

~~Е~~



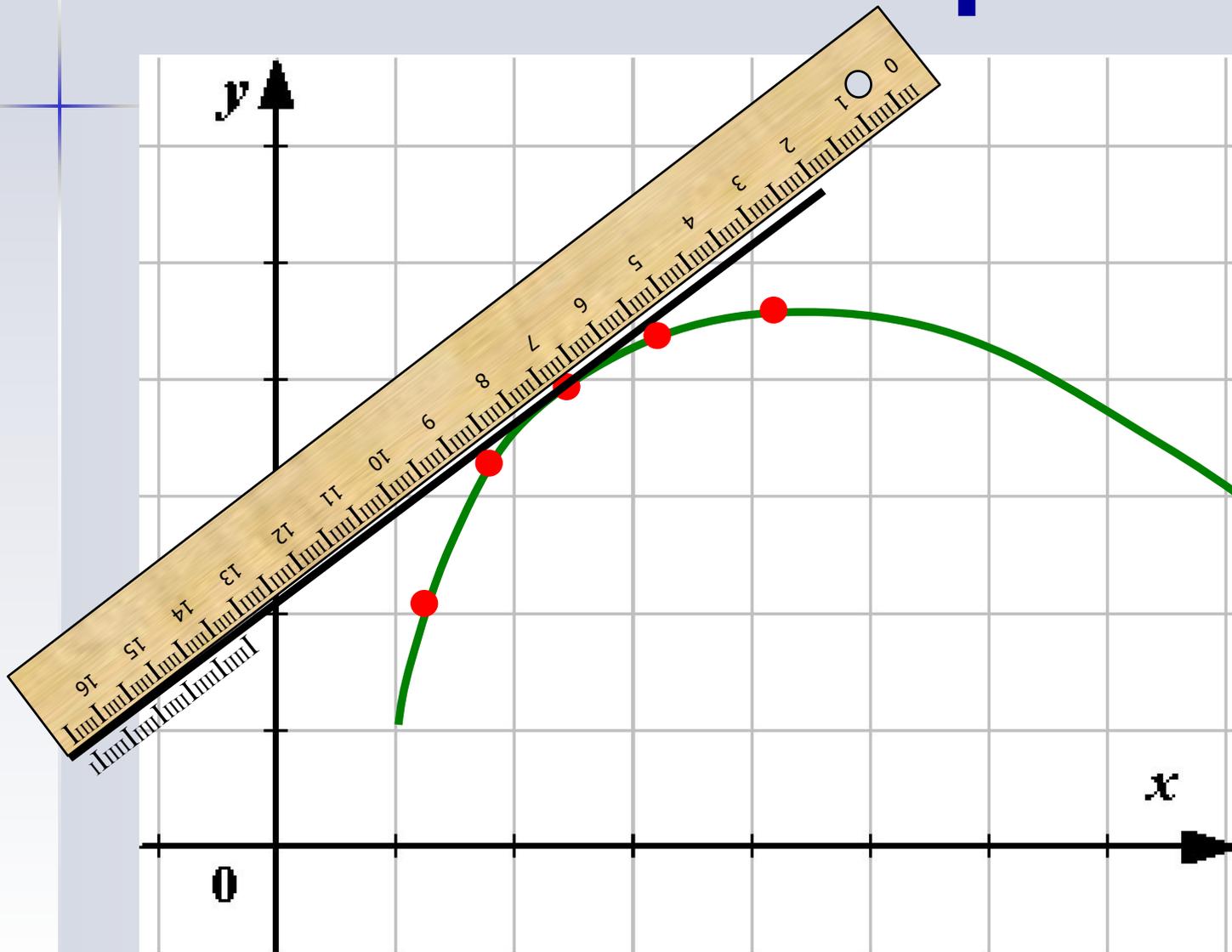
А_Я

~~Ы~~

Производна

я

Касательная к кривой



Механический смысл производной:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ $v_{\text{ср.}} \rightarrow$ к мгновенной скорости $v(t)$,
следовательно, $v(t) = S'(t)$.

$$S'(t) = v(t) \quad \text{или} \quad x'(t) = v(t)$$

$$f'(x) = v(x)$$

Задача по химии:

Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью:

$$p(t) = t^2/2 + 3t - 3 \text{ (моль)}$$

Найти скорость химической реакции через 3 секунды.



