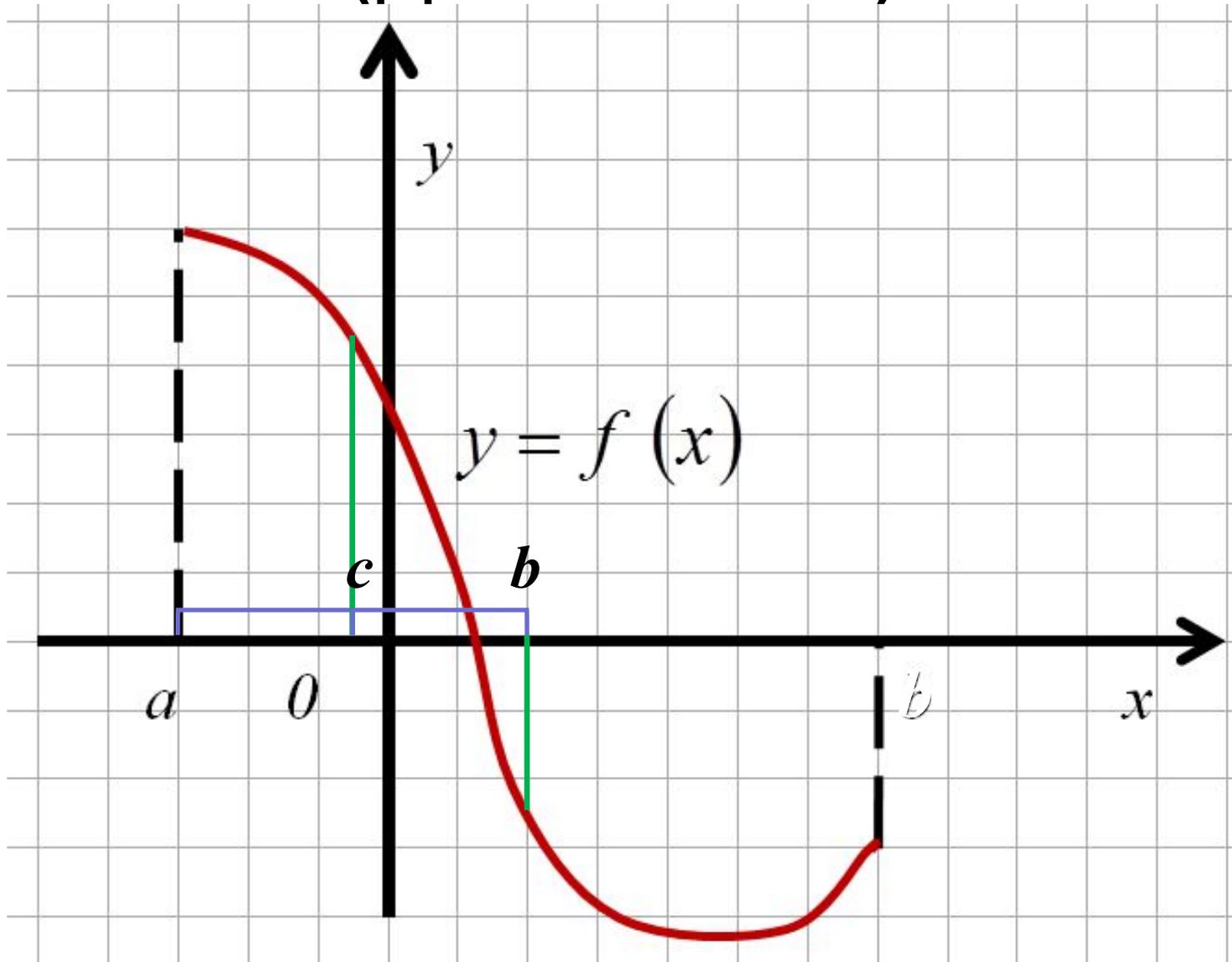
Метод половинного деления (дихотомии)



