*
Электромагнетизм

Кузнецов Сергей Иванович доцент кафедры ОФ ЕНМФ ТПУ

Тема 12

Циркуляция вектора магнитной индукции

Тема 12.

Циркуляция вектора магнитной индукции

12.1. Теорема о циркуляции

12.2. Магнитное поле соленоида

12.3. Магнитное поле тороида

12.4. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

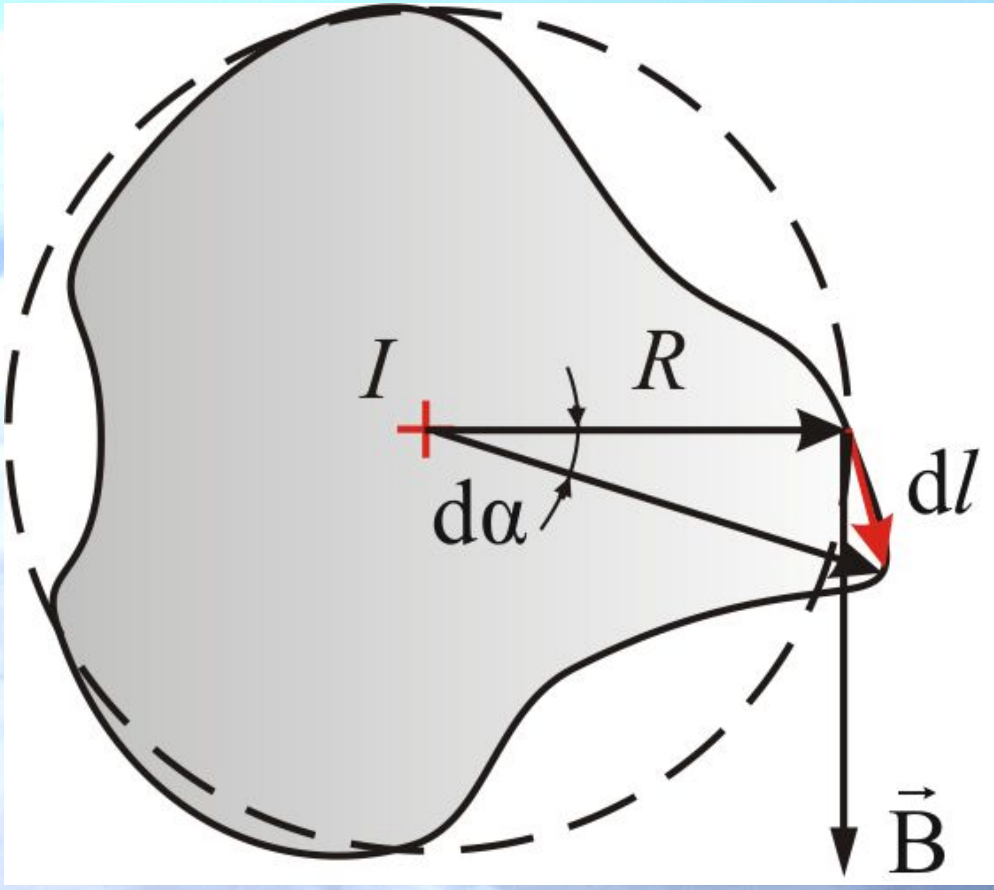
12.5 Эффект Холла

12.6. Циркуляция вектора магнитной индукции

Возьмем контур l охватывающий прямой ток ***I***, и вычислим для него циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$

т.е.

$$\oint_l \vec{B}\,d\vec{l} = ?$$



- Вначале рассмотрим случай, когда контур лежит в плоскости перпендикулярно потоку (ток *I* направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку $\vec{B}$
- Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов:

$$B_l \mathrm{d}l = B \mathrm{d}l_B ,$$

- где $\mathrm{d}l_B$ – проекция d*l* на вектор $\vec{B}$,

$\mathrm{d}l_B = R\mathrm{d}\alpha$, где *R* – расстояние от тока *I* до d*l*.

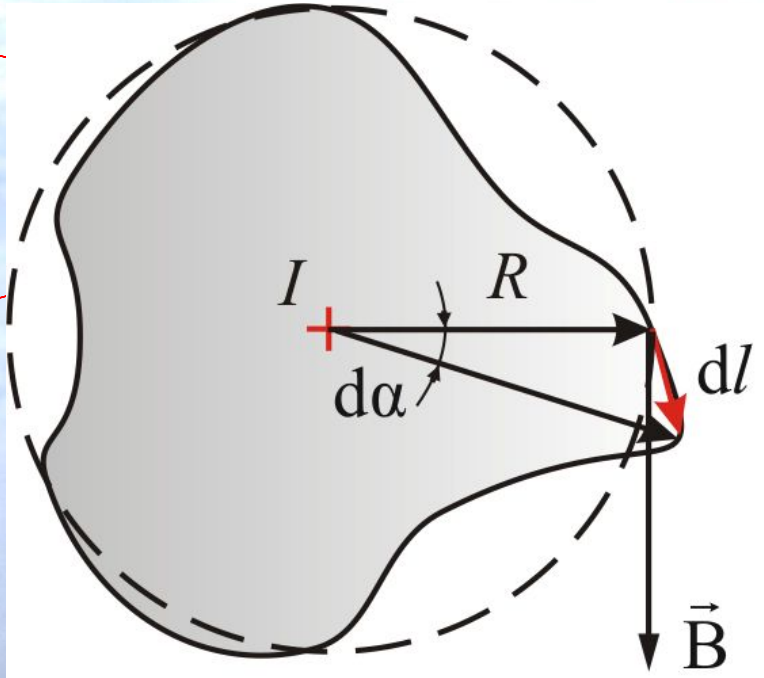
- *Тогда*

$$B_l \mathrm{d}l = B \mathrm{d}l_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}\alpha}{2\pi}$$

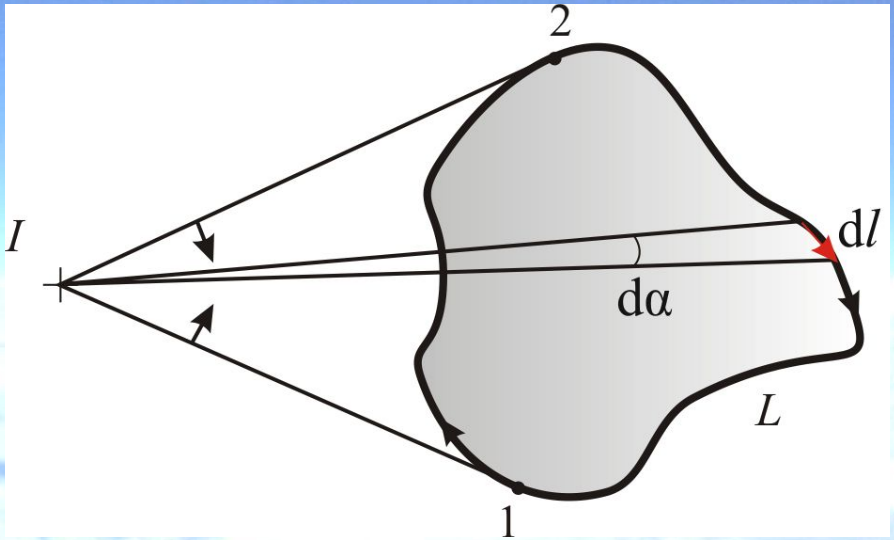
$$\oint B_l \, \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha = \mu_0 I,$$

- **Теорема о циркуляции вектора** $\vec{B}$: циркуляция вектора магнитной индукции равна току, охваченному контуром, умноженному на магнитную постоянную:

$$\oint B_l \, \mathrm{d}l = \mu_0 I$$



•Иначе обстоит дело, **если ток не охватывается контуром**



•В этом случае при обходе радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (1–2), а потом в другом (2–1). Поэтому $\oint d\alpha = 0$,

