

Тема: Основные понятия теории множеств

Множество – совокупность объектов (элементов), объединенных по некоторому признаку. В зависимости от числа элементов множества различают как конечные или бесконечные. Множество, не содержащее элементов, называют пустым ($\emptyset$).

Говоря о множестве X , полагают, что для объекта имеются 2 возможности: или он является его элементом ($x \in X$); или нет ($x \notin X$).

Способы задания множества:

1) перечисление всех элементов множества

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\};$$

2) указание общего свойства, которым обладают все элементы множества

$$A = \{a \mid B(a)\}.$$

Например, множество четных натуральных чисел

1) $X = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ или

2) $X = \{x \mid x = 2 \cdot n \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}\}.$

N - множество натуральных чисел

$\{1, 2, 3, \dots\}$

Z - множество целых чисел $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

Q - множество рациональных чисел;

$\{\dots, -\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, \dots\}$

R - множество действительных чисел

$(-\infty, \infty)$

Операции над множествами

Множество A называют подмножеством множества B ($A \subset B$), если каждый элемент A является также элементом множества B .

Множество всех студентов факультета, подмножество – студенты ОЗО.

Множества A и B называют равными ($A = B$), если каждый элемент множества A является одновременно элементом B и наоборот, т.е. если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество I называется универсальным для некоторой системы множеств, если каждое множество системы является подмножеством I ,
т.е. $A \subset I, B \subset I, C \subset I \dots$

Дополнением множества A (обозначают $\bar{A}$) называют множество, состоящее из тех элементов универсального множества, которые не входят в множество A .

Суммой (объединением) двух множеств A и B ($A + B$ или $A \cup B$) называется множество C , состоящее из тех элементов, которые принадлежат **или** множеству A , **или** B , **или** A и B одновременно.

Произведением (пересечением) двух множеств A и B ($A \cdot B$ или $A \cap B$) наз. множество C , состоящее только из тех элементов, которые принадлежат множествам A **и** B одновременно.

Разностью двух множеств A и B ($A - B$ или $A \setminus B$)

наз. множество тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B .

Непересекающиеся множества $A \cap B = \emptyset$.

Мощностью (длиной, размерностью) множества называют число его элементов.

Прямым (декартовым) произведением $A \times B$ множеств A и B называют множество, содержащее все пары элементов, в которых на первом месте стоит элемент из A , на втором - элемент из B .

(Рене Декарт, трактат *Рассуждение о методе*, 1637г.).

Пример. Заданы множества: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 2, 4, 5\}$. Найти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$; $B \times A$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ и их мощность.

Решение: Множества A и B состоят из пяти и четырёх элементов, соответственно их мощность: $|A| = 5$, $|B| = 4$.

Объединение ($\cup$) множеств состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A , и множеству B

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$ и $|A \cup B| = 7$.

Пересечение ($\cap$) множеств состоит только из общих для обоих множеств элементов:

$$A \cap B = \{0, 2\}, |A \cap B| = 2.$$

Разность множеств A и B состоит из элементов A , которые не принадлежат множеству B :

$$A \setminus B = A - B = \{-2, -1, 1\}; |A \setminus B| = 3.$$

$$\text{Аналогично } B \setminus A = B - A = \{4, 5\}; |B \setminus A| = 2.$$

Прямое (декартово) произведение:

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (-2, 0); (-2, 2); (-2, 4); (-2, 5); (-1, 0); \\ & (-1, 2); (-1, 4); (-1, 5); (0, 0); (0, 2); (0, 4); (0, 5); \\ & (1, 0); (1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 0); (2, 2); (2, 4); (2, 5) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A = \{ & (0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, -2); \\ & (2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (4, -2); (4, -1); (4, 0); \\ & (4, 1); (4, 2); (5, -2); (5, -1); (5, 0); (5, 1); (5, 2) \}. \end{aligned}$$

Из примера видно, что $A \times B \neq B \times A$, но при этом

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B| = 5 \times 4 = 20.$$

Пример.

Заданы множества $A = \{2; 6; -6\}$; $B = \{4; -4\}$,
тогда декартовым произведением множеств $A \times B$
является...

Варианты ответов:

1. $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4),$ $(-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$	2. $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$
3. $\{\emptyset\}$	4. $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4),$ $(6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$

Ответ: пункт № 4.