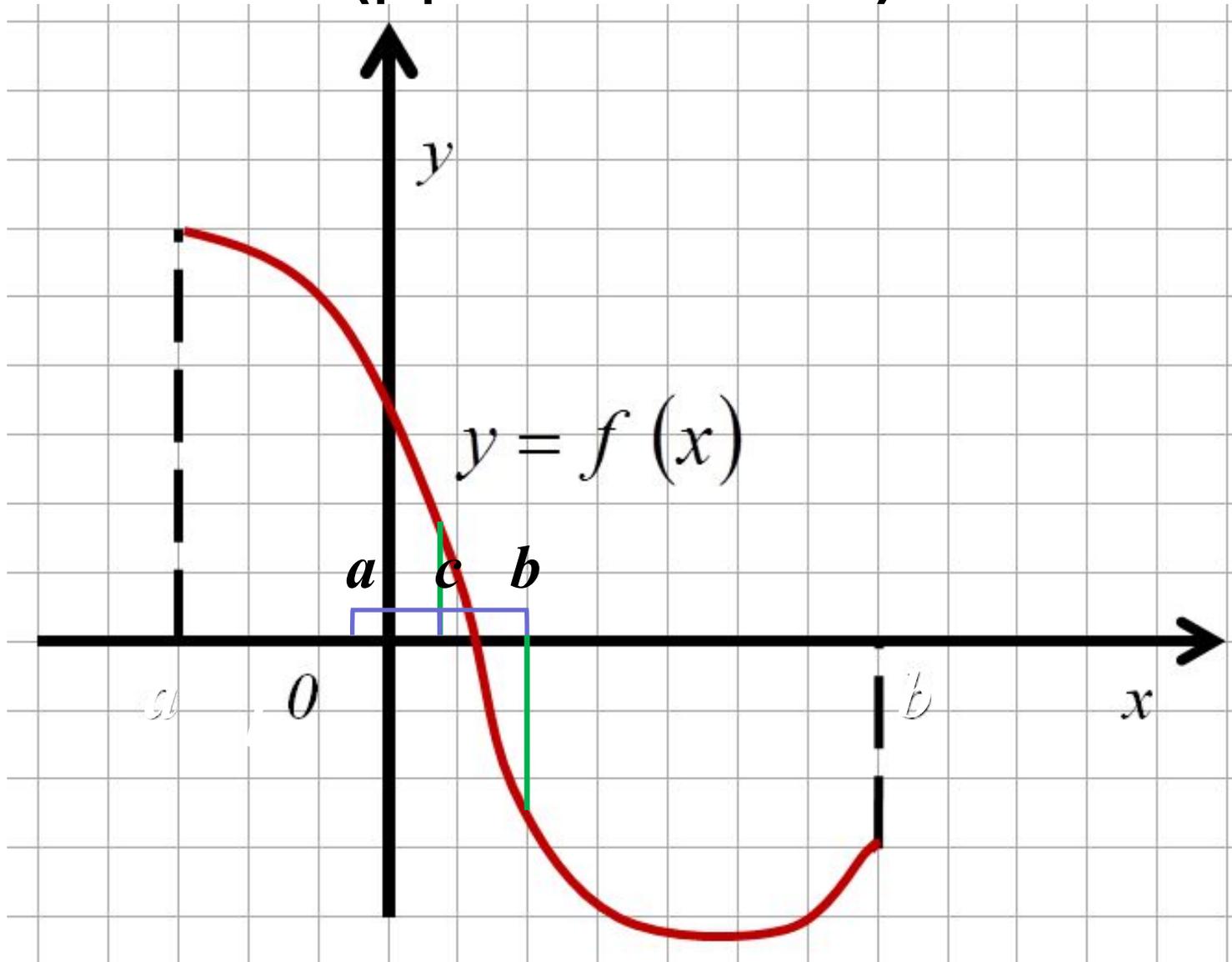
Метод половинного деления (дихотомии)



Метод половинного деления (дихотомии)



Метод половинного деления (дихотомии)



Уточнение корня на отрезке МЕТОДОМ ДИХОТОМИИ

Пока длина отрезка $[a, b]$ больше ε , делим отрезок пополам и в качестве нового отрезка выбираем ту половину, на концах которой функция принимает значения разного знака. Находим отрезок длины не более ε , на концах которого значения функции разного знака. Любая внутренняя точка этого отрезка отличается от корня уравнения $f(x) = 0$ на число, меньшее ε , и может являться приближенным решением с заданной степенью точности.