и следовательно, в этом случае

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$$

- Итак, $$\oint B_l \, \mathrm{d} l = \mu_0 I,$$

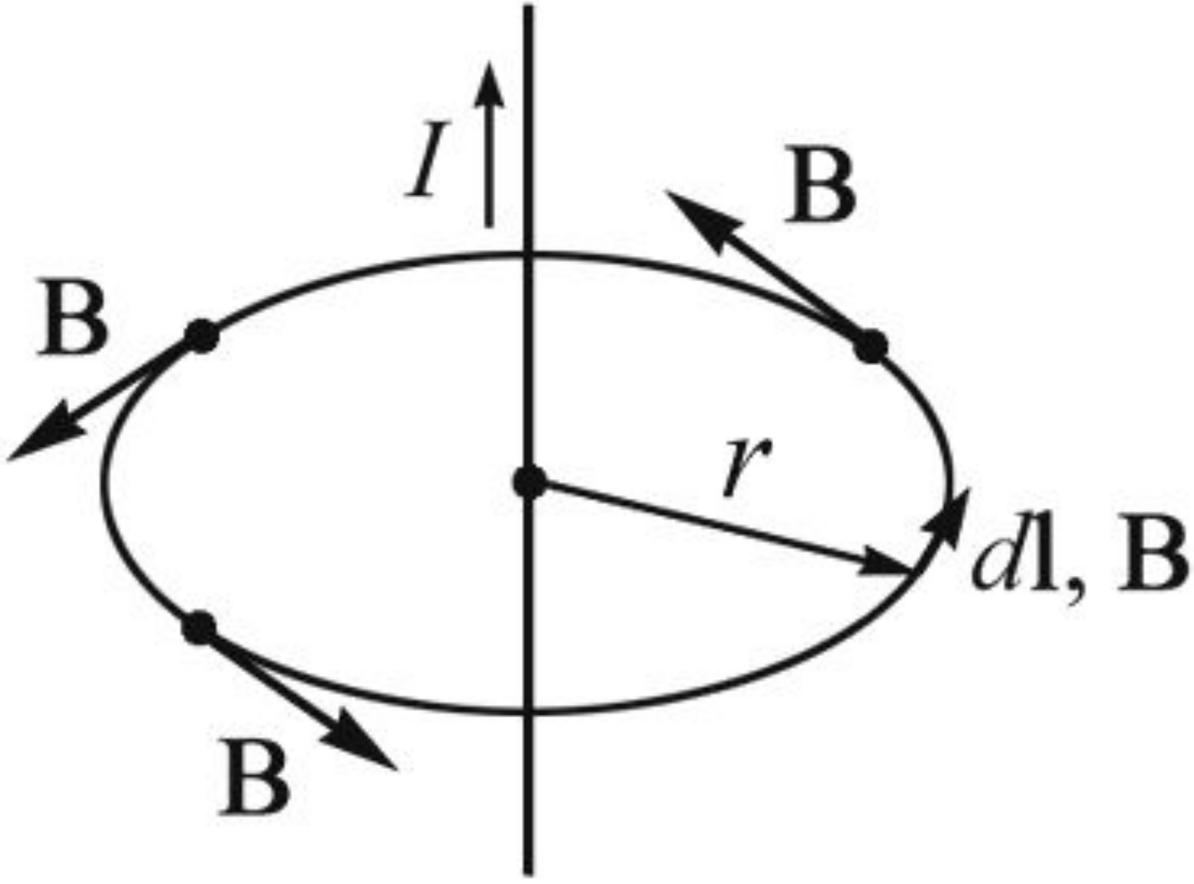
где *I* – ток, охваченный контуром *L.*

- *Эта формула справедлива и для тока произвольной формы, и для контура произвольной формы.*

- **Если контур охватывает несколько токов, то**
- $$\oint B_l \mathrm{d}l = \mu\mu_0 \sum I_i, \qquad (2.6.3)$$
- т.е. ***циркуляция вектора*** $\vec{B}$ ***равна <u>алгебраической</u> сумме токов, охваченных контуром произвольной формы.***

- Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля $\oint \vec{B}, d\vec{l} = \mu_0 I$

позволяет легко рассчитать величину **B** от бесконечного проводника с током :



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

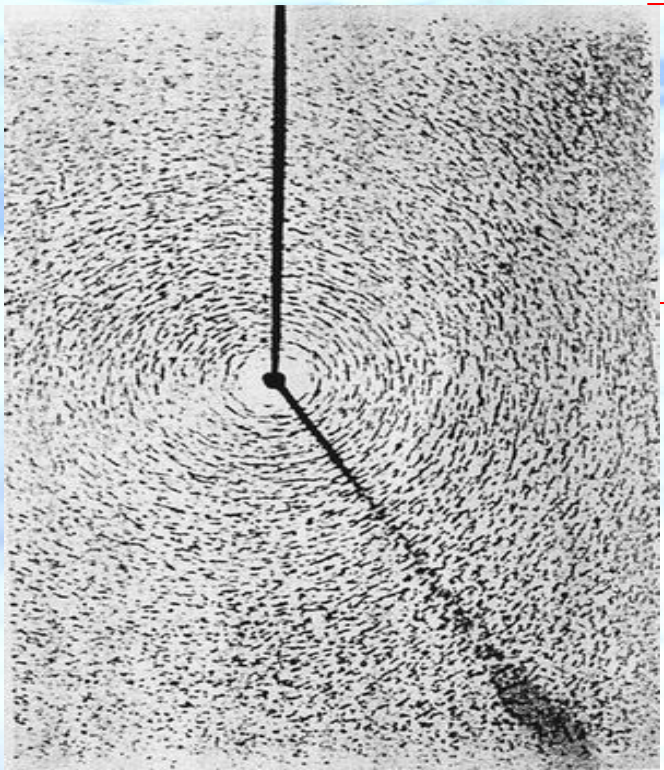
Получить самостоятельно

- Итак, циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ отлична от нуля, если контур охватывает ток
- Сравните с циркуляцией вектора $\vec{E}$:

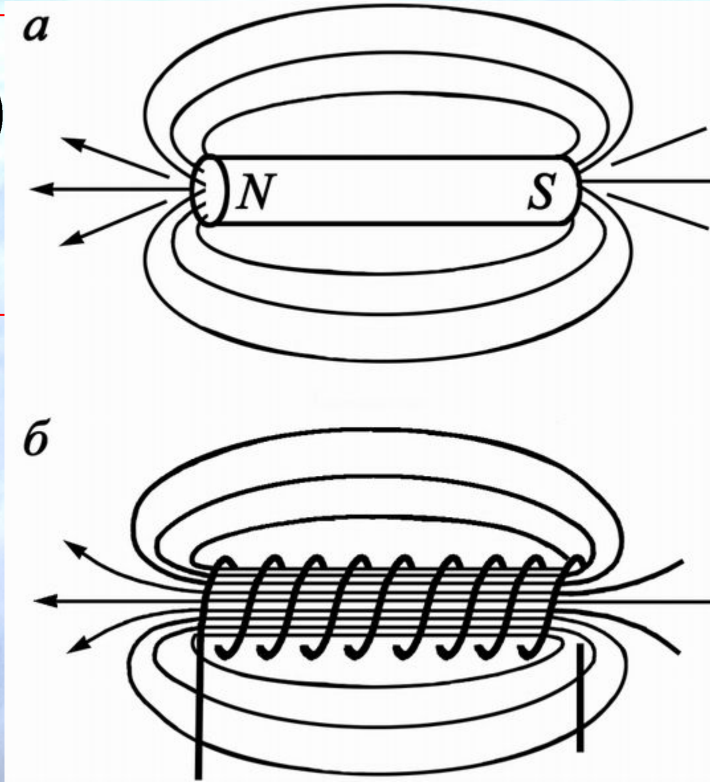
$$\oint E_l \mathrm{d}l = 0$$

- Магнитные поля, мы уже говорили, называют ***вихревыми*** или ***соленоидальными***.
- Магнитному полю нельзя приписывать потенциал, как электрическому полю. Этот потенциал не был бы однозначным: после каждого обхода по контуру он получал бы приращение $\mu_0 I$.

- Линии напряженности *электрического поля* начинаются и заканчиваются на зарядах.
- А *магнитных* зарядов в природе нет. Опыт показывает, что линии $\vec{B}$ *всегда замкнуты* (см. рис.)
- Поэтому **теорема Гаусса** для вектора магнитной индукции $\vec{B}$ записывается так:

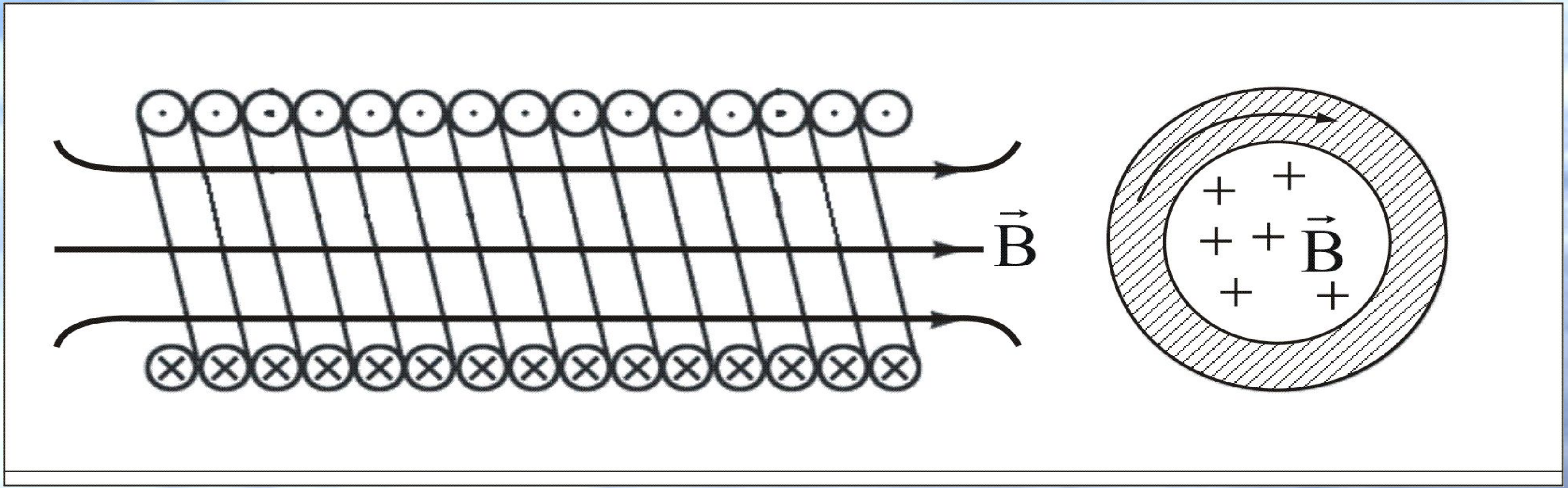


$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



2.7. Магнитное поле соленоида

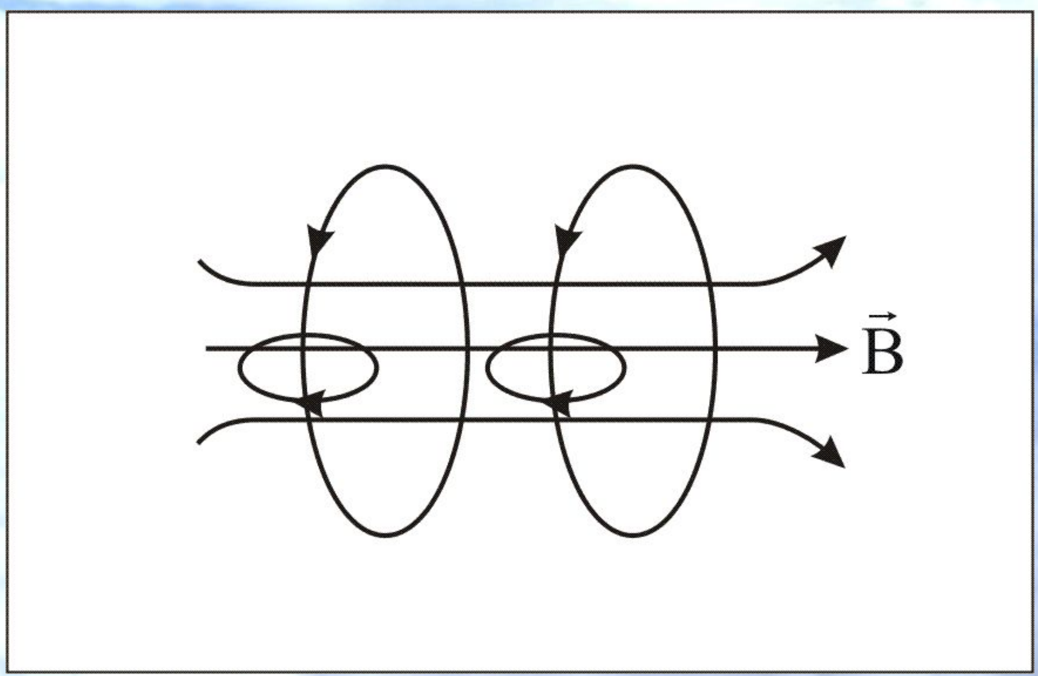
- Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ $(\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I_i)$ для вычисления простейшего магнитного поля
  – бесконечно ***длинного соленоида***, представляющего собой тонкий провод, намотанный плотно виток к витку на цилиндрический каркас



•

- *Соленоид можно представить в виде системы одинаковых **круговых токов с общей прямой осью.***
- Бесконечно длинный соленоид симметричен любой, перпендикулярной к его оси плоскости.
- Взятые попарно (рис. 2.12), симметричные относительно такой плоскости витки создают поле, в котором вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости витка, т.е. ***линии магнитной индукции имеют направление параллельное оси соленоида внутри и вне его.***

- *Рис. 2.12*



- Из параллельности вектора $\vec{B}$ оси соленоида вытекает, что *поле как внутри, так и вне соленоида должно быть однородным*.
- Возьмём воображаемый прямоугольный контур 1–2–3–4–1 и разместим его в соленоиде, как показано на рис. 2.13.

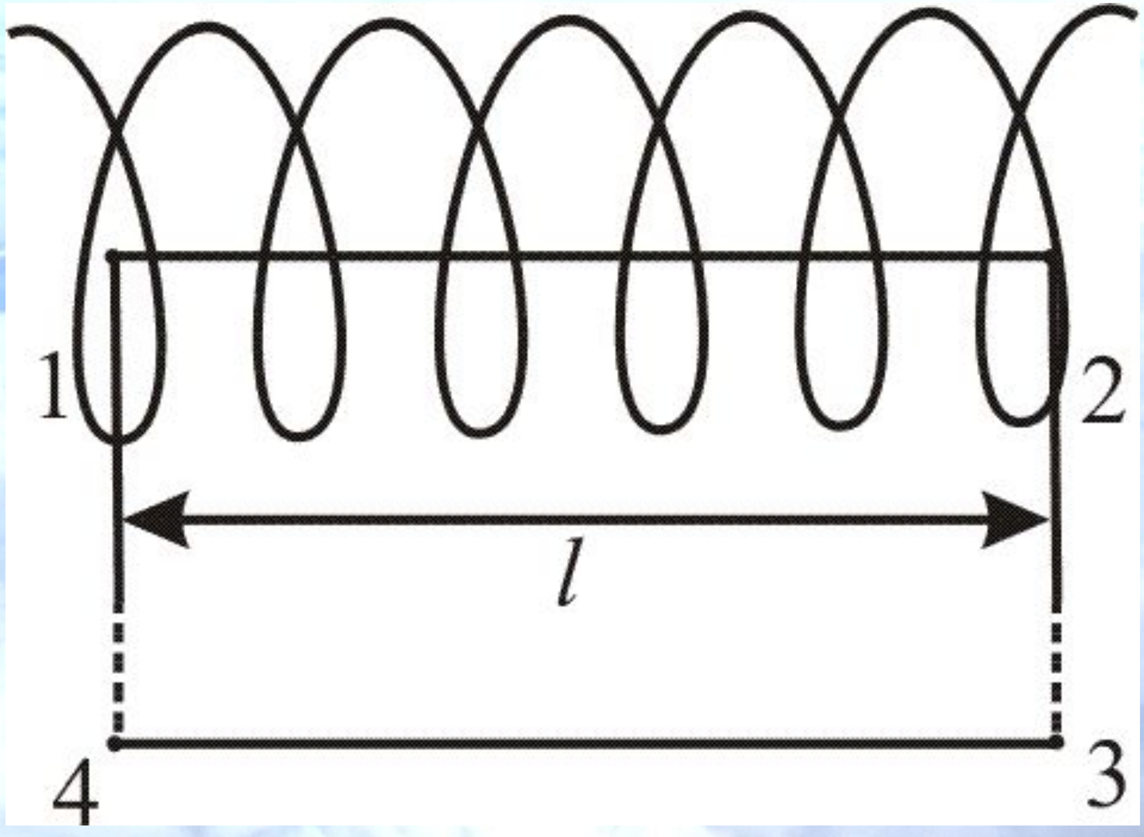
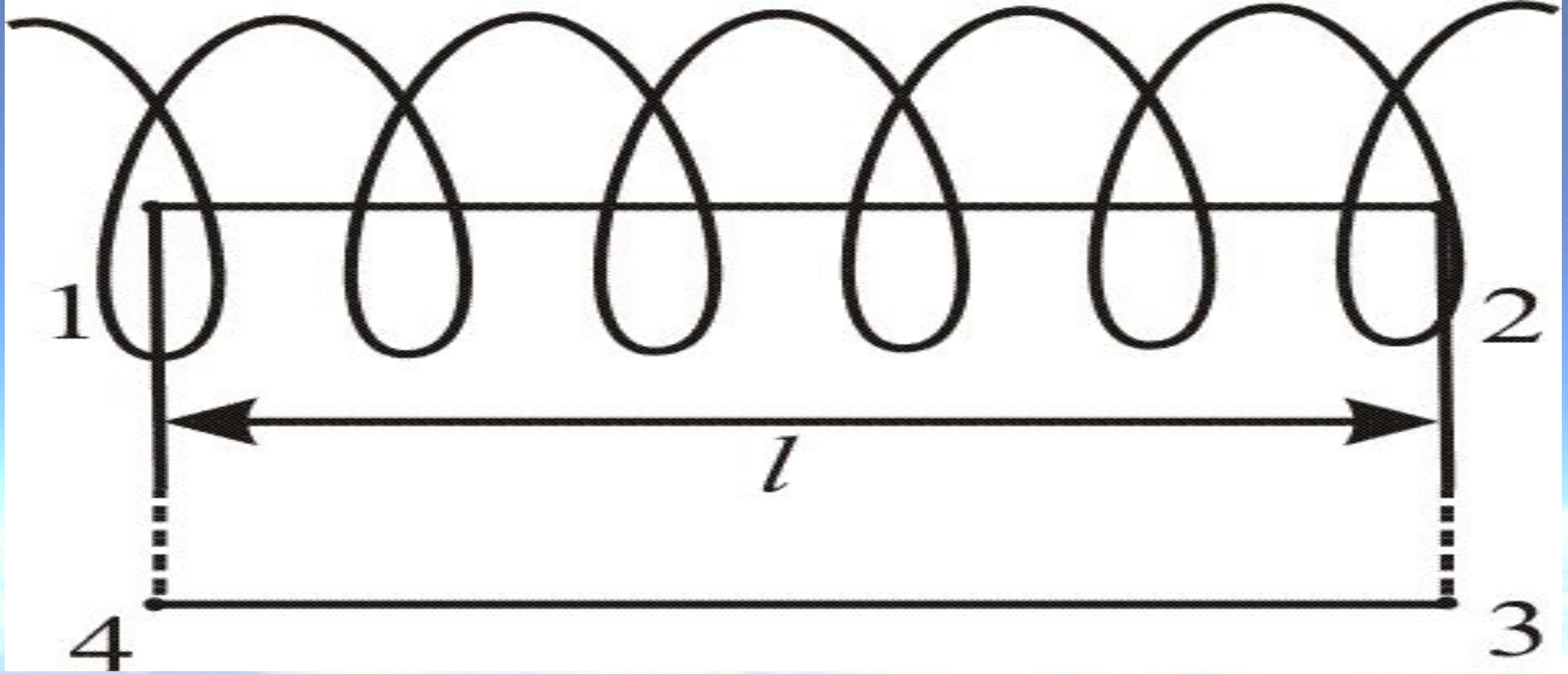


