Преобразование тригонометрических выражений

Учебные элементы

1. *Синус, косинус, тангенс суммы и разности аргументов.*
2. *Формулы двойного аргумента.(теорияФормулы двойного аргумента.(теория, примеры, задания)*
3. *Формулы понижения степени.*
4. *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения.*
5. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы.
6. Преобразование выражения $A\sin x+B\cos x$ к виду $C\sin(x+t)$

Синус двойного аргумента

$Sin\ 2x = 2\ sin\ x\ \ cos\ x$

Доказательство.

Рассмотрим выражение sin 2x.

Sin 2x = sin (x+x) = sin x cos x + cos x sin x=

= 2sin x cos x.

Тождество доказано.

Косинус двойного аргумента

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Доказательство.

Рассмотрим выражение cos 2x.

$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

Тождество доказано.

Тангенс двойного аргумента

$$tg\,2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

Доказательство.

Рассмотрим выражение tg 2x.

$$tg\,2x = tg(x+x) = \frac{tgx+tgx}{1-tgx\cdot tgx} = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

Тождество доказано.

Примеры

1. Доказать тождество $1+\sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$

Решение.

Воспользуемся тем, что $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента. Получим,

$$1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2$$

Примеры

2. Сократить дробь $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$

Решение.

В числителе дроби воспользуемся тождеством $1+\sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$, а в знаменателе формулой косинуса двойного аргумента. Получим,

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

Примеры

3. Вычислить $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

Решение.

Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его получим:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=0{,}5\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=0{,}5\sin(2\cdot\frac{\pi}{12})=0{,}5\sin\frac{\pi}{6}=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$$

Примеры

4. Доказать тождество $tgx + ctgx = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Решение.

Преобразуем левую часть доказываемого тождества:

$$tgx + ctgx = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

Умножив и числитель, и знаменатель последней дроби на 2, получим:

$$\frac{2}{2\cos x \sin x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Что и требовалось доказать.

Примеры

5. Зная, что $cos x = \frac{3}{5}$ и что $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ вычислить $\sin 2x$

Решение.

Значение cosx дано в условии, а значение sinx найдём следующим образом: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$

Это значит, что $\sin x = \frac{4}{5}$ или $\sin x = -\frac{4}{5}$

Аргумент x принадлежит четвёртой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит надо выбрать $\sin x = -\frac{4}{5}$

Теперь можно вычислить sin2x:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$$

Примеры

5. Зная, что $cosx = \frac{3}{5}$ и что $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ вычислить $\sin(\frac{\pi}{2} + 4x)$

Решение.

Воспользуемся формулой приведения: $\sin(\frac{\pi}{2} + 4x) = \cos 4x$

Применим к выражению cos4x формулу косинуса двойного аргумента: $\cos 4x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Из предыдущих примеров нам известны значения cos2x и sin2x.

Вычисляем:

$$\cos 4x = \cos^2 x - \sin^2 x = (-\frac{7}{25})^2 - (-\frac{24}{25})^2 = -\frac{527}{625}$$

Примеры

6. Решить уравнение sin4x-cos2x=0

Решение.

sin4x-cos2x=0

2 sin2x cos2x – cos2x=0

cos2x (2sin2x-1)=0

cos2x=0 или 2 sin2x-1=0

cos2x=0

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

2sin2x-1=0

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$

Задания. 1 блок.

1. Упростите выражение $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$

Ответы: а) sintОтветы: а) sint;   b) costОтветы: а) sint;   b) cost;   c) tgtОтветы: а) sint;   b) cost;   c) tgt;   d) $\sin^2 t$

2. Известно, что $\sin t = \frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < t < \pi$ Найдите $tg\, 2t$

Ответы: а)120/169Ответы: а)120/169; b) -120/169Ответы: а)120/169; b) -120/169; c) 150/333Ответы: а)120/169; b) -120/169; c) 150/333; d) 0

$\cos 2x = \cos^2 x$

3. Решите уравнение

$\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$ $\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$ πn $\frac{\pi}{2}$

Задания. 2 блок.

Вычислите

$$\frac{1-\cos 25^\circ+\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ+\sin 25^\circ}-tg\,65^\circ$$

Ответы: а) 2Ответы: а) 2 b) 0Ответы: а) 2 b) 0 c) 1Ответы: а) 2 b) 0 c) 1 d) -1Ответы: а) 2 b) 0 c) 1 d) -1

Задания. 3 блок.

Решите уравнение 26sinx cosx – cos4x +7=0

Ответы: a)

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n;$$

$$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

b)

$$-\frac{\pi}{4}+\pi n;$$

$$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

c)

$$(-1)^{k}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}.$$

d)

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n;$$