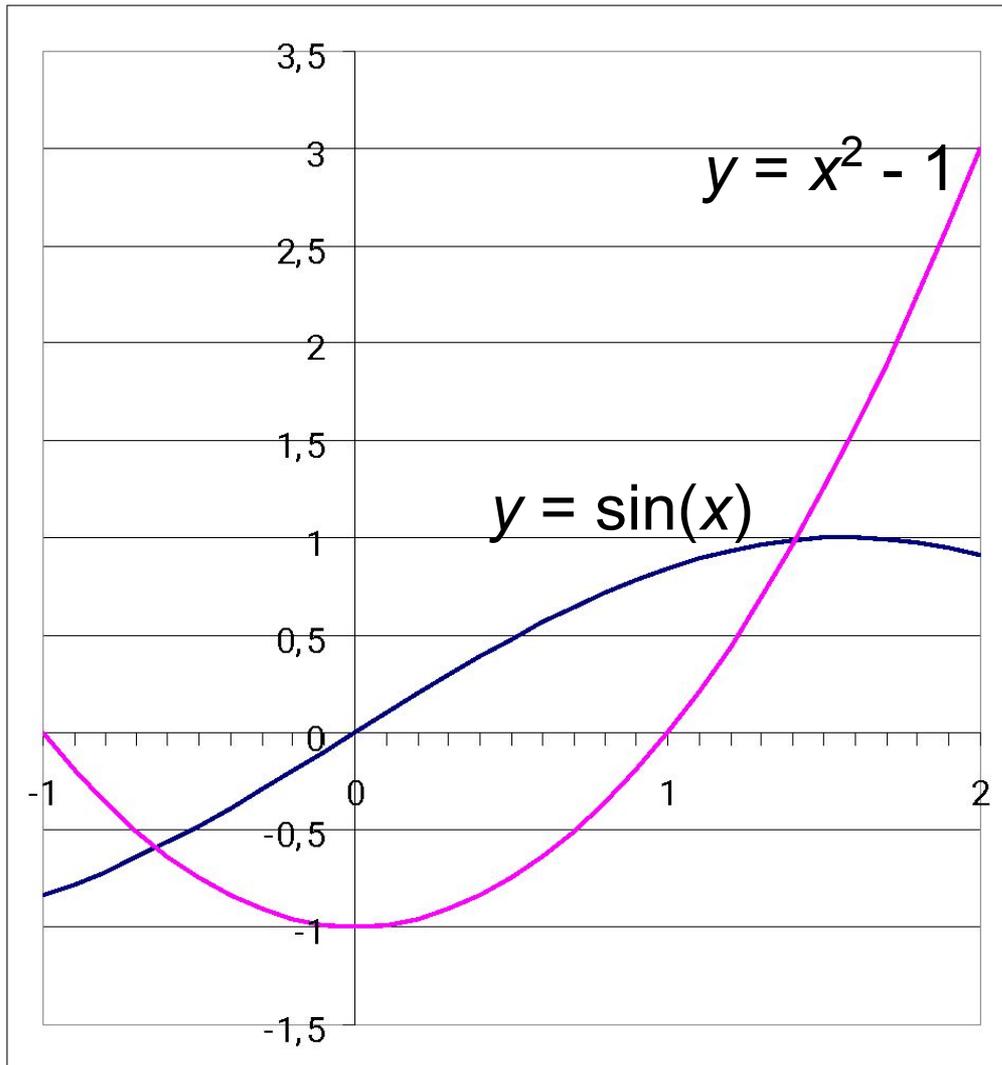
Найдите корни уравнения

$$\sin x = x^2 - 1$$

с заданной степенью точности

$$\varepsilon = 0,001$$

Отделение корней



Графически найдем отрезки, внутри каждого из которых содержится ровно один корень. На отрезке $[-1, 0]$ уточним корень методом перебора. На отрезке $[1, 2]$ – методом половинного деления.