Рис. 2.13



$$\oint\limits_L B_l \mathrm{d}l = \int\limits_1^2 B_l \mathrm{d}l + \int\limits_2^3 B_l \mathrm{d}l + \int\limits_3^4 B_l \mathrm{d}l + \int\limits_4^1 B_l \mathrm{d}l.$$

- Второй и четвёртый интегралы равны нулю, т.к. вектор $\vec{B}$ перпендикулярен направлению обхода, т.е
- $B_l = 0$

- Возьмём участок 3–4 – на большом расстоянии от соленоида, где поле стремится к нулю; и пренебрежём третьим интегралом, тогда

$$\oint B_l \mathrm{d}l = \int_1^2 B_l \mathrm{d}l = \mu\mu_0 \sum I_i ,$$

- где $B_l = B$ – магнитная индукция на участке 1–2 – внутри соленоида, μ – магнитная проницаемость вещества.
- Если отрезок 1–2 внутри соленоида, контур охватывает ток:

$$nlI = \sum I_i ,$$

- где *n* – число витков на единицу длины, *I* – ток в соленоиде (в проводнике).

- ***магнитная индукция внутри соленоида***

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

- **Вне соленоида**:
- $\sum I_i = 0$ и $\oint B_l \mathrm{d}l = Bl = 0$, т.е. $B = 0$
- Бесконечно длинный соленоид аналогичен плоскому конденсатору – и тут, и там поле однородно и сосредоточено внутри.
- Произведение ***nI*** – называется ***число ампер витков на метр.***
- ***У конца полубесконечного соленоида***, на его оси магнитная индукция равна:
- $$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 nI. \quad (2.7.2)$$

Если же **катушка короткая**, что обычно и бывает на практике, то *магнитная индукция в любой точке А, лежащей на оси соленоида, направлена вдоль оси (по прав. буравчика) и численно равна алгебраической сумме индукций магнитных полей создаваемых в точке А всеми витками.* В этом случае имеем:

***В точке, лежащей на середине оси* конечного *соленоида магнитное поле будет максимальным*:**

$$\boxed{B_{\max} = \mu_0 \mu n I \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}},} \qquad (2.7.3)$$

где *L* – длина соленоида, *R* – диаметр витков.

- **В произвольной точке** конечного **соленоида (рис. 2.14) магнитную индукцию можно найти по формуле**
- $$B = \frac{1}{2}\mu_0 \mu n I(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

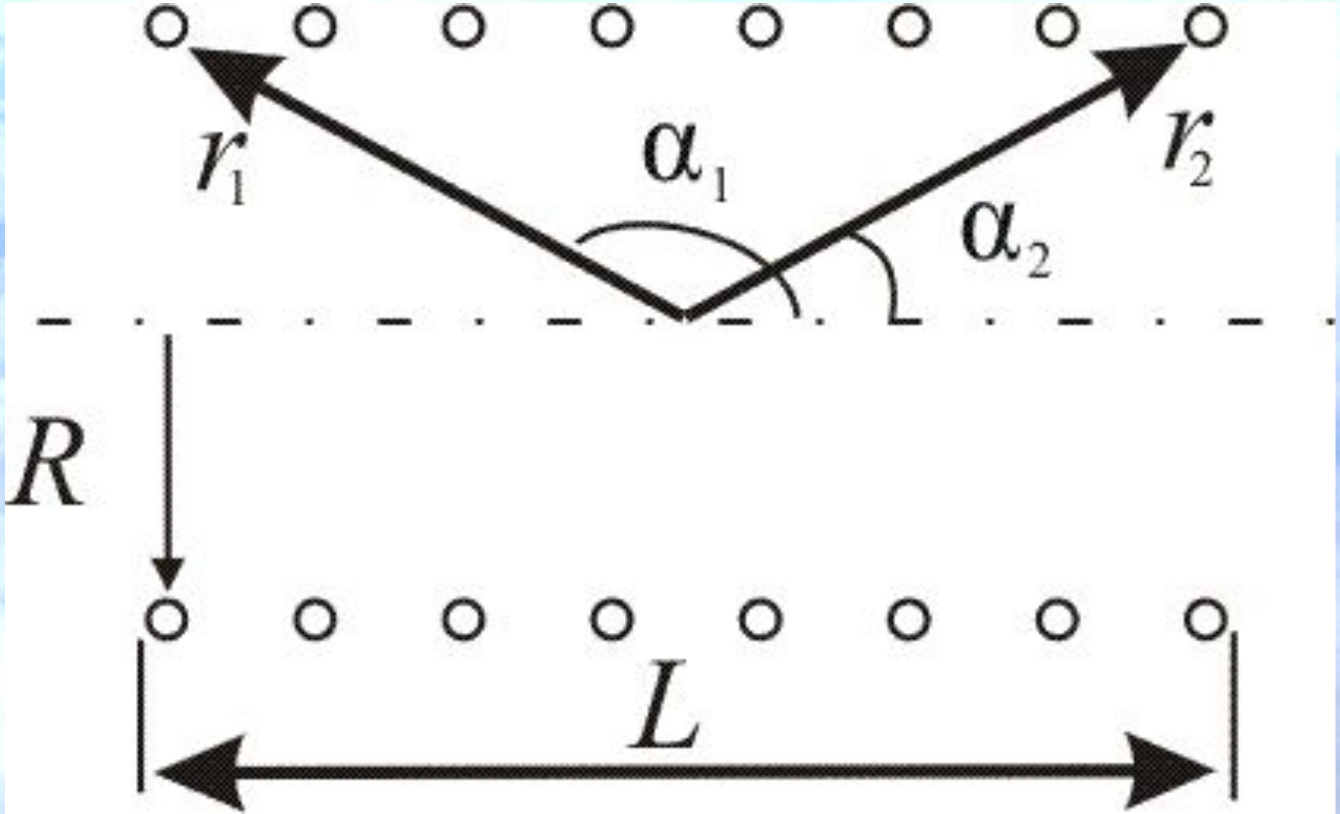
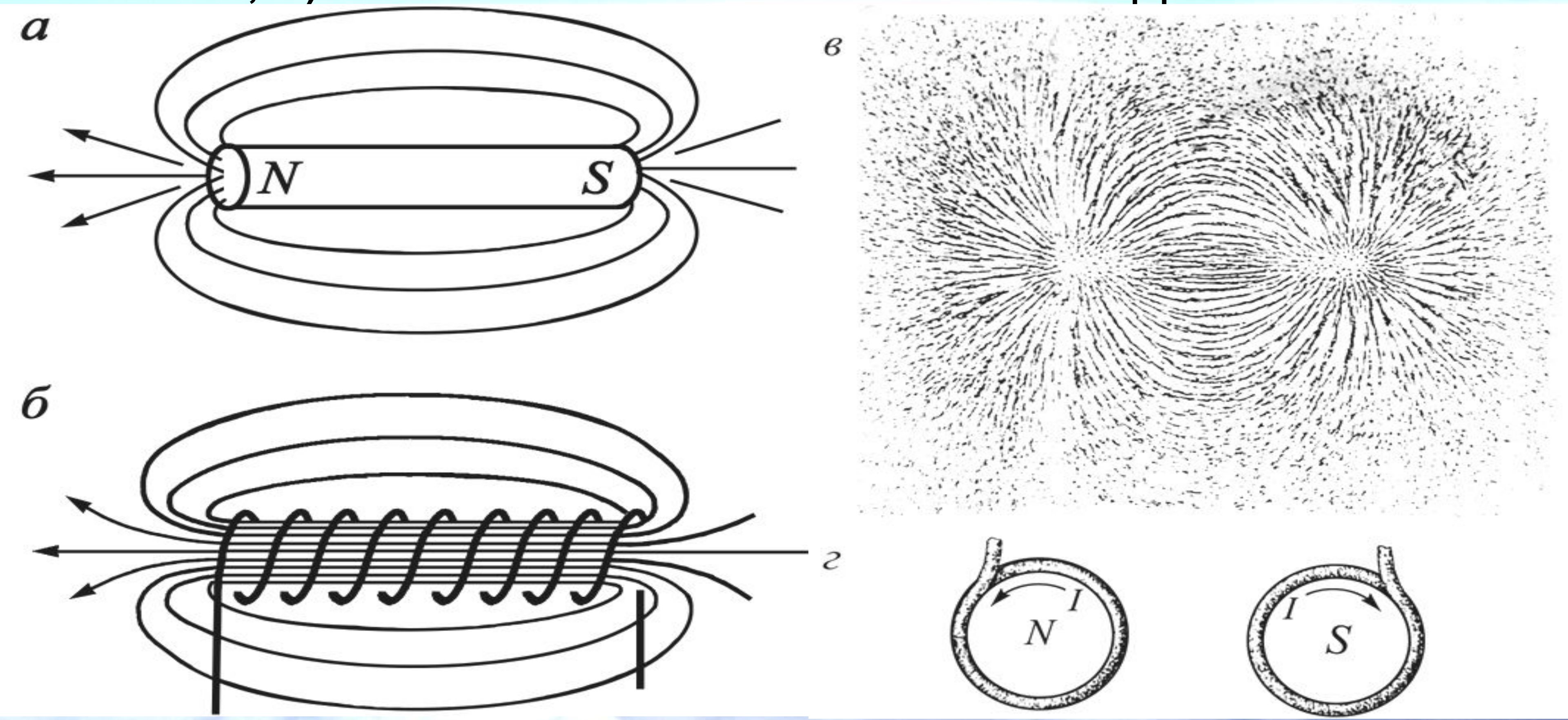