Пример:

Если бинарное отношение задано неравенством:

$$x + 3y \leq 0, \text{ то данному отношению}$$

принадлежит следующая пара действительных чисел ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) $(-1, 1)$ 2) $(0, 0)$ 3) $(1, 3)$ 4) $(2, 2)$

Ответ: пункт № 2.

Пример:

Заданы множества $C = \{1; 2; 3; 4\}$ и $D = \{1; 2; 3\}$.

Верными для них являются утверждения...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) «Множество D есть подмножество множества C »
- 2) «Множества C и D не равны»
- 3) «Множество C есть подмножество множества D »
- 4) «Множество C конечно»
- 5) «Множество D конечно»

Ответ: верны все утверждения, кроме пункта № 3.

Пример:

Если A есть множество **нечетных** натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, то количество элементов множества $A \cap B$ равно ...

Ответ: $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ – четыре элемента.

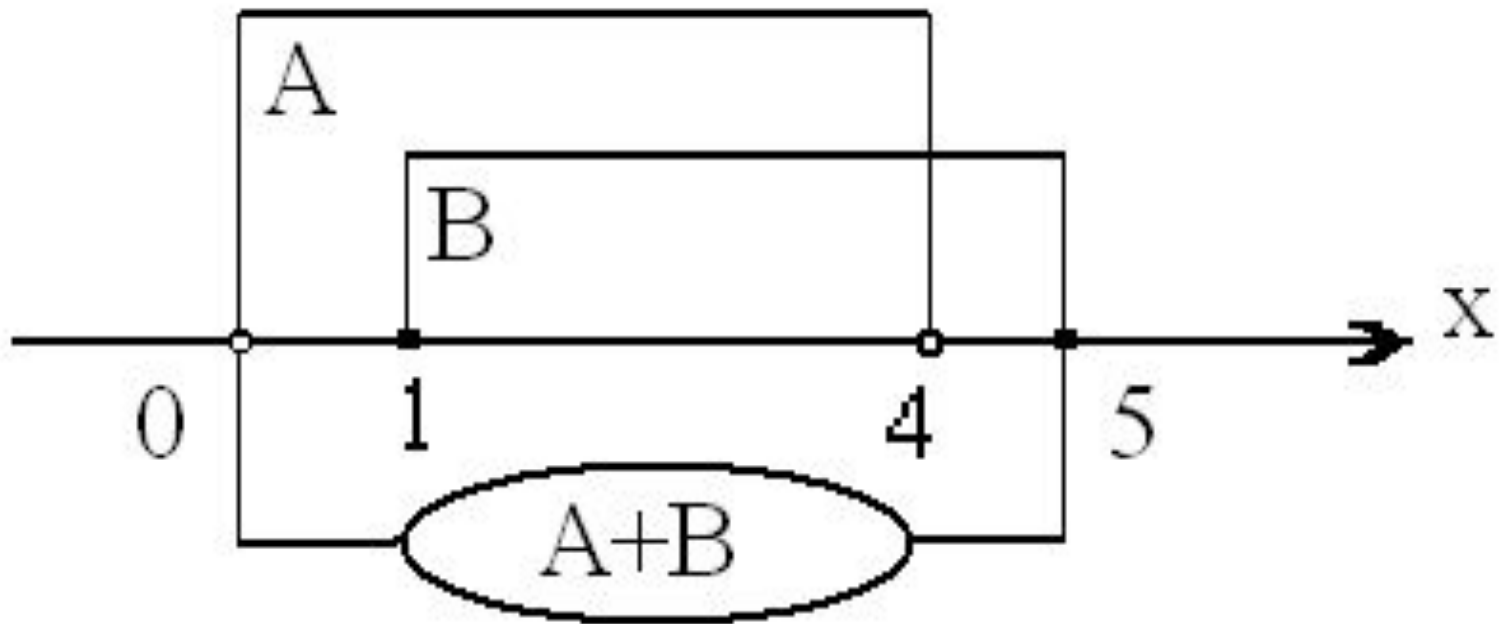
Пример.

Даны числовые множества $A = (0; 4)$ и $B = [1; 5]$.

Найти $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$ и дополнения данных множеств.