Метод перебора

```
program ex;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin f:=sqr(x)-1-sin(x)
end;
var y,x,a,b,c,eps,dx:real; n:integer;
begin
  clrscr; a:= -1;eps:=0.001;n:=0;
  while f(a)*f(a+eps)>0 do
  begin a:=a+eps; n:=n+1;
  end;
  c:=a+eps/2;
  writeln('Метод перебора');
  writeln('при x=',c:0:12,' f(x)=',f(c):0:12); write(n,' шагов'); readkey;
end.
```

Метод перебора

C:\FPC\2.2.0\bin\i386-win32\fp.exe

```
Метод перебора  
при  $x = -0.636500000000$   $f(x) = -0.000483295877$   
363 шагов
```

Метод дихотомии

```
program ex;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin f:=sqr(x)-1-sin(x)
end;
var y,x,a,b,c,eps,dx:real; n:integer;
begin
  clrscr;
  a:=1;b:=2;eps:=0.001;n:=0;
  while (b-a>=eps) do
  begin
    inc(n); c:=(a+b)/2; if f(a)*f(c)<0 then b:=c else a:=c;
  end;
  c:=(a+b)/2; writeln('Метод половинного деления');
  writeln('при x=',c:0:12,' f(x)=',f(c):0:12);
  write(n,' шагов'); readkey;
end.
```

Метод дихотомии

C:\FPC\2.2.0\bin\i386-win32\fp.exe

Метод половинного деления
при $x=1.409667968750$ $f(x)=0.000116895151$
10 шагов

Способ итерации

Способ итерации

Для применения способа итерации, получившего свое название от латинского слова *iteratio* – повторение, требуется предварительное преобразование данного уравнения