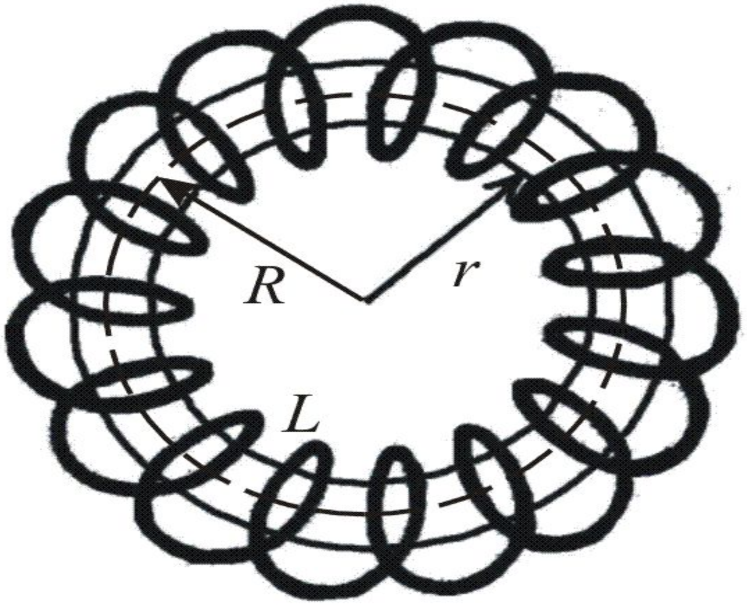
Рис. 2.14

- На рис. 2.15 изображены силовые линии магнитного поля $\vec{B}$: а) металлического стержня; б) соленоида; в) железные опилки, рассыпанные рассыпанные на листе бумаги, помещенной над магнитом, стремятся вытянуться вдоль силовых линий; г) магнитные полюсы соленоида.



2.8. Магнитное поле тороида

- ***Тороид*** представляет собой тонкий провод, плотно (виток к витку) намотанный на каркас в форме тора (бублика) (рис. 2.16).
- Возьмём контур *L* в виде окружности радиуса *r*, центр которого совпадает с центром тора *R*.
- В силу симметрии, вектор $\vec{B}$ в каждом токе направлен по касательной к контуру.



Следовательно,

$$\oint_L B_l \mathrm{d}l = B2\pi r = Bl, \qquad (2.8.1)$$

где $l = 2\pi r$ – длина контура

Рис. 2.16

- Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток $2\pi RnI$ (*n* – число витков на единицу длины).
- Тогда, в соответствии с *теоремой о циркуляции вектора* $\vec{B}$, можно записать:

$$B2\pi r = 2\pi RnI\mu\mu_0$$

- Отсюда следует, что
- ***внутри тора***

$$B = \mu\mu_0 nI\frac{R}{r}$$

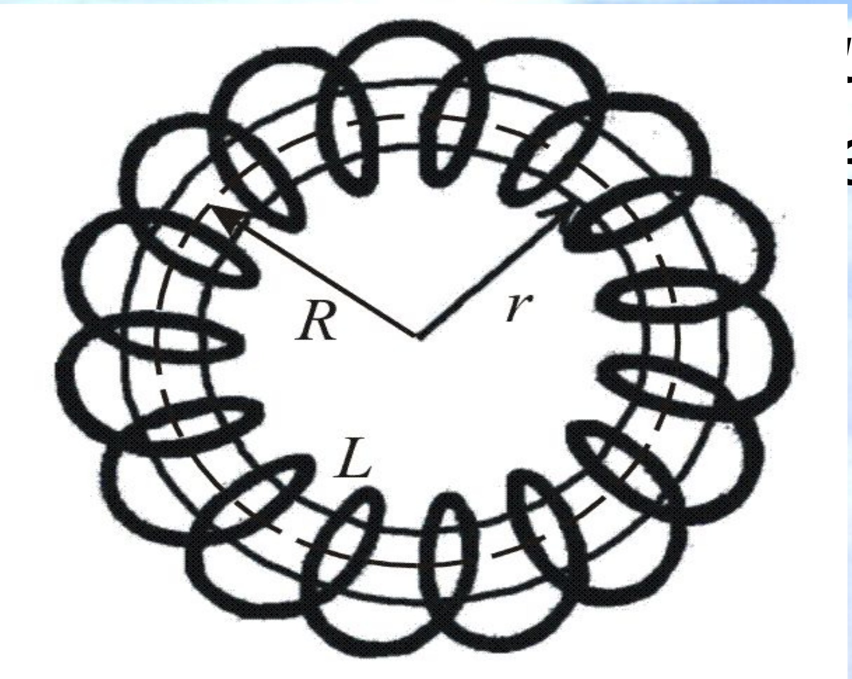
- Контур вне тороида токов не охватывает, поэтому ***вне тороида***

$$B = 0$$

- Для тороида, где радиус тора намного больше радиуса витка, отношение $R / r \approx 1$, тогда **магнитное поле тора B** можно рассчитать по формуле:

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

- *В тороиде магнитное поле однородно*



ичине, т.е. по

зление его в

различно

Движение проводника в магнитном поле

Работа силы Ампера:

$$dA = F_A \cdot dx = IBl \cdot dx$$

За счет чего выполняется работа?!

Работа силы Ампера:

$$dA = I \cdot (B \cdot l dx \cos\alpha)$$

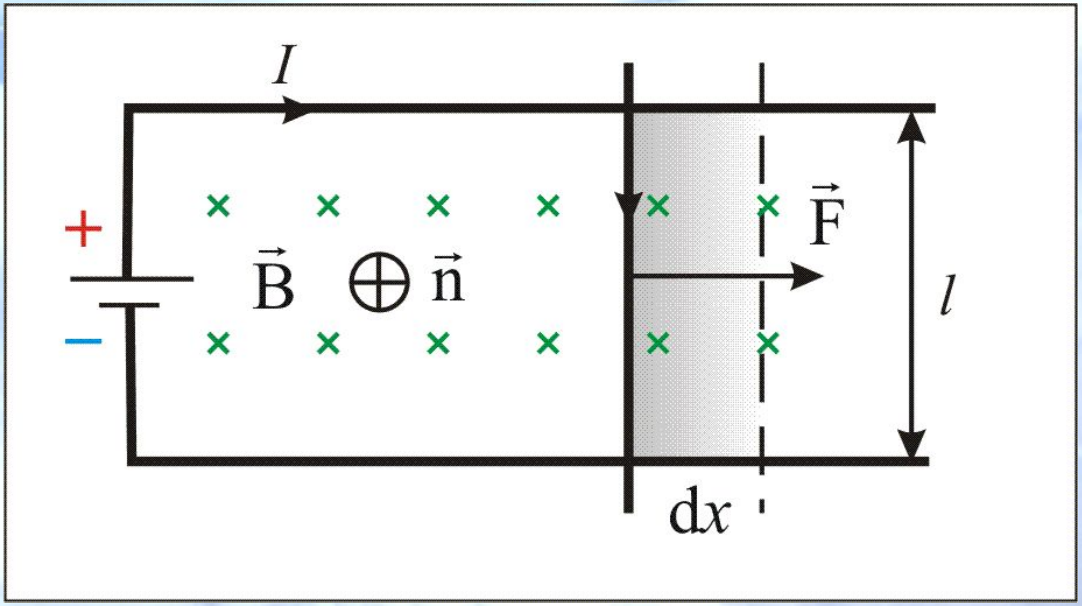
$$dA = I \cdot d\Phi$$

Работа силы Ампера определяется двумя факторами:

1-наличием тока в проводнике, 2-изменением магнитного потока

2.9. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

- Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длиной ***l***
- Этот контур находится во внешнем однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном к плоскости контура. При показанном на рисунке направлении тока **I**, вектор $\vec{B}$ сонаправлен с $\vec{n}$.