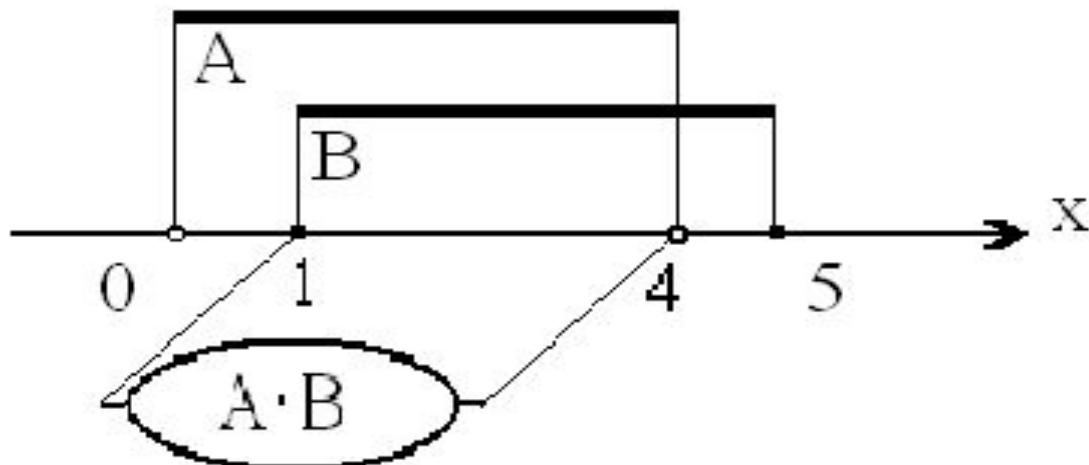
Решение.

На числовой оси рассмотрим сумму $A + B$:

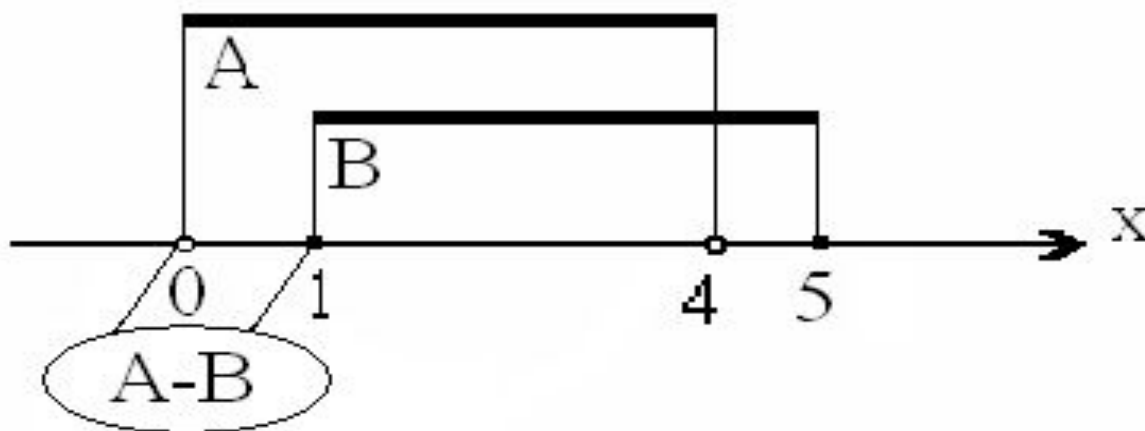


Ответ. Сумма $A + B = (0; 5]$.

Аналогично рассмотрим произведение $A \cdot B$ и разность $A - B$:



Ответ. Произведение $A \cdot B = [1; 4)$.



Ответ. Разность $A - B = (0, 1)$.

Найдем дополнение множества A :



Ответ. Дополнение множества A : $\overline{A} = (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Найдем дополнение множества B :



Ответ. Дополнение множества B : $\overline{B} = (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$.

Пример:

Пусть $M_1 = \{a; b; c; d\}$; $M_2 = \{e; f; g\}$;

$M_3 = \{a; b; c; d; e; f; g\}$.

Тогда множество M_1 равно...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $M_1 \cap M_2$

2) $M_3 \setminus M_2$

3) $M_2 \cap M_3$

4) $M_2 \setminus M_3$

Ответ: пункт № 2.

Пример:(выбрать варианты согласно указанной последовательности)

Заданы произвольные множества **A, B, C**.

Расположите указанные данные множества так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.

