

# Производная. Применение производной в различных областях.



(группа АТ-83/84 во время презентации)

Подготовил: Новицкий Д. Н.  
ученик КТПС  
группы АТ-83/84

- *Что такое производная?*
- *Геометрический смысл производной*
- *Физический смысл производной*
- *Открытие производной*
- *Область применения производной*
- *Дифференцирование*

**Содержание**

- **Производная функция** — понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке. Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

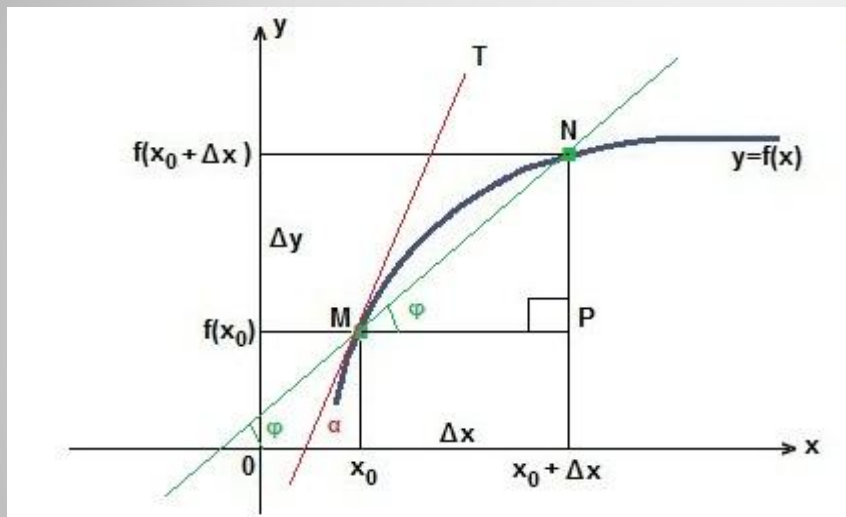
## Что такое производная?

- **Геометрический смысл производной**  
заключается в том, что численно производная функции в данной точке равна тангенсу угла, образованного касательной, проведенной через эту точку к данной кривой, и положительным направлением оси **Ox**:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{или} \quad f'(x_0) = k$$

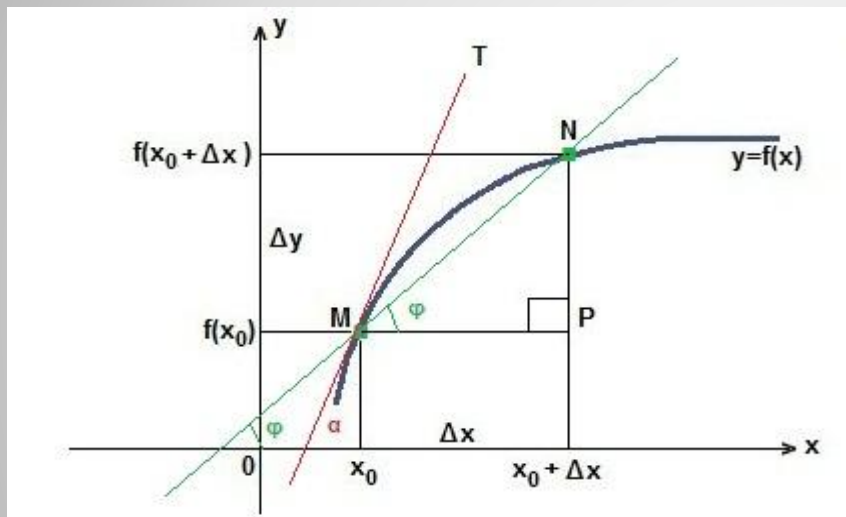
$k$  - угловой коэффициент касательной.

**Геометрический смысл производной**



- В координатной плоскости  $x$  и  $y$  рассмотрим график функции  $y=f(x)$ .
- Зафиксируем точку  $M(x_0; f(x_0))$ .
- Придадим абсциссе  $x_0$  приращение  $\Delta x$ .
- Мы получим новую абсциссу  $x_0 + \Delta x$ . Это абсцисса точки  $N$ , а ордината будет равна  $f(x_0 + \Delta x)$ . Изменение абсциссы повлекло за собой изменение ординаты. Это изменение называют приращение функции и обозначают  $\Delta y$ .
- $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