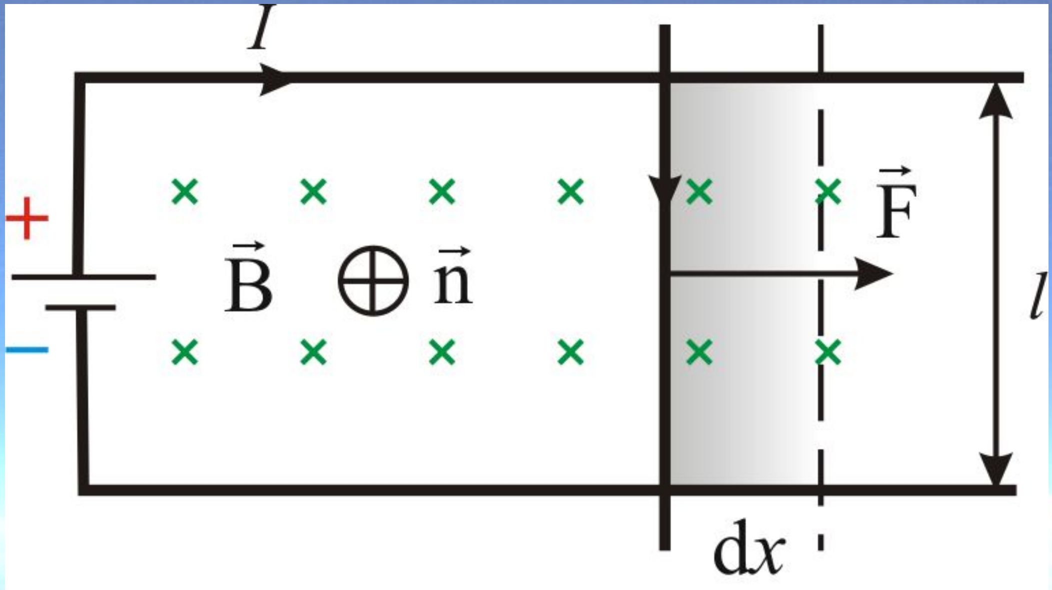


Рис. 2.17

На элемент тока **I** (подвижный провод) длиной *l* действует ***сила Ампера***, направленная вправо:

$$F = IlB.$$

Пусть проводник *l* переместится параллельно самому себе на расстояние dx. При этом совершится работа:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = IBl\mathrm{d}x = IB\mathrm{d}S = I\mathrm{d}\Phi.$$

- Итак,

$$\mathrm{d}A = I\mathrm{d}\Phi. \qquad (2.9.1)$$

- ***Работа**, совершаемая проводником с током при перемещении, численно **равна произведению тока на магнитный поток**, пересечённый этим проводником.*

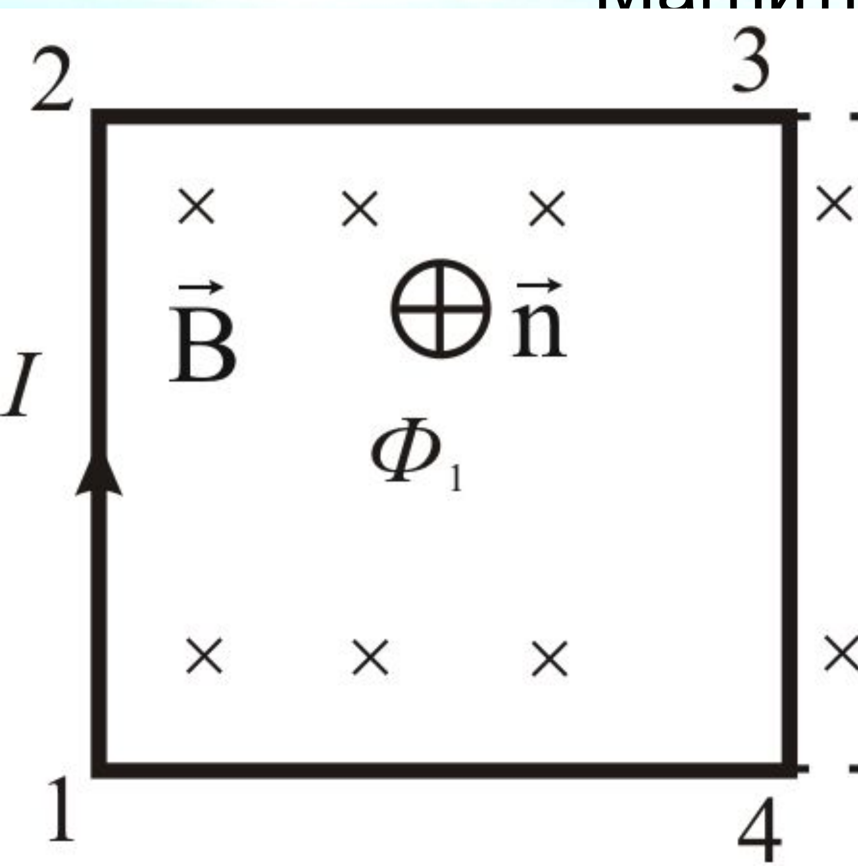
- *Формула остаётся справедливой, если проводник любой формы движется под любым углом к линиям вектора магнитной индукции.*

- ***Выведем выражение для работы по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле.***
- Рассмотрим прямоугольный контур с током 1-2-3-4-1 (рис. 2.18). Магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости контура.

Магнитный поток , Φ_1

ур, направлен по

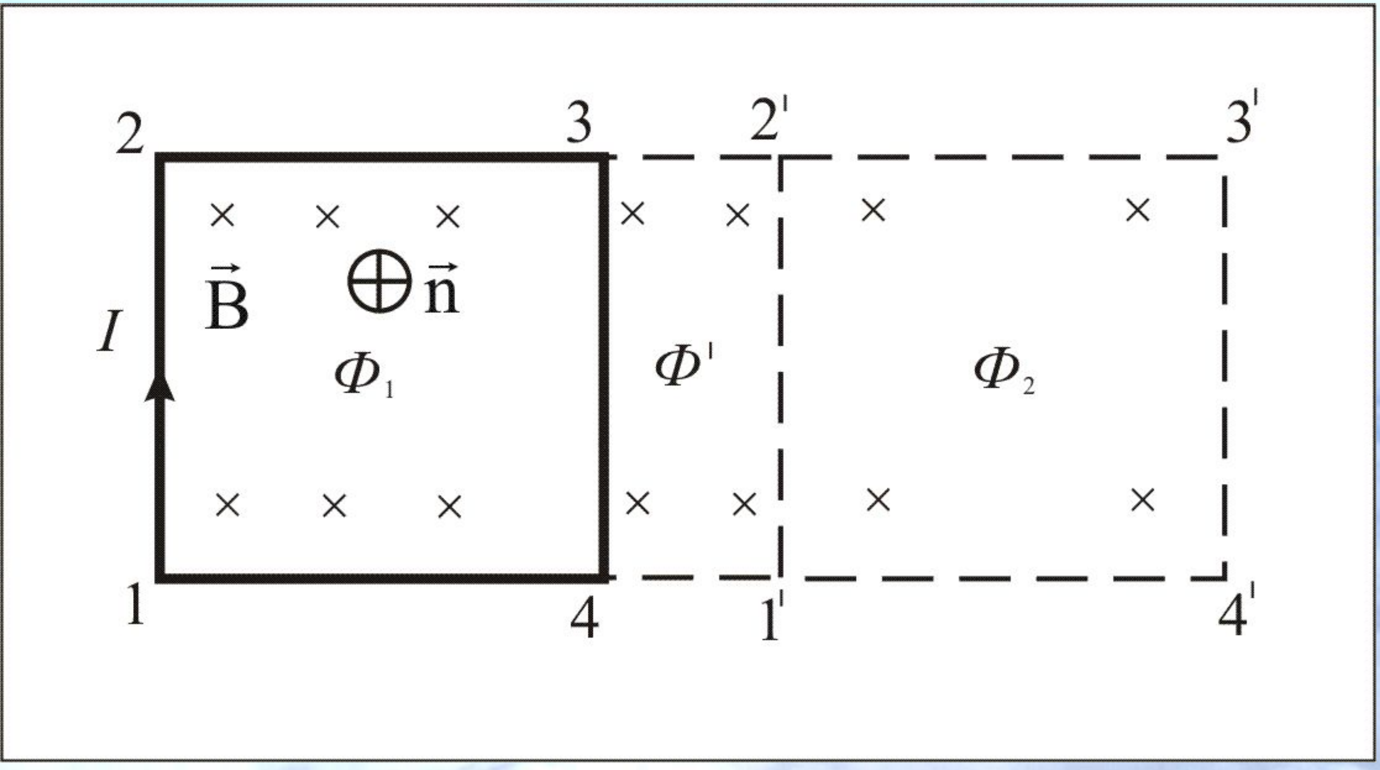
контуру, поэтому



$$\Phi_1 > 0$$

рис. 2.18

- Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение 1'-2'-3'-4'-1'. Магнитное поле в общем случае может быть неоднородным и новый контур будет пронизан магнитным потоком Φ_2.
- Площадка 4-3-2'-1'-4, расположенная между старым и новым контуром, пронизывается потоком Φ'.



- Полная работа по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершаемых при перемещении каждой из четырех сторон контура:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41},$$

- Где A_{23} , A_{41} равны нулю, т.к. эти стороны не пересекают магнитного потока, при своём перемещение (очерчивают нулевую площадку).

$$A_{34} = I(\Phi' + \Phi_2)$$

- Провод 1–2 перерезает поток ($\Phi_1 + \Phi'$), но движется против сил действия магнитного поля.

$$A_{12} = -I(\Phi_1 + \Phi')$$

- Тогда ***общая работа по перемещению контура:***
- $$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$ или $$A = I\Delta\Phi,$$
- Здесь $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ *– это изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.*

- ***Работа****, совершаемая при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле*, ***равна произведению величины тока на изменение магнитного потока, сцепленного*** *с этим контуром*.

- $$\mathrm{d}A = I\,\mathrm{d}\Phi. \qquad (2.9.5)$$

- Выражения (2.9.1) и (2.9.5) внешне тождественны, но *физический смысл* величины d*Ф* различен.