$$(*) f(x) = 0$$

к виду

$$(**) x = \varphi(x)$$

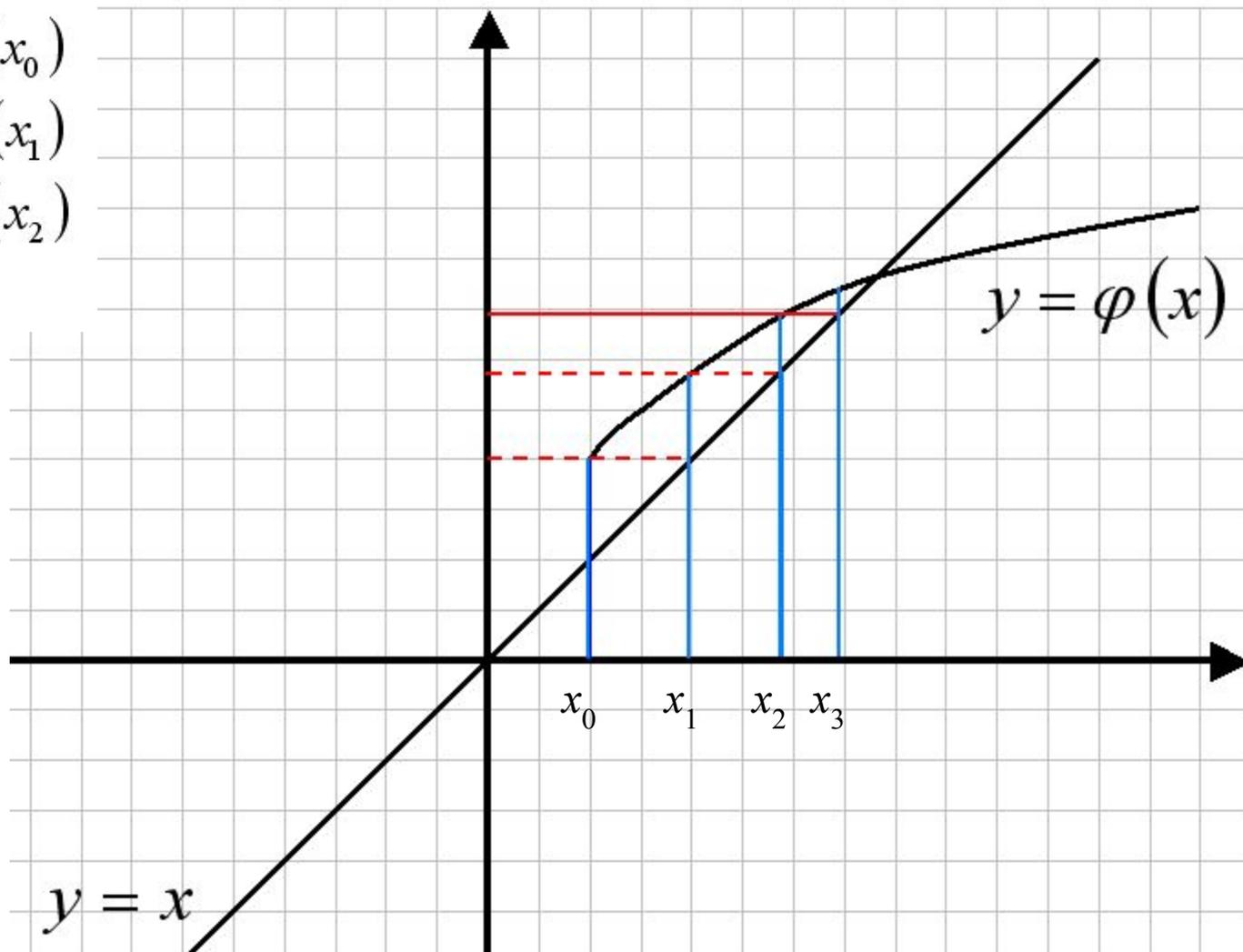
Способ итерации

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

$$x_3 = \varphi(x_2)$$

...