1) **A U B**

2) **A U B U C**

3) **A $\cap$ B**

4) **A**

Ответ: 3), 4), 1), 2).

Задание №1 (выбрать один вариант ответов)

Заданы множества $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Верным для них будет утверждение ...

- 1) «Множества A и B равны »
- 2) «Множество A есть подмножество множества B »
- 3) «Множества A и B не имеют общих элементов»
- 4) «Множество A включает в себя множество B »

Ответ: пункт № 2

Задание №2 (выбрать варианты согласно
указанной последовательности)

Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и
 $B = \{d, e, f, k, m, n\}$. Установить соответствие
между обозначениями множеств и самими
множествами.

1. $A \cap B$ 2. $A \cup B$ 3. $A \setminus B$ 4. $B \setminus A$

Варианты ответов

A) $\{a, b, c, d, e, f, k, m, n\}$

B) $\{k, m, n\}$

C) $\{d, e, f\}$

D) $\{a, b, c\}$

Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n , то говорят, что задана *последовательность* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_n\}$.

x_1 — 1-ый элемент, x_2 — 2-ой, ..., x_n — n -ый член последовательности.

Чаще последовательность задается формулой общего элемента, которая позволяет вычислить любой член последовательности по номеру.

$$x_n = f(n)$$

Так, равенства

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2 + 1, \dots\}$$

$$z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\}$$

$$y_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

$$a_n = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\}$$

- **Арифметические операции над числовыми последовательностями.**

Пусть даны последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Их суммой будет последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$; разностью $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n$; произведением $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \dots, x_n \times y_n$; частным $\frac{x_n}{y_n}$.

Число a называется пределом данной

последовательности $\{a_n\}$, если для

любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что для
всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ выполняется

неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ или

или $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Последовательность, у

которой существует предел, называется

сходящейся. Последовательность, не являющаяся

сходящейся - расходящаяся. Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$

равносильно $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $a_n \leq a$ для всех $n=1, 2, \dots$, то говорят,

что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a

слева, или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a - 0$

соответственно если $a_n \geq a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a + 0$ - предел
справа.

Последовательность $\{x_n\}$ называют бесконечно

большой, если для любого числа ε существует

такой номер n_ε , что для всех $n \geq n_\varepsilon$ выполняется

неравенство $|x_n| > \varepsilon$, то есть

(последовательность имеет бесконечный предел)

Числовая последовательность может иметь только один предел, конечный или бесконечный определённого знака.

Последовательность b_k , $k = 1, 2, \dots$, называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если для любого k существует такое натуральное число n_k , что $b_k = a_{n_k}$, причем, $n_{k_1} < n_{k_2}$, только тогда, когда $k_1 < k_2$ (то есть, порядок следования элементов в подпоследовательности такой же, как

Следует различать последовательность $\{a_n\}$, то есть множество элементов a_n и множество значений ее элементов. Первое множество всегда бесконечно, а второе состоит из всех чисел, являющихся значениями элементов и может быть конечно. Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если множество значений ее элементов ограничено.

Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной. Если

Точная верхняя (нижняя) граница множества значений элементов последовательности $\{a_n\}$ называется верхней (нижней) границей данной последовательности и обозначается $\sup_{n=1,2,\dots} a_n$ $\{a_n\}$, или $\inf_{n=1,2,\dots} a_n$ (или $\inf \{a_n\}$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для каждого $n=1, 2, \dots$ выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно, неравенство $x_n \geq x_{n+1}$).

Возрастающие и убывающие последовательности

Всякая возрастающая (убывающая)

последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, конечный,

если она ограничена сверху (снизу), и

бесконечный, равный $+\infty$ ($-\infty$), если она не

ограничена сверху (снизу), причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}$$

(соответственно)

Из любой ограниченной последовательности
можно выделить сходящуюся
подпоследовательность, а из любой
неограниченной последовательности можно
выделить бесконечно большую
подпоследовательность, имеющую своим
пределом бесконечность определенного знака.

• Арифметические операции над числовыми

1. Если $x_n \in \mathbb{R}, y_n \in \mathbb{R}, z_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$

Пусть даны последовательности $x_n \in \mathbb{R}, y_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a_2$

2. Если $x_n \leq y_n, x_n \in \mathbb{R}, y_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

Их суммой будет последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$; разностью $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n$;

произведением $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \dots, x_n \times y_n$;

частным $\frac{x_n}{y_n}$.