- Соотношение (2.9.5), выведенное нами для простейшего случая, остаётся справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле.
- Более того, если контур неподвижен, а меняется $\vec{B}$, то при изменении магнитного потока в контуре на величину dΦ, магнитное поле совершает ту же работу

$$\mathrm{d}A = I\mathrm{d}\Phi.$$

2.10. Эффект Холла

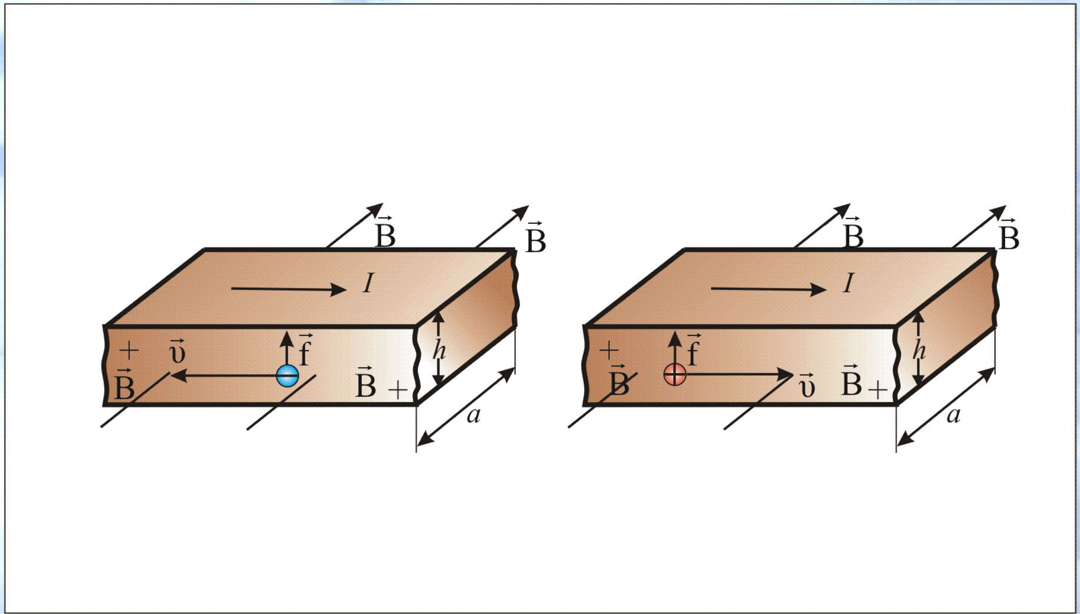
- Одним из проявлений магнитной составляющей силы Лоренца в веществе служит эффект, обнаруженный в 1879 г. американским физиком Э.Г. Холлом (1855–1938).
- ***Эффект Холла состоит в возникновении на боковых гранях проводника с током, помещенного в поперечное магнитное поле, разности потенциалов, пропорциональной величине тока I и индукции магнитного поля B.***

Эффект Холла

Обусловлен действием Лоренцевой силы $\vec{f}$ на свободные заряды в проводнике.

Представим себе проводник в виде плоской ленты, расположенной в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ направленной от нас (Рис. 10.9).

В случае а) верхняя часть проводника будет заряжаться отрицательно, в случае б) положительно.



- Это позволяет экспериментально определить знак носителя заряда в проводнике.
- При равной концентрации носителей заряда обоих знаков возникает ***холловская разность потенциалов***, если различна подвижность, т.е. дрейфовая скорость носителей заряда.
- Подсчитаем величину холловской разности потенциалов (*Ux*).
- Обозначим: E_x – напряженность электрического поля, обусловленного ЭДС Холла, h – толщина ленты проводника.
- $$U_x = E_x h. \qquad (2.10.1)$$

- Перераспределение зарядов прекратится, когда сила qE_x уравновесит лоренцеву силу, т.е. $qE_x = q\upsilon B$ или $E_x = B\upsilon.$

- Плотность тока $j = n\upsilon q$, отсюда $\upsilon = \dfrac{j}{nq}$.
- Тогда $E_x = B\dfrac{j}{nq}$.

- Подставим E_x в (2.10.1) и найдем U_x:

- $U_x = \dfrac{jBh}{nq}$ или $U_x = \dfrac{BhI}{nqS} = \dfrac{BI}{qna} = \dfrac{RBI}{a}$, (2.10.2)

- Где $R = 1/qn$ – коэффициент Холла.

холловская разность потенциалов

$$U_x = \frac{BI}{qna} = \frac{RBI}{a}$$

Где $R = 1/qn$ – коэффициент Холла.

- Исследования ЭДС Холла привели к удивительным выводам:
- Металлы могут обладать проводимостью *p* –типа (Zn, Cd – у них дырки более подвижные, чем электроны).
- Это металлы с чуть перекрывающимися знаками, т.е. полуметаллы.

Из формулы 10.6.3 можно вывести число носителей заряда.

(10.6.4)

$$n = \frac{IB}{qaU_x}$$

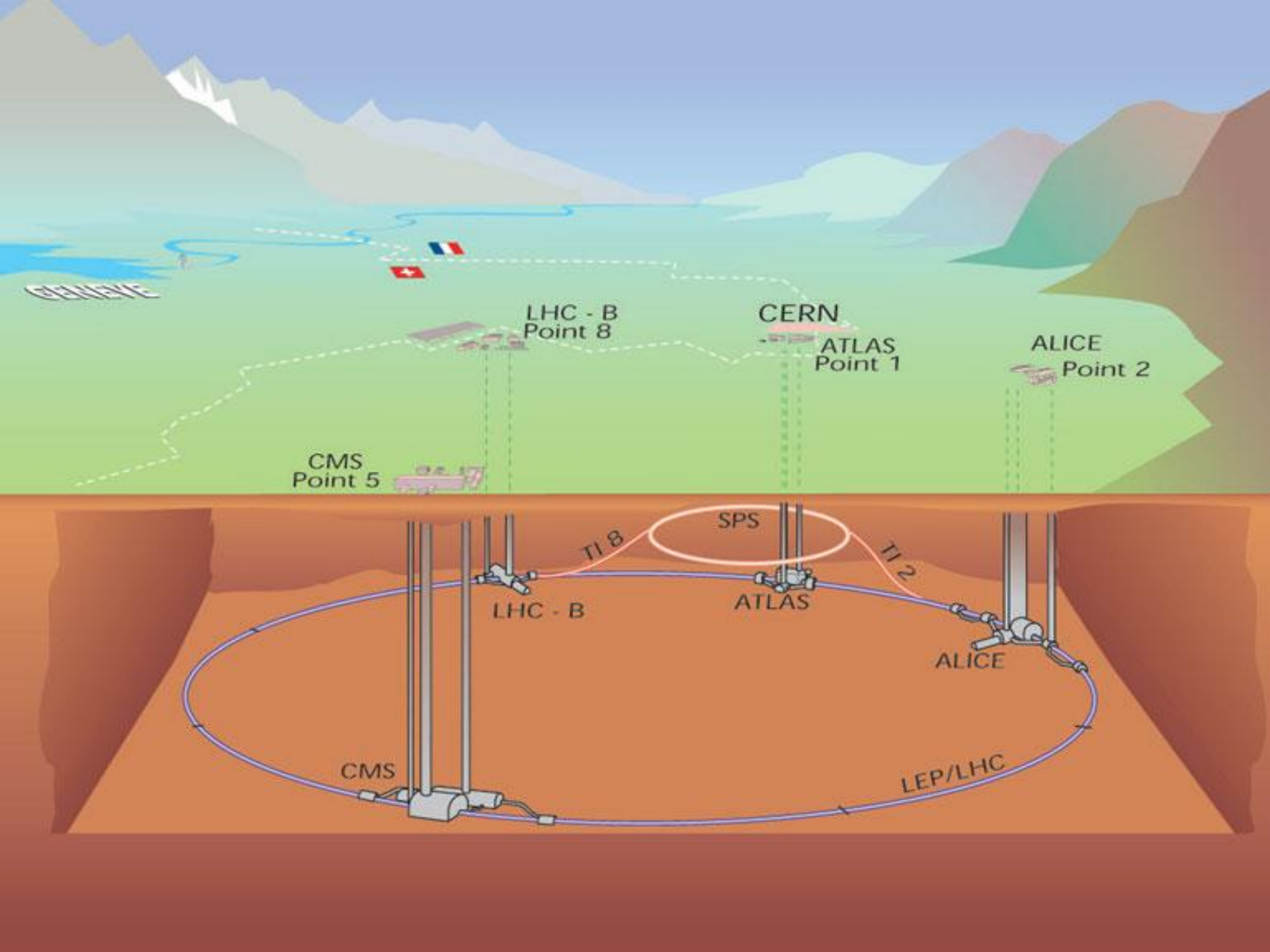
Итак, измерение Холловской разности потенциалов позволяет определить:

1) знак заряда;