Решение:

Понятие на языке химии	Обозначение	Понятие на языке математики
Количество в-ва в момент времени t_0	$p = p(t_0)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t - t_0$	Приращение аргумента
Изменение количества в-ва	$\Delta p = p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta p / \Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента

$$V(t) = p'(t)$$

Задача по биологии:

По известной зависимости численности популяции $x(t)$ определить относительный прирост в момент времени t .



Популяция – это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции.



Решение:

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	$x = x(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	Приращение функции
Скорость изменения численности популяции	$\Delta x / \Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Относительный прирост в данный момент	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t$	Производная $P = x'(t)$

Рост численности населения

Задача :

- Вывести формулу для вычисления численности населения на ограниченной территории в момент времени t .



Решение:

Пусть $y=y(t)$ - численность населения.

Рассмотрим прирост населения за $\Delta t=t-t_0$

$\Delta y=k y \Delta t$, где $k=k_p - k_c$ – коэффициент прироста
(k_p – коэффициент рождаемости,

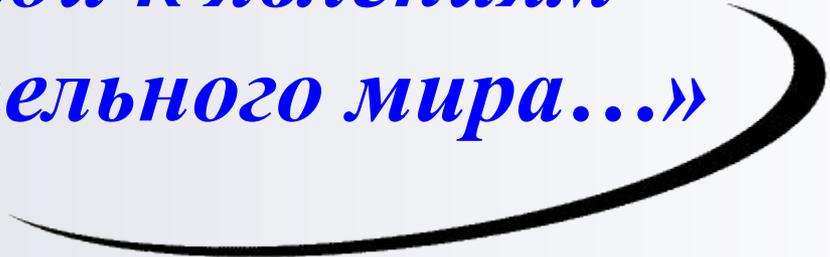
k_c – коэффициент смертности)

$$\Delta y / \Delta t = k y$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим $\lim \Delta y / \Delta t = y'$

$$y' = k y$$

*«...нет ни одной области в
математике, которая
когда-либо не окажется
применимой к явлениям
действительного мира...»*