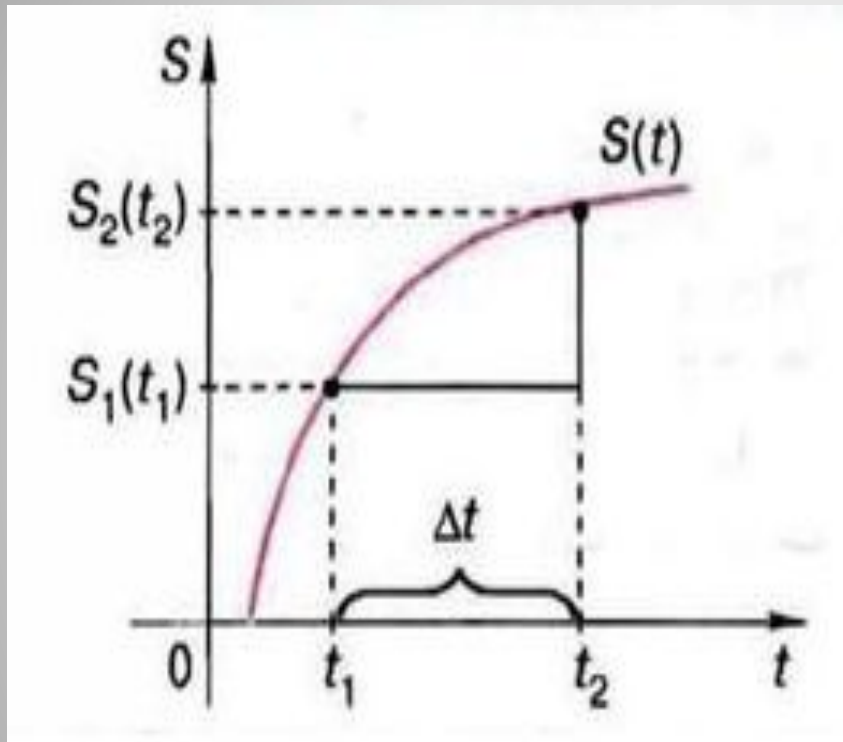
## Геометрический смысл производной



- Через точки **M** и **N** проведем секущую **MN**, которая образует угол  $\varphi$  с положительным направлением оси **Ox**. Определим тангенс угла  $\varphi$  из прямоугольного треугольника **MPN**.
- Пусть  $\Delta x$  стремится к нулю. Тогда секущая **MN** будет стремиться занять положение касательной **MT**, а угол  $\varphi$  станет углом  $\alpha$ . Значит, тангенс угла  $\alpha$  есть предельное значение тангенса угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

## Геометрический смысл производной



- Если точка движется вдоль оси  $x$  и ее координата изменяется по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:  
 **$U(t) = x'(t)$ ,**

а её ускорение:  
 **$a(t) = U'(t)$**

**Физический смысл производной**

- Честь открытия основных законов математического анализа принадлежит английскому физику и математику **Исааку Ньютону** и немецкому математику, физику, философу **Лейбницу**.
- **Ньютон** ввел понятие производной, изучая законы механики, тем самым раскрыл её механический смысл.
- **Лейбниц** пришёл к понятию производной, решая задачу проведения касательной к производной линии, объяснив этим её геометрический смысл.

## Открытие производной

### Исаак Ньютон

Британский физик



Английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.

Родился: 4 января 1643 г., [Усадьба Вулсторп](#), Линкольншир, Королевство Англия

Умер: 31 марта 1727 г. (84 года), [Лондон](#), Большой [Лондон](#), Англия, Королевство Великобритания

Родители: [Исаак Ньютон](#), [Анна Эйскоу](#), [Исаак Ньютон](#)

### Готфрид Вильгельм Лейбниц

Немецкий философ



Саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук.

Родился: 1 июля 1646 г., [Лейпциг](#), Саксония, Священная Римская империя

Умер: 14 ноября 1716 г. (70 лет)

Родители: [Фридрих Лейбнюц](#)

- Российский математик XIX века **Панфутий Львович Чебышев** говорил: «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека, например, как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды».

## Пафнутий Львович Чебышёв

Русский математик

Русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук и ещё 24 академий мира.

Родился: 16 мая 1821 г., Жуковский район, Калужская губерния, Российская империя

Умер: 8 декабря 1894 г. (73 года), Санкт-Петербург, Российская империя

Чем известен: один из основателей современной теории приближений



# Область определения производной

С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей:

- Инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции;
- Конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;
- Экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными.



## Область определения производной

- **Дифференцирование** — операция взятия полной или частной производной функции

- **Формулы дифференцирования:**

$$\text{I. } y = c; y' = 0;$$

$$\text{II. } y = x^n; y' = nx^{n-1};$$

$$\text{III. } y = a^x; y' = a^x \ln a;$$

$$\text{III}'. y = e^x; y' = e^x;$$

$$\text{IV. } y = \log_a x; y' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$\text{IV}'. y = \ln x; y' = \frac{1}{x};$$

$$\text{V. } y = \sin x; y' = \cos x;$$

$$\text{VI. } y = \cos x; y' = -\sin x;$$

$$\text{VII. } y = \operatorname{tg} x; y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{VIII. } y = \operatorname{ctg} x; y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{IX. } y = \arcsin x; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{X. } y = \arccos x; y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{XI. } y = \operatorname{arctg} x; y' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{XII. } y = \operatorname{arccotg} x; y' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{XIII. } y = \operatorname{sh} x; y' = \operatorname{ch} x;$$

$$\text{XIV. } y = \operatorname{ch} x; y' = \operatorname{sh} x;$$

$$\text{XV. } y = \operatorname{th} x; y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\text{XVI. } y = \operatorname{cth} x; y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

# Дифференцирование

**Спасибо за уделённое  
время!**

