

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ



Устная работа



1) Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = n^2$.
Какой номер имеет член этой последовательности,
если он равен 144? 225? 100?

$$144 = 12^2 = x_{12} \quad 225 = x_{15}, \quad 100 = x_{10}$$

Являются ли членами этой последовательности числа
48? 49? 168?

**48 и 168 не являются членами последовательности,
49 – является.**

Устная работа



2) О последовательности (x_n) известно, что $x_1=2$,
 $x_{n+1}=3x_n+1$.

Как называется такой способ задания последовательности? **Рекуррентный способ.**

Найдите первые четыре члена этой последовательности.

$$x_1=2$$

$$x_2=3x_1+1=7$$

$$x_3=3x_2+1=22$$

$$x_4=3x_3+1=67$$

Устная работа



3) О последовательности (a_n) известно, что

$$a_n = (n-1)(n+4)$$

Как называется такой способ задания последовательности? **Формулой n -ого члена.**

Найдите n , если $a_n = 150$.

Заметим, что в формуле n -ого члена множители отличаются друг от друга на 5.

$$150 = (n-1)(n+4)$$

$$150 = 10 \cdot 15$$

$$n = 11$$

Установите закономерности в последовательностях



2, 6, 10, 14, 18, 22, 26

11, 8, 5, 2, -1, -4, -7

5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

Найдите для каждой последовательности
следующие два члена.

Этимологический словарь



Термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (progressio), что означает «движение вперед» и был введен римским автором Боэцием (VI в.).



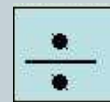
Боэций (слева) на фреске Рафаэля «Афинская школа»

Арифметическая прогрессия



Опр. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

Обозначение арифметической прогрессии



(a_n) - арифметическая прогрессия,

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

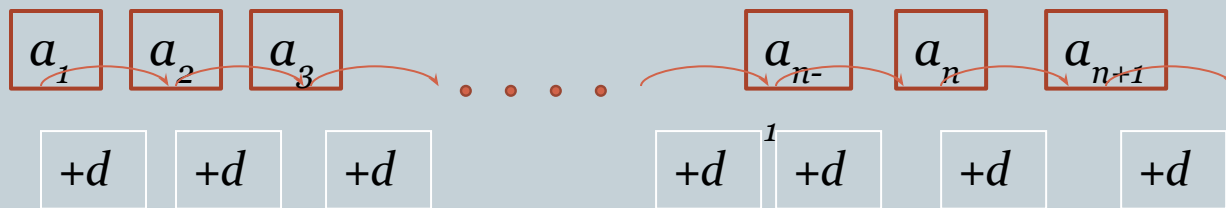
где d -некоторое число.

Разность арифметической прогрессии



- Опр. Разность арифметической прогрессии – это число, которое показывает, на сколько следующий член прогрессии отличается от предыдущего. Обозначается d .

$$d = a_{n+1} - a_n$$



Свойства прогрессии



2, 6, 10, 14, 18, ... $d = 4$, $a_{n+1} > a_n$

11, 8, 5, 2, -1, $d = -3$, $a_{n+1} < a_n$

5, 5, 5, 5, 5, $d = 0$, $a_{n+1} = a_n$

- ❑ Если в арифметической прогрессии разность положительна ($d > 0$), то прогрессия является возрастающей.
- ❑ Если в арифметической прогрессии разность отрицательна ($d < 0$), то прогрессия является убывающей.
- ❑ В случае , если разность равна нулю ($d = 0$) и все члены прогрессии равны одному и тому же числу, последовательность называется стационарной.

Задача

На складе 1 числа было 50 тонн угля. Каждый день в течение месяца на склад приходит машина с 3 тоннами угля. Сколько угля будет на складе 30 числа, если в течение этого времени уголь со склада не расходовался.

Решение: $a_1 = 50$, $d = 3$

1 числа: 50 т

2 числа: +1 машина (+3 т)

3 числа: +2 машины(+3·2 т)

.....

30 числа: +29 машин (+3·29 т)

$$a_{30} = a_1 + 29d$$

$$a_{30} = 137$$



Формула n-ого члена

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Пример 1



Последовательность (a_n) - арифметическая прогрессия.
Найдите a_{81} , если $a_1 = 20$ и $d = 3$.

Решение:

Воспользуемся формулой n -ого члена

$$a_{81} = a_1 + d(81 - 1),$$

$$a_{81} = 20 + 3 \cdot 80,$$

$$a_{81} = 260.$$

Ответ: 260.

Задача



В арифметической прогрессии четные члены оказались стёрты: 3, ..., 7, ..., 11...

Можно ли восстановить утраченные числа?

- Заметим, что $a_3 = a_1 + 2d$, $a_5 = a_3 + 2d$, $a_7 = a_5 + 2d$ и т.д.
Тогда $d = (a_{n+2} - a_n) : 2$, то есть $d = 2$.
- Искомая последовательность
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
- Можно ли найти пропущенные члены последовательности, не вычисляя разности?

Характеристическое свойство арифметической прогрессии



-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...

5, 10, 15, 20, 25, ...

15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, ...

Характеристическое свойство арифметической прогрессии



Пусть a_n – искомый член последовательности.

Воспользуемся тем, что разность между соседними членами последовательности постоянна:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой член этой последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов.

Задача



Последовательность (c_n) - арифметическая прогрессия. Найдите c_{21} , если $c_1=5,8$ и $d=-1,5$.

Решение:

Воспользуемся формулой n -ого члена

$$c_{21}=c_1+d(21-1),$$

$$c_{21}=5,8+(-1,5) \cdot 20,$$

$$c_{21}=-24,2.$$

Ответ: -24,2.



Задача



Числовая последовательность задана формулой
 $a_n = 3 + 5n, n = 1, 2, 3, \dots$

Является ли эта последовательность арифметической прогрессией? Если да, то какова ее разность?

Решение:

Поскольку $a_{n+1} = 3 + 5(n+1) = 3 + 5n + 5 = a_n + 5$, при всех значениях n , то последовательность является арифметической прогрессией по определению. Из полученной формулы $a_{n+1} = a_n + 5$ разность этой прогрессии равна 5.



Это надо запомнить



Любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа.

$$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d)$$

Последовательность (a_n) , заданная формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b + kn - b = k$$

Задача



Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен разности между четвертым и вторым членами. Найти первый член прогрессии.

Дано: $a_7 = 1$, $a_7 = a_4 - a_2$.

Найти: a_1 .

Решение: по условию $a_7 = a_4 - a_2$, то есть $a_7 = 2d$,
но $a_7 = 1$, поэтому $d = 0,5$.

$$a_7 = a_1 + 6d,$$

$$a_1 = a_7 - 6d,$$

$$a_1 = 1 - 6 \cdot 0,5,$$

$$a_1 = -2$$