Н.И. Лобачевский

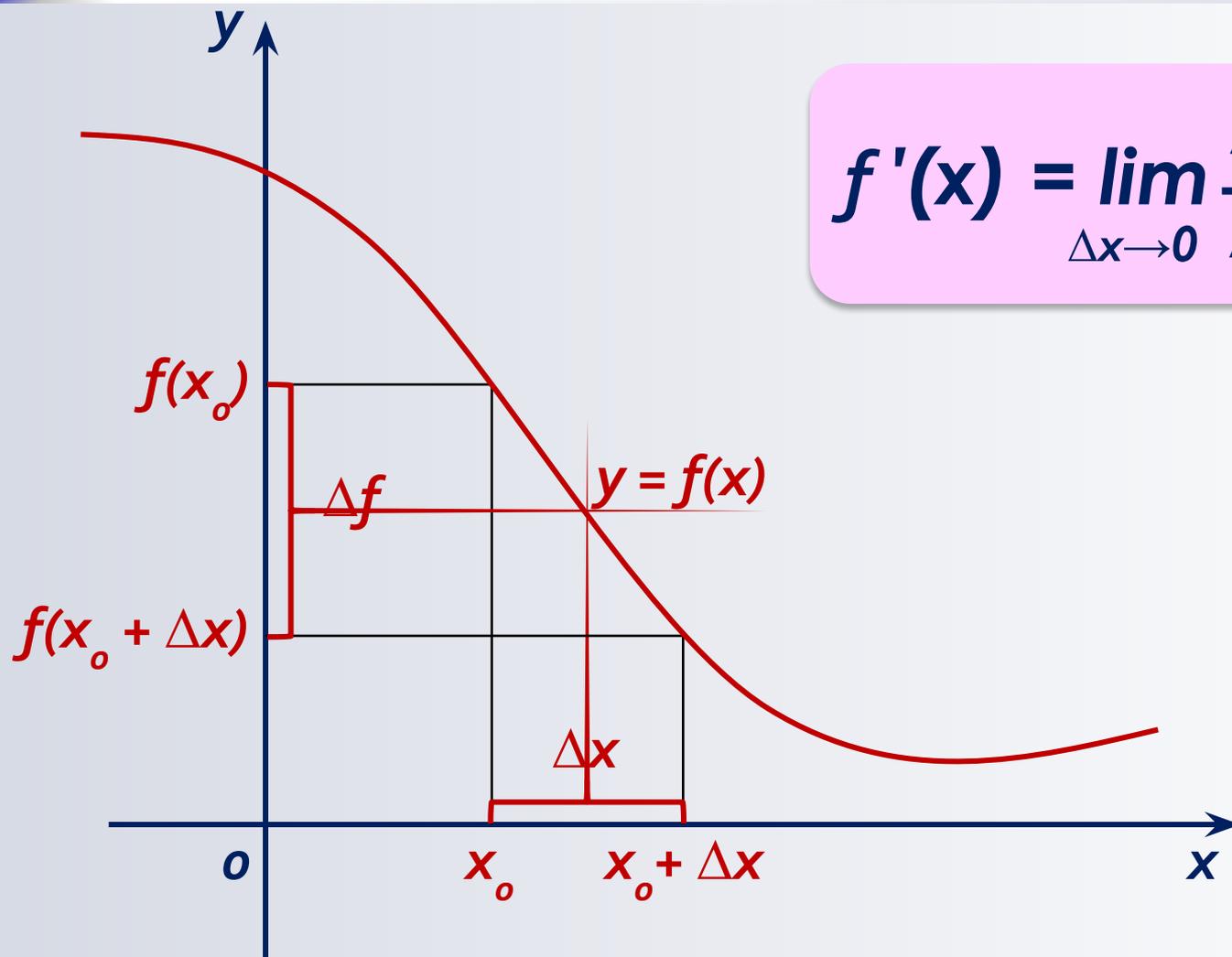
Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в некоторой точке x этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют **дифференцированием**

Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной

1. Зафиксировать значение x_0 , найти $f(x_0)$.
2. Дать аргументу x_0 приращение Δx , перейти в новую точку $x_0 + \Delta x$, найти $f(x_0 + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. Этот предел и есть $f'(x_0)$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = kx_0 + b$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = \\ = kx_0 + k \cdot \Delta x + b - kx_0 - b = k \cdot \Delta x$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (k) = k$$

$$(kx + b)' = k$$

Примеры

2. Найти производную функции $y = C$ (C – const) в точке x_0

$$1. f(x_0) = C$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = C$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$(C)' = 0$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = (x_0)^2$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = \sqrt{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_0

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_0

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x (x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	\sqrt{x}	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s , пройденный точкой, есть функция от времени t , т.е. $s = s(t)$, то **скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает **мгновенную скорость** в момент времени t .

Правила нахождения производной

1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их сумма $u(x) + v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция $u(x)$ имеет в точке x производную и C – данное число, то функция $C \cdot u(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

Правила нахождения производной

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке x производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Правила нахождения производной

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Примеры:

$$1. ((5x - 3)^3)' = 3(5x - 3)^2 \cdot (5x - 3)' = \\ = 3(5x - 3)^2 \cdot 5 = 15(5x - 3)^2$$

$$2. (\sin(4x + 8))' = \cos(4x + 8) \cdot (4x + 8)' = \\ = \cos(4x + 8) \cdot 4 = 4 \cos(4x + 8)$$

Вычислить производную в указанной точке

Функция	Точка	Ответ
1) $y = x^3 + x^2$	$x_0 = 1$	
2) $y = \frac{32}{x} - \sqrt{x}$	$x_0 = 4$	
3) $y = 4x^2 - 15x + 49$	$x_0 = 0$	
4) $y = \sin x + \operatorname{tg} x + \frac{3}{4}x$	$x_0 = \pi$	
5) $y = 6\sqrt{x}(2x - 1)$	$x_0 = 9$	
6) $y = (3x + 2)^2$	$x_0 = -2$	
7) $y = \sqrt{5x - 1}$	$x_0 = 1$	
8) $y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$	$x_0 = 0$	
9) $y = -x^4 + 129$	$x_0 = -1$	
10) $y = \frac{2}{3}x^3 - 87$	$x_0 = -4$	
11) $y = 35$	$x_0 = 7$	
12) $y = -2 \cos 5x$	$x_0 = \frac{\pi}{10}$	