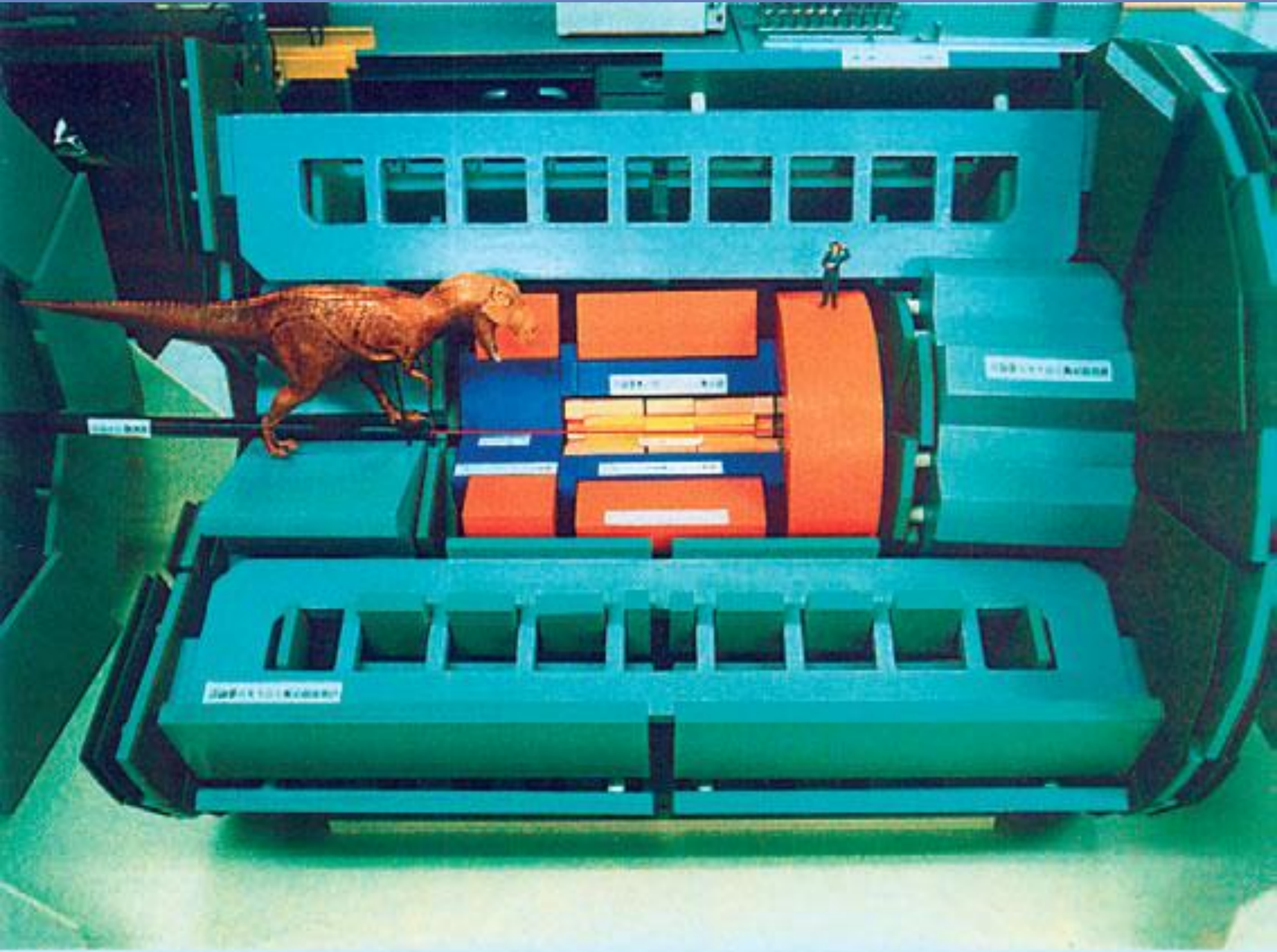
2) количество носителей.

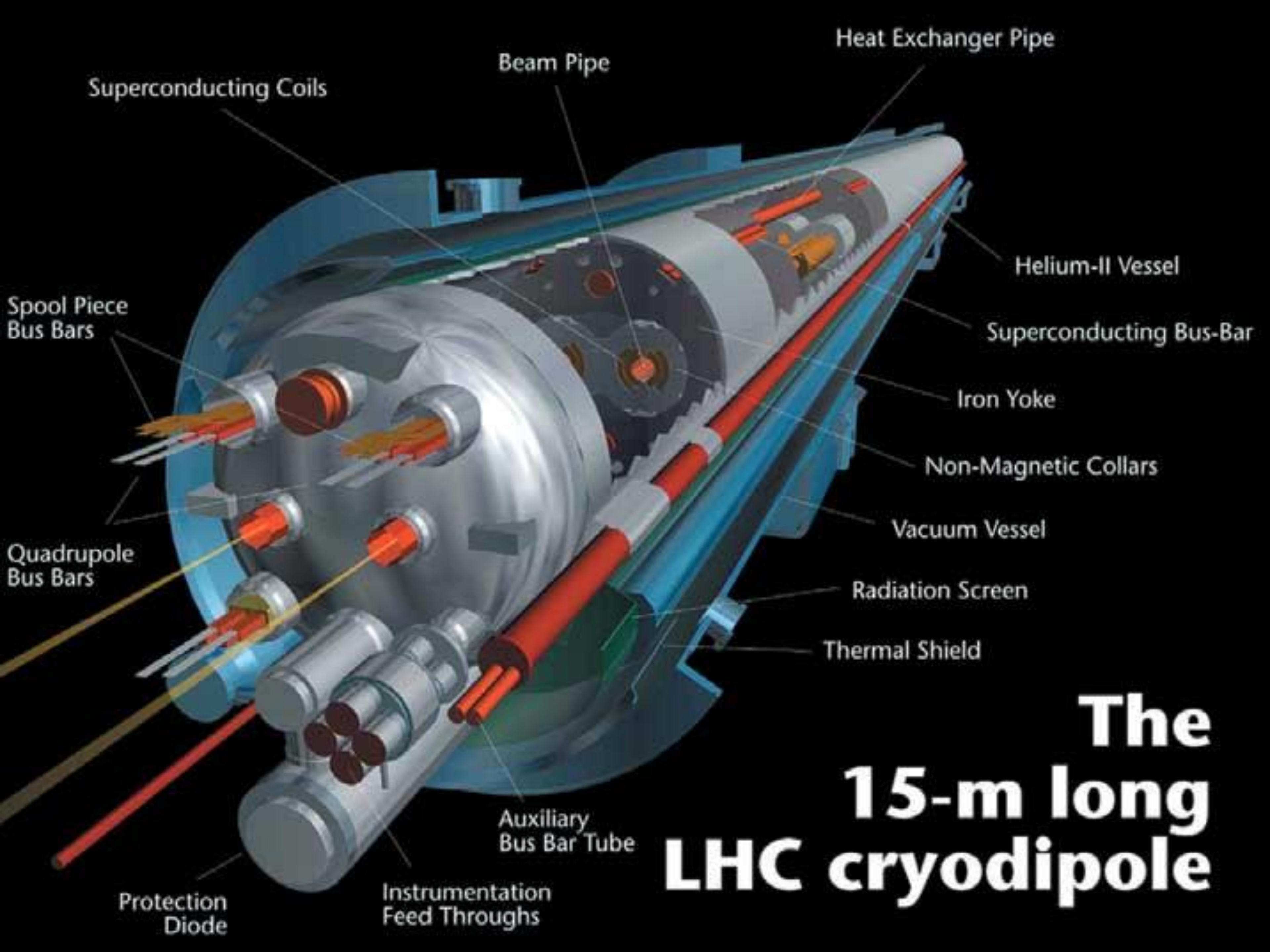
Электрическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Точечный заряд	q	Ток	I
Электрическая постоянная	ε_0	Магнитная постоянная	μ_0
Диэлектрическая проницаемость	ε	Магнитная проницаемость	μ
Диэлектрическая восприимчивость	$\chi = \varepsilon - 1$	Магнитная восприимчивость	$\mathrm{i} = \mu - 1$
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\lvert q_1 q_2\rvert}{r^2}$	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1 I_2}{r}$
Силовая характеристика электрич. поля	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	Силовая характеристика магнитного поля	$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{max}}{\vec{P}_m}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum_k \vec{B}_k$

Электрическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Поляризованность	$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$	Намагниченность	$\vec{J} = \frac{\vec{\chi}}{\mu_0}\vec{B}$
Электроемкость проводника	$C = \frac{q}{\varphi}$	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I}$
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$	Энергия катушки с током	$W = \frac{LI^2}{2}.$
Объемная плотность энергии	$w = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$	Объемная плотность энергии	$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$
Поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхн. **S**	$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	Поток вектора $\vec{B}$ сквозь поверхность S	$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$
Циркуляция вектора $\vec{E}$	$\oint_L \vec{E}dl = 0$	Циркуляция Вектора $\vec{B}$	$\oint_L \vec{B}dl = \mu_0 I$



GENEVE
LHC - B
Point 8
CERN
ATLAS
Point 1
ALICE
Point 2
CMS
Point 5
SPS
TI 8
TI 2
LHC - B
ATLAS
ALICE
CMS
LEP/LHC




Heat Exchanger Pipe
Beam Pipe
Superconducting Coils
Helium-II Vessel
Spool Piece
Bus Bars
Superconducting Bus-Bar
Iron Yoke
Non-Magnetic Collars
Vacuum Vessel
Quadrupole
Bus Bars
Radiation Screen
Thermal Shield
The
15-m long
LHC cryodipole
Auxiliary
Bus Bar Tube
Protection
Diode
Instrumentation
Feed Throughs

Лекция окончена!