Условие применимости

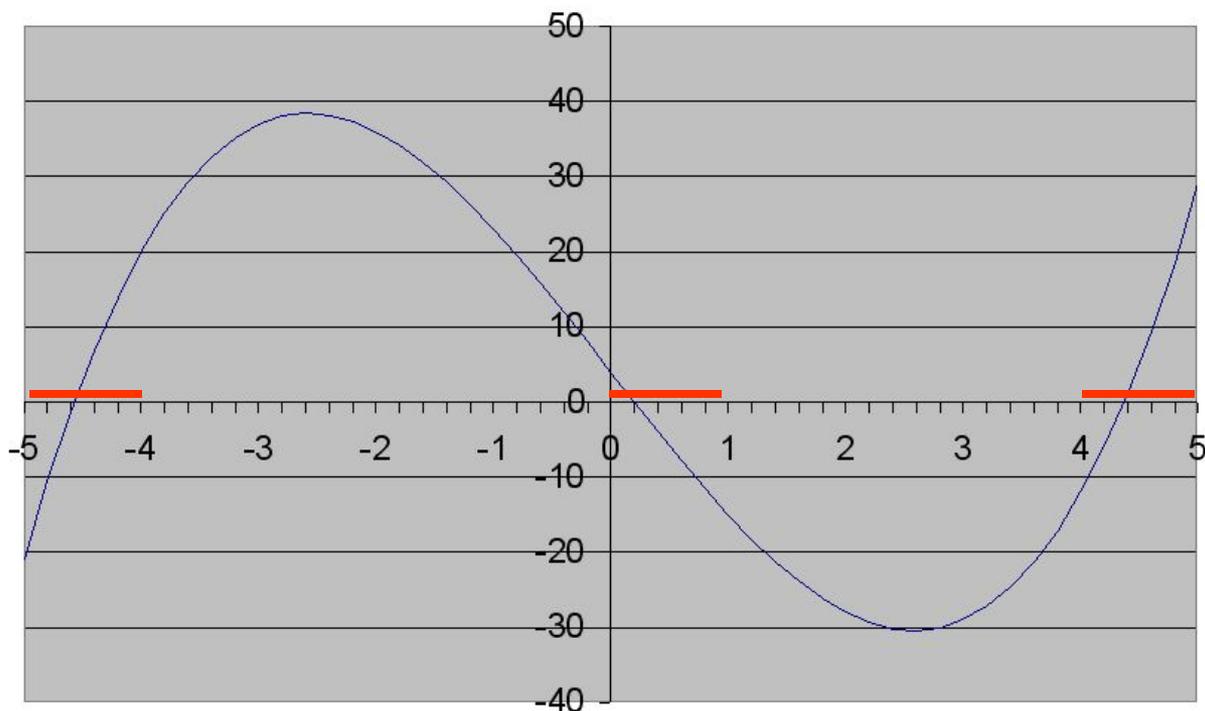
Теорема

Если в некотором интервале,
содержащем корень уравнения (*),
следовательно и уравнения (**),
выполняется условие $|\varphi'(x)| < 1$
то последовательность $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$
сходится к корню уравнения.

Пример

Решить уравнение $x^3 - 20x + 4 = 0$

Графическим способом отделим корни



Пример

Решить уравнение $x^3 - 20x + 4 = 0$

Преобразовать к виду (**) можно разными способами

$$x = \frac{1}{20}(x^3 + 4)$$

$$x = x + (x^3 - 20x + 4)$$

$$x = \sqrt[3]{20x - 4}$$

Пример

Второй способ непригоден ни на одном из интервалов, так как $(x + (x^3 - 20x + 4))' = 3x^2 - 19$ не удовлетворяет условию теоремы.

Первый способ применим для интервала $(0, 1)$, так как значения

$$\left(\frac{1}{20} (x^3 + 4) \right)' = \frac{3x^2}{20}$$

лежат в пределах от 0 до 0,15

Пример

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \varphi(0) = \frac{1}{20}(0^3 + 4) = 0,2$$

$$x_2 = \varphi(0,2) = \frac{1}{20}(0,2^3 + 4) = 0,2004$$

$$x_3 = \varphi(0,2004) = \frac{1}{20}(0,2004^3 + 4) = 0,2004024048032 \approx 0,2004$$

На интервалах $(-5, -4)$ и $(4, 5)$ первый способ не применим, зато примерим третий!

Пример

Третий способ пригоден на интервалах $(-5, -4)$ и $(4, 5)$, так как

$$\left(\sqrt[3]{20x-4}\right)' = \frac{1}{3}(20x-4)^{-\frac{2}{3}}(20x-4)' = \frac{20}{3\sqrt[3]{(20x-4)^2}}$$

удовлетворяет условию теоремы

Пример

$$x_0 = -5$$

$$x_1 = \varphi(-5) = \sqrt[3]{-104} \approx -4,7026693754415149790000326799138$$

$$x_2 = \varphi(-4,7026693754415149790000326799138) =$$

$$= \sqrt[3]{-98,053387508830299580000653598277} \approx -4,6112733499673779077757598210156$$

$$x_3 = \varphi(-4,6112733499673779077757598210156) \approx -4,5824388242849404722532746218671$$

$$x_4 = \varphi(-4,5824388242849404722532746218671) \approx -4,5732661109174512972532097096376$$

$$x_5 = \varphi(-4,5732661109174512972532097096376) \approx -4,5703403995184202394997248934585$$

$$x_6 = \varphi(-4,5703403995184202394997248934585) \approx -4,5694064317637106181234157543886$$

$$x_7 = \varphi(-4,5694064317637106181234157543886) \approx -4,5691082030940513443669748572388$$

$$x_8 = \varphi(-4,5691082030940513443669748572388) \approx -4,5690129664027816707152908025593$$