Вычислить производную в указанной точке

Функция	Точка	Ответ
$x^3 + x^2$	$x_0 = 1$	5
$\frac{32}{x} - \sqrt{x}$	$x_0 = 4$	$-2\frac{1}{4}$
$4x^2 - 15x + 49$	$x_0 = 0$	-15
$\sin x + \operatorname{tg} x + \frac{3}{4}x$	$x_0 = \pi$	$\frac{3}{4}$
$6\sqrt{x}(2x-1)$	$x_0 = 9$	53
$(3x+2)^2$	$x_0 = -2$	-24
$\sqrt{5x-1}$	$x_0 = 1$	$1\frac{1}{4}$
$\frac{2x+3}{2x-1}$	$x_0 = 0$	-8
$-x^4 + 129$	$x_0 = -1$	4
$\frac{2}{3}x^3 - 87$	$x_0 = -4$	32
35	$x_0 = 7$	0
$-2 \cos 5x$	$x_0 = \frac{\pi}{10}$	10



Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке x , то она непрерывна в этой точке.

Найдите производную функции:

а) $y = x^7$;

г) $y = 4x + 5$;

б) $y = 5$;

д) $y = \sin x + \frac{\sqrt{x}}{2}$.

в) $y = -\frac{6}{x}$;

а) $y = \frac{\cos x}{x}$;

в) $y = (3x - 4)^6$.

б) $y = x \operatorname{tg} x$;

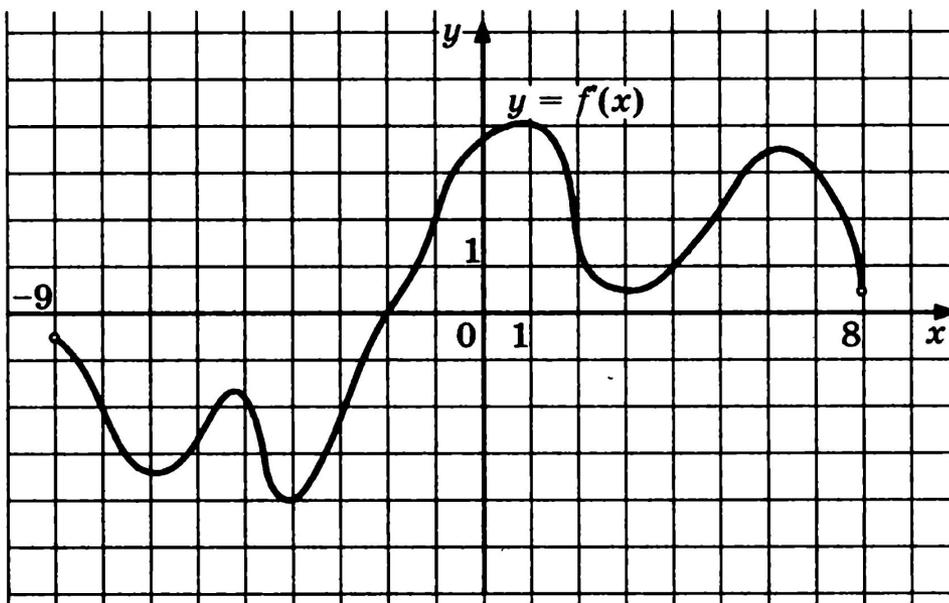
Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Прямая $y = 4x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

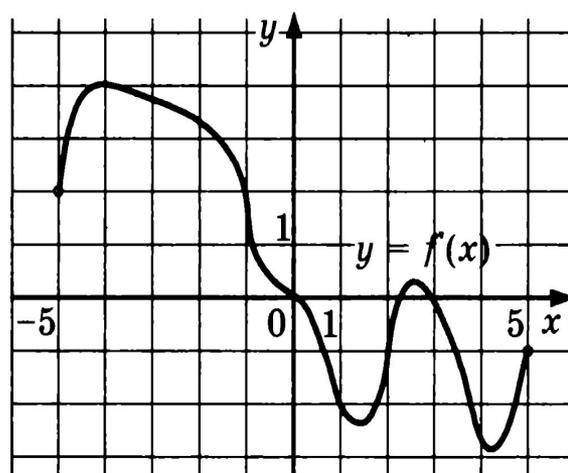
1594. Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.