- **Арифметические операции над числовыми последовательностями.**

Пусть даны последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Их суммой будет последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$; разностью $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n$;

произведением $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \dots, x_n \times y_n$;

частным $\frac{x_n}{y_n}$.

Матрицы. Операции над матрицами.

Матрицей **m** × **n** называется прямоугольная таблица, состоящая из **m** строк и **n** столбцов. Числа таблицы называют элементами матрицы и обозначают a_{ij} , первый индекс - номер строки, а второй номер столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{(m \times n)},$$

$$i = 1, \boxtimes m, j = 1, \boxtimes n.$$

Элементы квадратной матрицы $\{1, 2, 0, 7\}$, образуют главную диагональ (——), а элементы $\{5, -1, 2, -5\}$ – побочную (——).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 10 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), - квадратная. Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (столбцов). Если $m \neq n$, то матрица прямоугольная.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой: $A = (-1; 0; 3; 6; 8)$.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом*.

Нулевой называется квадратная матрица, все элементы которой равны нулю.

Нулевая матрица 2-го порядка: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Единичная - квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, остальные – 0,

Единичная матрица 3-го порядка: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Если в матрице A все строки заменить столбцами, то полученная матрица называется транспонированной (A^T).

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица — квадратная матрица, все элементы которой, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & a_{22} & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Симметричной (симметрической) называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали.

Примеры

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, (2)$$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Равенство матриц

Две матрицы A и B равны между собой, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны, т.е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij} \ (i=1, 2, \dots, m; \ j=1, 2, \dots, n).$$

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинакового размера поэлементно

$$C = \{c_{ij}\}_{m \times n} \quad A = \{a_{ij}\}_{m \times n} \quad B = \{b_{ij}\}_{m \times n}$$

$$C = A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}_{m \times n}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 & 3+0 \\ 0+0 & 2-2 & 1+11 \\ 1+10 & 2+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 11 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу A на число α надо умножить на это число каждый элемент матрицы.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad . \text{ Найти } B = 3 \cdot A$$

$$B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЕ (*выберите вариант ответа*)

Если $A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ матрица $5A$ имеет вид...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ -40 & -30 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ 40 & 30 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -40 & -30 \end{pmatrix}$

Вычитание матриц

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-3 & 3-0 \\ 0-0 & 2+2 & 1-11 \\ 1-10 & 2-0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -10 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц

Умножать можно только те матрицы, для которых число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй матрице (!!!).

Произведением двух матриц A и B называется матрица C , у которой элемент C_{ij} находится по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, p$, т.е. элемент матрицы C_{ij} , стоящий на пересечении i – строки и j – столбца равен сумме произведений элементов i – строки матрицы A на соответствующие элементы j – столбца матрицы B .

В результате умножения матрицы A на матрицу B получится матрица C число строк , которой равно числу строк матрицы A , а число столбцов равно числу столбцов матрицы B .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 17 & 22 & 27 \end{pmatrix}$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы называются **перестановочными**.

Определители и их свойства

Определителем квадратной матрицы (детерминантом) называется число, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам. **Детерминант** (от лат. *determinans*, родительный падеж *determinantis* — определяющий) обозначается *det*.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Квадратная матрица первого порядка состоит из одного элемента, поэтому её определитель равен самому элементу $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{33} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{31} + \boxtimes$$

$$\boxtimes + \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{13} - \mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{13} - \boxtimes$$

$$\boxtimes - \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{33}$$

Схема вычисления определителя 3-го порядка
(правило треугольника французского математика
Саррюса).

рис. 1 (+).

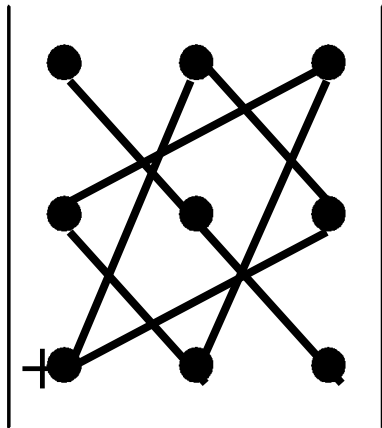
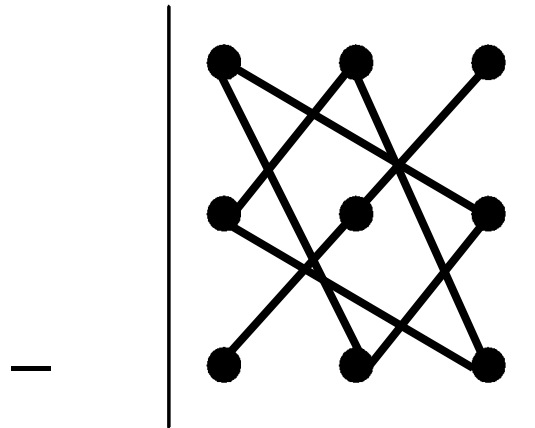