1595. Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

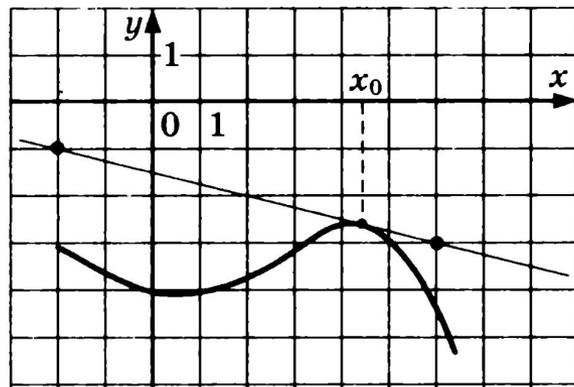
1596. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



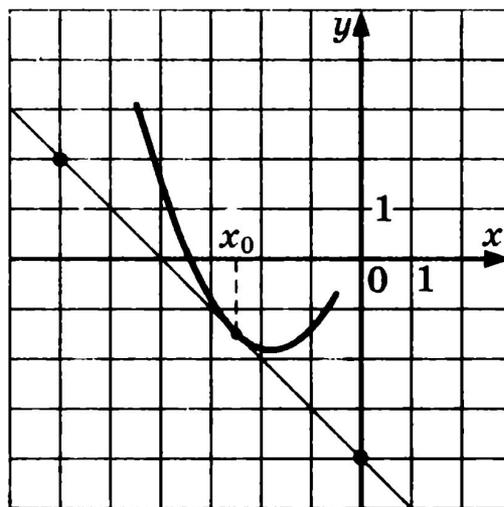
1599. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней.



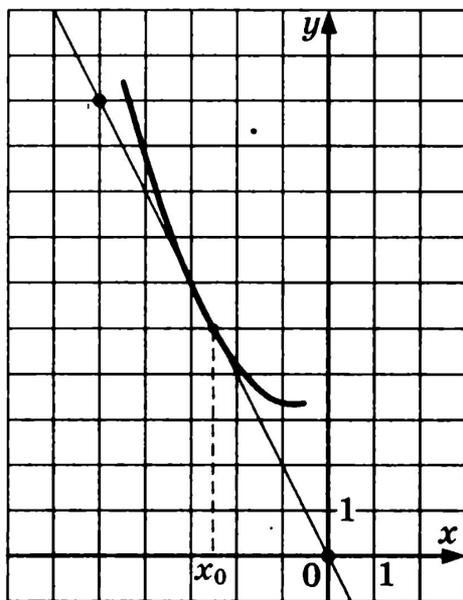
1785. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



1791. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

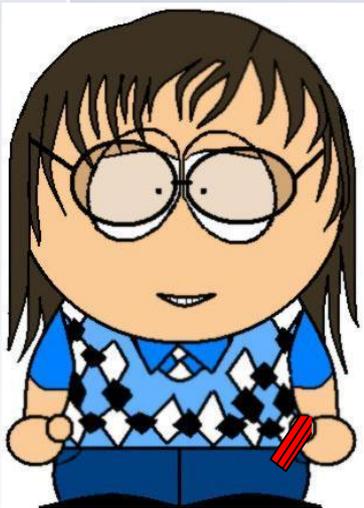


1800. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Проверь себя!!!

- Выполните самостоятельную работу



Найдите производные функций:

а) $y = \frac{\sin x}{x}$;

в) $y = (5x + 1)^7$.

б) $y = x \operatorname{ctg} x$;

Прямая $y = 2x$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.