рис. 2. (-)



По схеме на рис. 1, произведение элементов
берется со знаком плюс, а по схеме рис. 2 – со
знаком минус (!!!).

Пример 1. Найдём определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Тогда по правилу треугольника получаем:

$$\det A = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 0 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -4.$$

Пример 2. Даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Найти: } C = 2 \cdot A + A \cdot B.$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим решение примера подробнее:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 8 \cdot 6 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 8 & 0 \cdot 0 + 8 \cdot 7 + 0 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 8 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 0 \\ 48 & 0 & 56 \\ 0 & 56 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = 2A + AB = \begin{pmatrix} 2 + 0 & 0 + 28 & 6 + 0 \\ 0 + 48 & 16 + 0 & 0 + 56 \\ 8 + 0 & 0 + 56 & 0 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 28 & 6 \\ 48 & 16 & 56 \\ 8 & 56 & 10 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

1. При транспонировании величина определителя не меняется. Строки и столбцы эквиваленты.
2. Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами - он меняет знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.
4. При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число α , определитель увеличивается в это же число раз.

5. Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0, то определитель равен 0.
6. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.

ЗАДАНИЕ (*выберите вариант ответа*)

Определитель $\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ равен 0 при $\alpha = \dots$

ВАРИАНТЫ:

- 1) – 4 2) 3
- 3) 0 4) 4

Произведение определителей.

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Найти $\det (AB)$.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$;

$$\det B = 15 - 2 = 13; \quad \det (AB) = \det A \cdot \det B = -26.$$

2-й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

$$\det (AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26.$$

Ранг матрицы - натуральное число равное наибольшему из порядков определителей отличных от нуля среди порожденных матрицей. Обозначение: $\text{Rang } A$ или **$r(A)$** .

Если $r(A) = k$, значит:

1. Существует определитель порядка $k \neq 0$;
2. Все определители порядка больше чем k ***равны 0***.

ЗАДАНИЕ. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен $r(A) = 1$. Тогда определитель матрицы ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|------------------|------------------|
| 1) $\det(A) = 5$ | 2) $\det(A) = 0$ |
| 3) $\det(A) = 1$ | 4) $\det(A) = 4$ |

Исследование систем линейных уравнений

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестным (1)

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 + ... + \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{x}_n = b_1 \\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 + ... + \boldsymbol{a}_{2n}\boldsymbol{x}_n = b_2 \\ \\ \boldsymbol{a}_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{n2}\boldsymbol{x}_2 + ... + \boldsymbol{a}_{nn}\boldsymbol{x}_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{11}, \dots, a_{mn}$ - коэффициенты системы

$x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные переменные

$b_1, \dots, b_m$ - свободные члены (правая часть системы)

Решениями системы являются **n** чисел, которые при подстановке в (1) превращают уравнение в тождество.

Система лин. уравнений наз. *однородной*, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), иначе — *неоднородной*; *квадратной*, если число **m** уравнений равно числу **n** неизвестных ($m = n$).

Система, имеющая решения называется *совместной*, не имеющая - *несовместной*.

Система называется *определенной*, если она имеет только одно (!) решение и *неопределенной*, если более одного.

Для системы (1) матрица коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица системы

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Обозначим: $A = (\bar{a}_{ij})_{m \times n}$ матрица системы,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$ - матрица свободных членов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix}_{n \times 1}$ - матрица неизвестных.

Тогда, по правилу умножения матриц, система (1) записывается в матричном виде:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

ЗАДАНИЕ (*выберите вариант ответа*)

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Тогда матричная форма записи имеет вид ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3) = (-1 \ 0 \ 4)$$

3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .